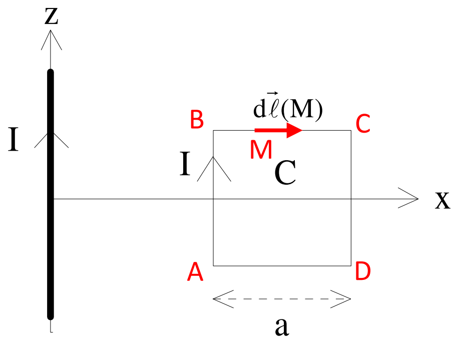
5.3.2 Dipôle magnétique-Exercice 2

Un cadre carré de coté de longueur a parallèles à Ox et Oz, parcouru par un courant I, est soumis au champ magnétique d'un fil infini parcouru par un courant I identique.
Le centre C du carré est sur l'axe Ox à la distance x >> a du fil.

Déterminer la résultante des forces exercées par le fil sur le cadre :

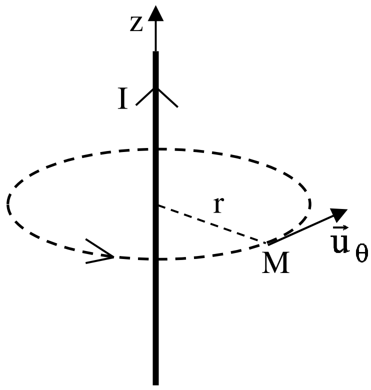
a-En utilisant la loi de Laplace.

b-En utilisant le concept de dipôle magnétique.



Rappel : force subie par un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}}$ dans un champ extérieur $\vec{B}$: $\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}}.\vec{B})$

Calcul préliminaire : champ magnétique crée par un fil rectiligne infini



- Invariance des courants par translation selon Oz et rotation autour de Oz.
  Donc : $\vec{B}(M) = \vec{B}(r)$
- Le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie des courants : $\vec{B}(M) = B_\theta(r)\vec{u}_\theta$
- Théorème d'Ampère pour le cercle de rayon r passant par M :
  $\oint_{(C)} \vec{B}(M).d\vec{r}(M) = \mu_0 I_{\text{à travers}(C)}$ => $2\pi r B_\theta(r) = \mu_0 I$

  Donc : $\boxed{\vec{B}(M) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_\theta}$

En appliquant cette formule au schéma de l'énoncé, on aura : $\vec{u}_\theta = \vec{u}_y$

a- $\vec{F}_{fil\to cadre} = \oint_{cadre} Id\vec{\ell}(M) \wedge \vec{B}(M)$

$$= \int_A^B Idz\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(x - \frac{a}{2})}\vec{u}_y + \int_B^C Idr\vec{u}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_y + \int_C^D Idz\vec{u}_z \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi(x + \frac{a}{2})}\vec{u}_y + \int_D^A Idr\vec{u}_x \wedge \frac{\mu_0 I}{2\pi r}\vec{u}_y$$

Les intégrales sur BC et sur DA se compensent car leurs bornes sont opposées. Il reste :

$$\vec{F}_{fil\to cadre} = -\frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x - \frac{a}{2})}\vec{u}_x + \frac{\mu_0 I^2 a}{2\pi(x + \frac{a}{2})}\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I^2 a(x + \frac{a}{2} - x + \frac{a}{2})}{2\pi(x^2 - \frac{a^2}{4})}\vec{u}_x$$

On a x >> a, donc finalement : $\boxed{\vec{F}_{fil\to cadre} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2}\vec{u}_x}$

b-x >> a : le cadre se présente comme un dipôle magnétique de moment $\vec{\mathcal{M}} = Ia^2\vec{u}_y$

On a : $\vec{F}_{fil\to cadre} = \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}}.\vec{B})$

$$\vec{\mathcal{M}}.\vec{B} = Ia^2\vec{u}_y.\frac{\mu_0 I}{2\pi x}\vec{u}_y = \frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x} \quad \text{puis} \quad \overrightarrow{\text{grad}}(\vec{\mathcal{M}}.\vec{B}) = \frac{d}{dx}\left(\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x}\right)\vec{u}_x = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2}\vec{u}_x$$

On retrouve : $\boxed{\vec{F}_{fil\to cadre} = -\frac{\mu_0 I^2 a^2}{2\pi x^2}\vec{u}_x}$