Exercices

Exercice 1. Étudier la nature des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2 x}{x^2}\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sqrt{x+2}-\sqrt{x+1}}{x}\,\mathrm{d}x$;
3. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{x\ln x}{x^2+x+1}\,\mathrm{d}x$;
4. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,\mathrm{d}x$;
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{x^2+1}e^{-x}\,\mathrm{d}x$;
6. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{x\ln x}\,\mathrm{d}x$;
7. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x$;
8. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\ln x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$;
9. $\displaystyle\int_0^{1} \sin\left(\frac{1}{x}\right)\,\mathrm{d}x$;
10. $\displaystyle\int_0^{1} \frac{\sin x}{\sqrt{1-x}}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 2. Montrer la convergence et calculer les intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(x+1)}\,\mathrm{d}x$;
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{t}\times(1+t)}\,\mathrm{d}t$;
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1}{\operatorname{ch} x}\,\mathrm{d}x$.

Exercice 3. On considère la fonction

$$f \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{x^2+t^2}\,\mathrm{d}t. \end{array}$$

1. Montrer que f est bien définie.
2. Calculer $f(1)$ (on pourra utiliser le changement de variable $u=\frac{1}{t}$).
3. En déduire la valeur de $f(x)$ pour tout $x>0$.

Exercice 4.

1. Montrer que pour $X \geqslant 1$, $\int_1^X \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \cos 1 - \frac{\cos X}{X} - \int_1^X \frac{\cos x}{x^2}\,\mathrm{d}x$.
2. Montrer l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
est convergente.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,
$$\int_{2k\pi}^{2(k+1)\pi} \frac{\sin^2(x)}{x}\,\mathrm{d}x \geqslant \frac{1}{2(k+1)}.$$
4. Montrer l'intégrale
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x.$$
n'est pas absolument convergente.
5. La fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{\sqrt{x}}$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$? L'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ est-elle convergente ?

Exercice 5. Soit f une fonction rationnelle. Sur quels intervalles f est-elle intégrable ?

Exercice 6.

1. Pour quelles valeurs du réel α la fonction $f : t \mapsto t^\alpha e^{-\sqrt{t}}$ est-elle intégrable sur $]0\,;+\infty[$?
2. Calculer $\int_0^{+\infty} t^2 e^{-\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

Exercice 7.

1. Montrer que $f : x \mapsto \ln(\sin x)$ est intégrable sur $]0\,;\pi[$.
2. Montrer que :
$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln(\cos t)\,\mathrm{d}t.$$
3. En déduire la valeur de :
$$\int_0^{\pi} \ln(\sin t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 8.

1. Pour quelles valeur du couple $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ la fonction $t \mapsto t^m(\ln t)^n$ est-elle intégrable sur $]0\,;1[$?
   Dans ce cas, calculer :
$$I_{m,n} = \int_0^1 t^m (\ln t)^n \,\mathrm{d}t.$$
2. Déterminer un équivalent de $I_{n,n}$ lorsque n tend vers l'infini.

Exercice 9.

1. Montrer que :
$$\int_n^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{e^{-n}}{n}.$$
2. Déterminer un équivalent lorsque n tend vers $+\infty$ de :
$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t+n}\,\mathrm{d}t$$

Exercice 10. Déterminer un équivalent simple de
$$\int_1^x \frac{1}{\sqrt{t+\sqrt{t}}}\,\mathrm{d}t$$
lorsque x tend vers $+\infty$.

Exercices CCINP

Exercice 11 (CCINP 28). *N.B. : les deux questions sont indépendantes.*

1. La fonction $x \longmapsto \dfrac{e^{-x}}{\sqrt{x^2-4}}$ est-elle intégrable sur $]2,+\infty[$?
2. Soit a un réel strictement positif.
   La fonction $x \longmapsto \dfrac{\ln x}{\sqrt{1+x^{2a}}}$ est-elle intégrable sur $]0,+\infty[$?