

Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Notations et résultats admis

— Soit la fonction φ définie sur $\mathbf{R}$ par $\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$.

— Pour $k \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$, on pose $C^k(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de classe C^k sur $\mathbf{R}$ à valeurs dans $\mathbf{R}$.

— On note $CL(\mathbf{R})$ l'ensemble des fonctions de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ à croissance lente, c'est-à-dire :

$$CL(\mathbf{R}) = \left\{ f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \exists C > 0, \exists k \in \mathbf{N} \text{ tel que pour tout } x \in \mathbf{R}, |f(x)| \leq C(1 + |x|^k) \right\}.$$

— On note $L^1(\varphi) = \{f \in C^0(\mathbf{R}), f\varphi \text{ intégrable sur } \mathbf{R}\}$.

— Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Pour une fonction $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, on définit si cela est possible la fonction $P_t(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y) \varphi(y) dy.$$

— Pour f deux fois dérivable sur $\mathbf{R}$, on définit sur $\mathbf{R}$ la fonction $L(f)$ par :

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad L(f)(x) = f''(x) - xf'(x).$$

— Une fonction $P : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ est dite fonction polynomiale en $|x|$ s'il existe $d \in \mathbf{N}$ et des réels $a_0, \dots, a_d$ tels que pour tout $x \in \mathbf{R}$, $P(x) = \sum_{k=0}^d a_k |x|^k$.

— Soient $f : \mathbf{R}_+ \rightarrow \mathbf{R}$ une fonction et $\ell \in \mathbf{R} \cup \{\pm\infty\}$. On admet que $\lim_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \ell$ si, et seulement si, pour toute suite $(t_n)_{n \in \mathbf{N}}$ de réels positifs telle que $\lim_{n \rightarrow +\infty} t_n = +\infty$, on a $\lim_{n \rightarrow +\infty} f(t_n) = \ell$.

Partie 1 : Résultats préliminaires

1 ▷ Montrer que toute fonction majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ est à croissance lente.

2 ▷ Montrer que $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R}) \subset L^1(\varphi)$.

On admet dans toute la suite du problème que $\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(t) dt = 1$.

3 ▷ Montrer que $CL(\mathbf{R})$ est un espace vectoriel. Montrer aussi que $CL(\mathbf{R})$ est stable par produit.

4 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Vérifier que la fonction $P_t(f)$ est bien définie pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et vérifier que P_t est linéaire sur $C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$.

5 ▷ Montrer que pour tout $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ et tout $x \in \mathbf{R}$,

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_t(f)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) \varphi(y) dy.$$

6 ▷ Soit $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors $P_t(f) \in C^0(\mathbf{R})$. Montrer aussi que $P_t(f)$ est majorée en valeur absolue par une fonction polynomiale en $|x|$ indépendante de t . En déduire que $P_t(f) \in L^1(\varphi)$.

On admettra dans toute la suite du problème que, si $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$, alors

$$\forall t \in \mathbf{R}_+, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} P_t(f)(x) \varphi(x) dx = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx.$$

7 ▷ Montrer que pour toutes fonctions $f, g \in C^2(\mathbf{R})$ telles que les fonctions f, f', f'' et g soient à croissance lente, on a

$$\int_{-\infty}^{+\infty} L(f)(x) g(x) \varphi(x) dx = - \int_{-\infty}^{+\infty} f'(x) g'(x) \varphi(x) dx.$$

Partie 2 : Dérivée de $P_t(f)$

Pour $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $x \in \mathbf{R}$, on note, si cela a un sens, $\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t}$ la dérivée de la fonction $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$.

Pour $f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$ et $t \in \mathbf{R}_+$ fixé, on note, si cela a un sens, $P_t(f)'$ (resp. $P_t(f)''$) la dérivée de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ (resp. la dérivée seconde de $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$).

8 ▷ Montrer que si $f \in C^1(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que $f' \in CL(\mathbf{R})$ et $x \in \mathbf{R}$, alors $t \in \mathbf{R}_+ \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et montrer que pour tout $t > 0$, on a

$$\frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(-xe^{-t} + \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y \right) f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \varphi(y) dy.$$

9 ▷ Soient $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente et $t \in \mathbf{R}_+$. Montrer que $x \in \mathbf{R} \mapsto P_t(f)(x)$ est de classe C^2 sur $\mathbf{R}$. Montrer aussi que

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)'(x) = e^{-t} \int_{-\infty}^{+\infty} f'(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \varphi(y) dy$$

et

$$\forall x \in \mathbf{R}, \quad P_t(f)''(x) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} f''(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y) \varphi(y) dy.$$

10 ▷ En déduire que pour $f \in C^2(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ telle que f' et f'' soient à croissance lente, on a

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \forall x \in \mathbf{R}, \quad \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} = L(P_t(f))(x).$$

Partie 3 : Inégalité de log-Sobolev pour la gaussienne

Pour $f \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = 1,$$

on définit l'entropie de f par rapport à φ par :

$$\text{Ent}_\varphi(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \ln(f(x)) f(x) \varphi(x) dx.$$

Dans la suite de cette partie, f est un élément de $C^2(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives tel que les fonctions f , f' , f'' et $\frac{f'^2}{f}$ soient à croissance lente. On suppose aussi que $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) \varphi(x) dx = 1$.

11 ▷ Étudier les variations de la fonction $t \mapsto t \ln(t)$ sur $\mathbf{R}_+^*$. On vérifiera que l'on peut prolonger par continuité la fonction en 0.

- 12** ▷ Justifier que la quantité $\text{Ent}_\varphi(g)$ est bien définie pour tout $g \in C^0(\mathbf{R}) \cap CL(\mathbf{R})$ à valeurs strictement positives telle que $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) \varphi(x) dx = 1$.

Indication : On pourra utiliser la question 11.

- 13** ▷ Pour $t \in \mathbf{R}_+$, on pose $S(t) = \text{Ent}_\varphi(P_t(f))$. Justifier que $S(t)$ est bien définie.

- 14** ▷ Montrer que S est continue sur $\mathbf{R}_+$.

Indication : On pourra au préalable montrer que, si $x \in \mathbf{R}$, $t \mapsto P_t(f)(x)$ est continue sur $\mathbf{R}_+$.

- 15** ▷ Vérifier que l'on a $S(0) = \text{Ent}_\varphi(f)$ et $\lim_{t \rightarrow +\infty} S(t) = 0$.

- 16** ▷ On **admet** que S est de classe C^1 sur $\mathbf{R}_+^*$ et que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial P_t(f)(x)}{\partial t} (1 + \ln(P_t(f)(x))) \varphi(x) dx.$$

Montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad S'(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} L(P_t(f))(x) (1 + \ln(P_t(f)(x))) \varphi(x) dx.$$

- 17** ▷ En admettant que le résultat de la question 7 est valable pour les fonctions $P_t(f)$ et $1 + \ln(P_t(f))$, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) = e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P_t(f')(x)^2}{P_t(f)(x)} \varphi(x) dx.$$

- 18** ▷ En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} P_t\left(\frac{f'^2}{f}\right)(x) \varphi(x) dx.$$

- 19** ▷ En déduire que l'on a :

$$\forall t \in \mathbf{R}_+^*, \quad -S'(t) \leq e^{-2t} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) dx.$$

- 20** ▷ Établir l'inégalité suivante

$$\text{Ent}_\varphi(f) \leq \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{f'^2(x)}{f(x)} \varphi(x) dx.$$

FIN DU PROBLÈME