Chapitre 14

Intégration sur un intervalle quelconque

Dans ce chapitre, I désigne un intervalle d'intérieur non vide de $\mathbb{R}$ et on s'intéresse à des fonctions définies sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$, corps des réels ou des complexes

I Intégrale généralisée sur $[a\,;+\infty[$

I. A Fonctions continues par morceaux

Définition 1.1

Une fonction $f : I \longrightarrow \mathbb{K}$ est dite **continue par morceaux** sur I lorsqu'elle est continue par morceaux sur tout segment inclus dans I.

Notation L101 : On notera $\mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Exemples 1.2 :

- La fonction partie entière est continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
- La fonction inverse est continue par morceaux sur $]0\,;+\infty[$, mais elle n'a pas de prolongement continu par morceaux sur $[0\,;+\infty[$.

I. B Intégrales convergentes sur $[a\,;+\infty[$

Dans cette partie $a \in \mathbb{R}$.

Définition 1.3

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;+\infty[, \mathbb{K})$.
On dit que **l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} f$ converge** lorsque la fonction $x \mapsto \displaystyle\int_a^x f$ a une limite finie en $+\infty$.
On note alors $\int_a^{+\infty} f$ ou $\int_a^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ cette limite.
L'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ est dite **divergente** lorsqu'elle n'est pas convergente.

Vocabulaire :

- La nature d'une intégrale est son caractère convergent ou divergent.
- Lorsque l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, on dit que l'intégrale converge en $+\infty$.

Proposition 1.4

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;+\infty[)$ et $b \in [a\,;+\infty[$.
Les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_b^{+\infty} f$ sont de même nature et si elles convergent, alors :

$$\int_a^{+\infty} f = \int_a^b f + \int_b^{+\infty} f.$$

Proposition 1.5 (linéarité de l'intégrale)

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;+\infty[)$ et $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$.
Si les intégrales $\int_a^{+\infty} f$ et $\int_a^{+\infty} g$ convergent, alors $\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\int_a^{+\infty} (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^{+\infty} f + \mu \int_a^{+\infty} g.$$

Proposition 1.6

Soit $f \in \mathcal{C}([a\,;+\infty[, \mathbb{K})$ telle que l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge, alors l'application

$$\begin{array}{rccc} g & : & [a\,;+\infty[& \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & x & \longmapsto & \displaystyle\int_x^{+\infty} f \end{array}$$

est dérivable sur $[a\,;+\infty[$ et $\forall x \in [a\,;+\infty[, g'(x) = -f(x)$.

I. C Intégrales des fonctions positives sur $[a\,;+\infty[$

Proposition 1.7

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;+\infty[$ et à valeurs positives, alors l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si $x \mapsto \int_a^x f$ est majorée.
Et en cas de convergence $\int_a^{+\infty} f = \sup\limits_{x \in [a\,;+\infty[} \int_a^x f$.

Remarque 1.8 : Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;+\infty[, \mathbb{R})$ à valeurs positives et $x \mapsto \int_a^x f$ n'est pas majorée, alors

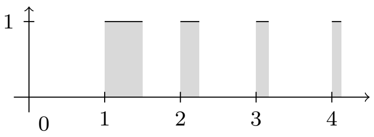
$$\int_a^x f \xrightarrow[x \to +\infty]{} +\infty.$$

On notera alors $\displaystyle\int_a^{+\infty} f = +\infty$.

Attention : La convergence de l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ n'implique pas que f tend vers 0 en $+\infty$.

Contre exemple 1.9 :

Soit $A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} [n\,;n+\frac{1}{2n^2}]$ et $f = \mathbb{1}_A$.



Proposition 1.10

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;+\infty[$. Si

- $0 \leqslant f \leqslant g$;
- $\int_a^{+\infty} g$ converge ;

alors : $\int_a^{+\infty} f$ converge et

$$\int_a^{+\infty} f \leqslant \int_a^{+\infty} g.$$

Théorème 1.11 (intégrales de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{t^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

Théorème 1.12

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$, l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha > 0$.

II Intégrabilité sur un $[a\,;+\infty[$

Définition 2.1

Une fonction f est dite **intégrable** sur $[a\,;+\infty[$ lorsqu'elle est continue par morceaux sur $[a\,;+\infty[$ et $\displaystyle\int_a^{+\infty} |f|$ converge.

Vocabulaire :
- On utilise indifféremment les expressions « f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$ » et « l'intégrale $\int_a^{+\infty} f$ converge absolument ».
- Une fonction f est dite intégrable en $+\infty$ lorsqu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

Remarque 2.2 : Si f est de signe constant sur $[a\,;+\infty[$, $\int_a^{+\infty} f$ converge si et seulement si f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$.

Exemples 2.3 :
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}, t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $[1\,;+\infty[$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- Pour $\alpha \in \mathbb{R}, t \mapsto e^{-\alpha t}$ est intégrable sur $[0\,;+\infty[$ si et seulement si $a > 0$.

Théorème 2.4

Si f est intégrable sur $[a\,;+\infty[$, alors $\int_a^{+\infty} f$ converge.

Remarque 2.5 : Cela signifie que si une intégrale converge absolument, alors elle converge.

Remarque 2.6 : La réciproque est fausse, contre exemple la fonction f définie sur $[1\,;+\infty[$ telle que pour tout $n \in \mathbb{N}^*, \forall x \in [n\,;n+1[, f(x) = \frac{(-1)^n}{n}$.

Théorème 2.7 (de comparaison)

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $[a\,;+\infty[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} O\left(g(t)\right)$ et g est intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$.
- Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{=} o\left(g(t)\right)$ et g est intégrable en $+\infty$, alors f est intégrable en $+\infty$.
- Si $f(t) \underset{t\to+\infty}{\sim} g(t)$, alors l'intégrabilité de g en $+\infty$ équivaut à celle de f.

Attention : Il s'agit d'un critère d'intégrabilité, c'est à dire de convergence des intégrales des valeurs absolues qui sont des fonctions positives.

Méthode 2.8

On peut ainsi adapter le critère de Riemann aux intégrales sur $[1\,;+\infty[$.

Exemples 2.9 : Les intégrales suivantes sont elles convergentes ?

$$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{x^2}\,\mathrm{d}x, \quad \int_2^{+\infty} \frac{1}{\ln x}\,\mathrm{d}x \text{ et } \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{x}}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

III Intégrale généralisée sur un intervalle quelconque

III. A Intégrale sur un intervalle semi-ouvert

Définition 3.1

- Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a\,;b[$ (avec $a \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ avec $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que **l'intégrale $\int_a^b f$ converge** lorsque la fonction $x \mapsto \int_a^x f$ a une limite finie en b (à gauche).
- Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a\,;b]$ (avec $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{K}$. On dit que **l'intégrale $\int_a^b f$ converge** lorsque la fonction $x \mapsto \int_x^b f$ a une limite finie en a (à droite).

Dans ce cas, cette limite est notée : $\displaystyle\int_a^b f$ ou $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Exemples 3.2 :

$$\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t, \quad \int_0^1 \ln t\,\mathrm{d}t \text{ et } \int_{-\infty}^0 e^{-\alpha t}\,\mathrm{d}t$$

Proposition 3.3

- Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[)$ et $c \in [a\,;b[$.
  Les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_c^b f$ sont de même nature et si elles convergent, alors :
  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$
- Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b])$ et $c \in [a\,;b[$.
  Les intégrales $\int_a^b f$ et $\int_a^c f$ sont de même nature et si elles convergent, alors :
  $$\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f.$$

Remarque 3.4 : Si $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b], \mathbb{K})$, alors

$$\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t \xrightarrow[x \to b]{} \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

La définition de $\int_a^b f$ pour $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[, \mathbb{K})$ ne crée donc pas d'ambigüité.

III. B Intégrale sur un intervalle ouvert

Définition 3.5

Soit f une fonction continue par morceaux sur $]a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ avec $a, b \in \overline{\mathbb{R}}, a < b$.

On dit que **l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f$ converge** lorsqu'il existe $c \in]a\,;b[$ tel que les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent. On note alors : $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Remarque 3.6 : Si les intégrales $\int_a^c f$ et $\int_c^b f$ convergent, il en est de même de $\int_a^d f$ et $\int_d^b f$ pour tout $d \in]a\,;b[$. Il suffit donc de considérer un élément c quelconque de $]a\,;b[$ pour conclure sur la nature de l'intégrale.
De plus $\int_a^c f + \int_c^b f = \int_a^d f + \int_d^b f$, l'intégrale $\int_a^b f$ est donc bien définie sans ambigüité.

Vocabulaire : Pour $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[, \mathbb{K})$ et $c \in]a\,;b[$,

- lorsque $\int_c^b f$ converge, on dit que l'intégrale converge en b ;
- lorsque $\int_a^c f$ converge, on dit que l'intégrale converge en a.

Notation : Pour f à valeurs positive, on écrit $\displaystyle\int_a^b f = +\infty$ lorsque l'intégrale diverge.

III. C Propriétés des intégrales généralisées

Proposition 3.7 (Relation de Chasles)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{K})$ telle que $\int_I f$ converge, pour a, b, c dans I ou des extrémités de I :

$$\int_a^b f + \int_b^c f = \int_a^c f.$$

Proposition 3.8

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(I, \mathbb{R})$.
Si : $0 \leqslant f \leqslant g$ sur I et $\int_I g$ converge, alors $\int_I f$ converge et $\int_I f \leqslant \int_I g$.

Proposition 3.9 (Linéarité de l'intégrale)

Soit $f, g \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[, \mathbb{K})$, $\lambda, \mu \in \mathbb{K}$.
Si $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f + \mu g)$ converge et :

$$\int_a^b (\lambda f + \mu g) = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g.$$

Proposition 3.10 (Positivité)

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[,\mathbb{R})$. Si f est positive sur $]a\,;b[$ et l'intégrale $\int_a^b f$ converge, alors :

$$\int_a^b f \geqslant 0.$$

De plus, si f est continue et positive sur $]a\,;b[$ $(a < b)$ et $\int_a^b f = 0$, alors $f = 0$ sur $]a\,;b[$.

Proposition 3.11 (Croissance)

Soit f, g continues par morceaux sur $]a\,;b[$ telles que $\int_a^b f$ et $\int_a^b g$ convergent. Si $f \leqslant g$, alors :

$$\int_a^b f \leqslant \int_a^b g.$$

III. D Intégration par parties

Théorème 3.12

Soit f et g des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur I et a, b dans I ou des extrémités de I. Si le produit fg a des limites finies en a et en b, alors les intégrales $\int_a^b f'g$ et $\int_a^b fg'$ sont de même nature et si elles convergent :

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,\mathrm{d}t = [fg]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,\mathrm{d}t,$$

où $[fg]_a^b = \lim\limits_{t\to b} f(t)g(t) - \lim\limits_{t\to a} f(t)g(t)$.

Exemple 3.13 :

$$\int_0^1 \sqrt{1-t^2}\,\mathrm{d}t$$

III. E Changement de variable

1) sur un segment

Théorème 3.14

Soit f une fonction continue sur un intervalle I.
Soit φ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur un intervalle J telle que $\varphi(J) \subset I$. Soit $a, b \in J$.
On a :

$$\int_a^b f\big(\varphi(u)\big)\varphi'(u)\,\mathrm{d}u = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Méthode 3.15

Pour effectuer un changement de variable $t = \varphi(u)$:

1. mettre $\varphi'(u)$ en facteur ;
2. exprimer le reste de l'intégrande en fonction de $\varphi(u)$;
3. remplacer formellement :
   - $\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ par $\mathrm{d}t$
   - $\varphi(u)$ par t
   - changer les bornes.

2) sur un intervalle quelconque

Théorème 3.16

Soit f une fonction continue sur $]a\,;b[$ et $\varphi :]\alpha\,;\beta[\longrightarrow]a\,;b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors les intégrales $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u = \int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 3.17 : Les hypothèses :
« $\varphi :]\alpha\,;\beta[\longrightarrow]a\,;b[$ bijective, strictement croissante et de classe $\mathcal{C}^1$ »
sont équivalentes à :
« $\varphi \in \mathcal{C}^1(]\alpha\,;\beta[,\mathbb{R})$ strictement croissante, $\lim\limits_{t\to\alpha} \varphi(t) = a$ et $\lim\limits_{t\to\beta} \varphi(t) = b$. »

Proposition 3.18

Soit f une fonction continue sur $]a\,;b[$ et $\varphi :]\alpha\,;\beta[\longrightarrow]a\,;b[$ bijective, strictement décroissante et de classe $\mathcal{C}^1$.
Alors les intégrales $\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u$ et $\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ sont de même nature et en cas de convergence :

$$\int_\alpha^\beta f\big(\varphi(t)\big)\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_b^a f(u)\,\mathrm{d}u = -\int_a^b f(u)\,\mathrm{d}u.$$

Exemple 3.19 :

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t(1-t)}}$$

IV Fonctions intégrables

IV. A intégrale absolument convergentes et fonctions intégrables

Définition 4.1

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[,\mathbb{K})$, on dit que $\int_a^b f$ est **absolument convergente** lorsque $\int_a^b |f|$ converge.

Théorème 4.2

Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[,\mathbb{K})$, si $\int_a^b f$ est absolument convergente, alors elle est convergente.

Définition 4.3

Une fonction f est dite **intégrable sur l'intervalle $]a\,;b[$** lorsqu'elle est continue par morceaux sur $]a\,;b[$ et que l'intégrale $\int_a^b f$ converge absolument.

Vocabulaire : Soit $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b[,\mathbb{K})$ et $c \in]a\,;b[$,

- on dit que f est intégrable en b lorsque f est intégrable sur $[c\,;b[$;
- on dit que f est intégrable en a lorsque f est intégrable sur $]a\,;c]$.

Notation : Pour I un intervalle quelconque et f intégrable sur I, on note $\displaystyle\int_I f$ son intégrale sur I.

Proposition 4.4

L'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel noté $L^1(I,\mathbb{K})$.

Remarque 4.5 : l'application $f \mapsto \int_I f$ est une forme linéaire sur $L^1(I,\mathbb{K})$.

Proposition 4.6 (Inégalité triangulaire)

Soit $f \in L^1(I,\mathbb{K})$, alors :

$$\left|\int_I f\right| \leqslant \int_I |f|$$

IV. B Comparaison

Théorème 4.7

Soit f et g des fonctions continues par morceaux sur $]a\,;b[$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.

- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} O\left(g(x)\right)$ et g est intégrable en b, alors f est intégrable en b.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{=} o\left(g(x)\right)$ et g est intégrable en b, alors f est intégrable en b.
- Si $f(x) \underset{x\to b}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en b équivaut à celle de f.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} O\left(g(x)\right)$ et g est intégrable en a, alors f est intégrable en a.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{=} o\left(g(x)\right)$ et g est intégrable en a, alors f est intégrable en a.
- Si $f(x) \underset{x\to a}{\sim} g(x)$, alors l'intégrabilité de g en a équivaut à celle de f.

IV. C Intégrales de Riemann

Théorème 4.8

Pour $\alpha \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable sur $]0\,;1]$ si et seulement si $\alpha < 1$.

Remarque 4.9 : Une fonction f est intégrable en a (respectivement en b) si et seulement si $t \mapsto f(a+t)$ (resp. $t \mapsto f(b-t)$) est intégrable en 0.

Théorème 4.10

Soit $a, b \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, alors :

- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|t-a|^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;
- l'intégrale $\displaystyle\int_a^b \frac{1}{|b-t|^\alpha}\,\mathrm{d}t$ converge si et seulement si $\alpha < 1$;

Exemple 4.11 : Montrer que l'intégrale suivante converge puis la calculer :

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln t}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$$

V Intégration des relations de comparaison

V. A Cas convergent : comparaison des restes

Proposition 5.1

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[,\mathbb{R})$ avec φ à valeurs positives et intégrable sur $[a\,;b[$.

- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} O\left(\varphi(t)\right)$, alors f est intégrable sur $[a\,;b[$ et $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_x^b \varphi\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} o\left(\varphi(t)\right)$, alors f est intégrable sur $[a\,;b[$ et $\int_x^b f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_x^b \varphi\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} \varphi(t)$, alors f est intégrable sur $[a\,;b[$ et $\int_x^b f \underset{x\to b}{\sim} \int_x^b \varphi$.

Remarque 5.2 : Même résultats en a pour $f \in \mathcal{C}_{pm}(]a\,;b],\mathbb{K})$.

Exemple 5.3 : Donner un équivalent en $+\infty$ de $x \mapsto \int_x^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{t\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

V. B Cas divergent : comparaison des intégrales partielles

Proposition 5.4

Soit $b \in \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[,\mathbb{K})$ et $\varphi \in \mathcal{C}_{pm}([a\,;b[,\mathbb{R})$ avec φ à valeurs positives et non intégrable sur $[a\,;b[$.

- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} O\left(\varphi(t)\right)$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} O\left(\int_a^x \varphi\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{=} o\left(\varphi(t)\right)$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{=} o\left(\int_a^x \varphi\right)$.
- Si $f(t) \underset{t\to b}{\sim} \varphi(t)$, alors $\int_a^x f \underset{x\to b}{\sim} \int_a^x \varphi$.

Exemple 5.5 : Déterminer, à l'aide d'une intégration par parties, un équivalent simple quand $x \to +\infty$ de $\displaystyle\int_2^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t}$.