

Devoir Maison n° 15.

Pour le 23 février.

Ce problème propose deux méthodes différentes de recherche de la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Q1. Question préliminaire

Si on admet que $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, que vaut la somme $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$?

Partie I

Q2. On note, pour tout entier naturel n , $W_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n dx$.

Calculer la dérivée de la fonction $x \mapsto (\sin x)^{n+1}$, puis déterminer une relation entre W_{n+2} et W_n .

En déduire, pour tout entier naturel n , que $W_{2n+1} = \frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n+1)!}$.

Q3. Déterminer sur l'intervalle $] -1, 1 [$ le développement en série entière des fonctions $x \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ et $x \mapsto \operatorname{Arcsin} x$.

Q4. En déduire que pour tout $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, $x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$.

Q5. Justifier que

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left[\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right] dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx.$$

Q6. En déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.

Partie II

Q7. Donner sur l'intervalle $] -1, 1 [$ le développement en série entière de la fonction $x \mapsto \frac{1}{x^2-1}$, puis

calculer l'intégrale $\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2-1} dx$.

On donnera le résultat sous la forme de la somme d'une série numérique.

Q8. On pose pour $x \in [0, +\infty[$, $f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2} dt$.

Démontrer que la fonction f est bien définie et est continue sur l'intervalle $[0, +\infty[$.

Q9. Établir que cette fonction f est de classe C^1 sur l'intervalle $]0, 1]$ et exprimer $f'(x)$ comme une intégrale.

Q10. Réduire au même dénominateur l'expression $\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2}$ et en déduire que pour tout

$x \in]0, 1[$, $f'(x) = \frac{\ln x}{x^2-1}$.

Q11. Calculer $f(1)$, puis en déduire la valeur de $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$.