Corrigé du EH 13

Exercice CCINP 97

On rappelle que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\sum \dfrac{x^n}{n!}$ converge et $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!} = \mathrm{e}^x$.

1. $Y(\Omega) = \mathbb{N}$.
D'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à X :

$$P(Y=k) = \sum_{j=0}^{+\infty} P\left((X,Y)=(j,k)\right) = \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{(j+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!}.$$

Toujours dans $[0,+\infty]$

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{j\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=1}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j-1}}{(j-1)!} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} < \infty \quad (*). \qquad (\star)$$

et de même

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{j+k}}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!} \sum_{j=0}^{+\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{\mathrm{e}\, k!}\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} = \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} \quad (**). \qquad (\star\star)$$

Donc, d'après (*) et (**), on en déduit que :

$$P(Y=k) = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} + \frac{k\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}} = \frac{(\frac{1}{2}+k)\left(\frac{1}{2}\right)^{k}}{k!\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Pour des raisons de symétrie, X et Y ont la même loi et donc :

$$X(\Omega) = \mathbb{N} \text{ et } \forall j \in \mathbb{N},\ P(X=j) = \frac{(\frac{1}{2}+j)\left(\frac{1}{2}\right)^{j}}{j!\sqrt{\mathrm{e}}}.$$

Les variables X et Y ne sont pas indépendantes car :
$P((X,Y)=(0,0)) = 0$ et $P(X=0)P(Y=0) \neq 0$.

2. La variable aléatoire 2^{X+Y} est positive et possède donc une espérance dans $[0,+\infty]$ qu'on peut calculer directement avec la formule de transfert :

$$E(2^{X+Y}) = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j+k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!} + \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{k}{\mathrm{e}\, j!\, k!} = 2\sum_{(j,k)\in\mathbb{N}^2} \frac{j}{\mathrm{e}\, j!\, k!}$$

pour raisons de symétrie des rôles de j et k.

On obtient, par le théorème de Fubini, $E(2^{X+Y}) = \dfrac{2}{\mathrm{e}}\left(\displaystyle\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{j}{j!}\right)\left(\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{k!}\right) = 2\displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty}\frac{1}{(j-1)!} = 2\mathrm{e} < \infty$..
On a ainsi démontré que $2^{X+Y} \in L^1$ et obtenu son espérance.

Exercice CCINP 98

1. L'expérience est la suivante : l'épreuve de l'appel téléphonique de la secrétaire vers un correspondant est répétée n fois et ces n épreuves sont indépendantes.
De plus, chaque épreuve n'a que deux issues possibles : le correspondant est joint avec la probabilité p (succès) ou le correspondant n'est pas joint avec la probabilité $1-p$ (échec).
La variable X considérée représente le nombre de succès et suit donc une loi binômiale de paramètres (n,p).
C'est-à-dire $X(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(X=k) = \dbinom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}$.

2. a) Soit $i \in [\![0,n]\!]$.
Sous la condition $(X=i)$, la secrétaire rappelle $n-i$ correspondants lors de la seconde série d'appels. Comme cette nouvelle série d'appels se fait dans les mêmes conditions que pour la question 1., sauf pour le nombre de répétitions qui est maintenant égal à $n-i$, alors on se retrouve dans le schéma d'une loi binomiale de paramètre $(n-i,p)$.

Donc $P(Y=k|X=i) = \begin{cases} \dbinom{n-i}{k}p^k(1-p)^{n-i-k} & \text{si } k \in [\![0,n-i]\!] \\ 0 \text{ sinon} \end{cases}$

b) $Z(\Omega) = [\![0,n]\!]$ et d'après la formule des probabilités totales pour le système complet d'événements associé à X : $\forall k \in [\![0,n]\!]$ $P(Z=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k} P((X=i)\cap(X+Y=k)) = \sum_{i=0}^{k} P((X=i)\cap(Y=k-i)) = \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i|X=i)P(X=i)$.

Soit $k \in [\![0,n]\!]$. D'après les questions précédentes, $P(Z=k) = \displaystyle\sum_{i=0}^{k}\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i}p^k(1-p)^{2n-k-i}$.

Or, d'après l'indication, $\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

Donc $P(Z = k) = \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k-i} = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k} \sum_{i=0}^{k} \binom{k}{i}\left(\frac{1}{1-p}\right)^i$.

Donc d'après le binôme de Newton, $P(Z = k) = \binom{n}{k} p^k(1-p)^{2n-k}\left(\frac{2-p}{1-p}\right)^k = \binom{n}{k}\left(p(2-p)\right)^k\left((1-p)^2\right)^{n-k}$.

On vérifie que $1-p(2-p) = (1-p)^2$ et donc on peut conclure que :

Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$.

Remarque : preuve (non demandée dans l'exercice) de l'égalité proposée dans l'indication :

$\binom{n-i}{k-i}\binom{n}{i} = \frac{(n-i)!}{(n-k)!\,(k-i)!}\frac{n!}{i!\,(n-i)!} = \frac{n!}{(k-i)!\,(n-k)!\,i!} = \frac{k!}{(k-i)!\,i!}\frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{k}{i}\binom{n}{k}$.

c) D'après le cours, comme Z suit une loi binomiale de paramètre $(n, p(2-p))$, alors : $E(Z) = np(2-p)$ et $V(Z) = np(2-p)\left(1-p(2-p)\right) = np(2-p)(p-1)^2$.