

DM9 - suites et fonction itératrice

2025-2026



Exercice 1 : Approximation du nombre d'or

On appelle nombre d'or et on note ϕ la racine positive du polynôme $X^2 - X - 1$.

- Justifier que $1 < \phi < 2$.
- On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}^*$ par

$$u_1 = \sqrt{1}, u_2 = \sqrt{1 + \sqrt{1}}, u_3 = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}$$

et ainsi de suite,

$$u_n = \sqrt{1 + \sqrt{\dots + \sqrt{1 + \sqrt{1}}}}$$

avec n radicaux.

Exprimer, pour tout entier n supérieur ou égal à 1, u_{n+1} en fonction de u_n et déterminez une fonction f continue telle que $u_{n+1} = f(u_n)$

- Résoudre l'équation $f(x) = x$, pour tout $x \geq -1$.
- Dresser le tableau de variation de f et montrer que, pour tout $n \geq 1$,

$$0 \leq u_n \leq \phi.$$

- Etudier le signe de $f(x) - x$ pour tout $x \geq -1$ et montrer que la suite (u_n) est croissante.
- Démontrer que (u_n) converge vers ϕ .
- Montrer que, pour tout entier $n \geq 1$,

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2}|u_n - \phi|.$$

Indication : commencez par montrer que $u_{n+1} - \phi = \sqrt{1 + u_n} - \sqrt{1 + \phi}$ et utilisez l'expression conjuguée.

- En déduire que, pour tout $n \geq 1$,

$$|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$$

- Quel est le but du programme suivant ?

```
def fonction(p: int) -> float :
    u = 1
    n = 0
    while 1/(2**(n-1)) > 10**(-p) :
        u = sqrt(1+u)
        n = n+1
    return u
```

- On a deux racines au polynôme proposé $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2}$. Seule la première est positive. On peut ensuite procéder par encadrement à partir de $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ en estimant $\sqrt{5}$, mais on peut aussi, en posant $P(x) = x^2 - x - 1$ dire que $P(1) = -1$ tandis que $P(2) = 1$: la racine est donc entre 1 et 2, d'où

$$1 < \phi < 2$$

- On observe qu'il s'agit à chaque fois d'ajouter 1 et de prendre la racine de la somme. Ainsi, $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n} = f(u_n)$ avec $f : x \mapsto \sqrt{1 + x}$.
- On résout pour $x \geq -1$:

$$f(x) = x \Leftrightarrow \sqrt{x + 1} = x$$

Comme $\sqrt{x + 1} \geq 0$, $x \geq 0$ et il suffit de résoudre pour $x \in \mathbb{R}_+$.

Sur $\mathbb{R}_+$, les deux membres de l'inéquation sont positifs ou nuls, d'où

$$\sqrt{x + 1} = x \Leftrightarrow x + 1 = x^2 \Leftrightarrow x^2 - x - 1 = 0$$

L'unique solution de $f(x) = x$ est donc la racine positive de $X^2 - X - 1$, c'est à dire ϕ .

- La fonction f est définie sur $[-1, +\infty[$, et dérivable sur $] - 1, +\infty[$ avec $f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{1 + x}}$.

x	-1	ϕ	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	0	ϕ	$+\infty$

Par récurrence, montrons que $u_n \in [0, \phi]$.

Initialisation : on a déjà $u_1 = 1 \in [0, \phi]$

Hérédité : Soit $n \geq 1$, supposons que $u_n \in [0, \phi]$. Alors $u_{n+1} \in f([0, \phi]) \subset [0, \phi]$, d'où

$$\forall n \geq 1, u_n \in [0, \phi]$$

5. On cherche à résoudre $f(x) - x \geq 0$, c'est à dire

$$\sqrt{1+x} \geq x$$

Pour $x \in [-1; 0]$, on a $x \leq 0$ tandis que $\sqrt{1+x} \geq 0$, donc $f(x) - x \geq 0$ sur $[-1; 0]$

Quand $x \in [0, +\infty[$, les deux membres de l'égalité sont positif, et comme la fonction carré est positive on a

$$\sqrt{1+x} \geq x \Leftrightarrow 1+x \geq x^2 \Leftrightarrow 0 \geq x^2 - x - 1 \geq 0$$

On retrouve le polynôme de départ dont on connaît les racines. Celui ci est négatif (donc $f(x) - x \geq 0$) entre ces racines. En se restreignant à l'intervalle d'étude, $f(x) - x \geq 0$ sur $[1, \phi]$, puis négatif sur $[\phi; +\infty[$.

x	-1	ϕ	$+\infty$
$f(x) - x$		+ 0 -	

Comme pour tout $n \geq 1$, $u_n \in [0, \phi]$ et que pour tout $x \in [0, \phi]$, $f(x) - x \geq 0$, on a $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \geq 0$.

La suite est donc croissante.

6. La suite est croissante et majorée par ϕ , donc elle converge vers une limite $\ell \leq \phi$. De plus, comme $u_{n+1} = f(u_n)$ avec f continue, on a, par passage à la limite, $\ell = f(\ell)$, d'où $\ell = \phi$.

$$\boxed{\lim u_n = \phi}$$

7. On suit l'indication : $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ par définition, et on a vu que $\sqrt{1+\phi} = \phi$, donc

$$\begin{aligned} u_{n+1} - \phi &= \sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi} = \frac{(\sqrt{1+u_n} - \sqrt{1+\phi})(\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi})}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \\ &= \frac{1+u_n - 1 - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \end{aligned}$$

$$\text{Ainsi } |u_{n+1} - \phi| = \left| \frac{u_n - \phi}{\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi}} \right|$$

Or $\sqrt{1+u_n} \geq 1$ et $\sqrt{1+\phi} \geq 1$, donc $\sqrt{1+u_n} + \sqrt{1+\phi} \geq 2$ et finalement

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \left| \frac{u_n - \phi}{2} \right|$$

8. C'est une récurrence facile avec la propriété précédente :

Initialisation : pour $n = 1$, on a, d'après la première question, $|u_1 - \phi| = |1 - \phi| \leq 1 = \frac{1}{2^{1-1}}$

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Supposons que $|u_n - \phi| \leq \frac{1}{2^{n-1}}$, alors

$$|u_{n+1} - \phi| \leq \frac{1}{2} |u_n - \phi| \leq \frac{1}{2} \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^n}$$

La propriété est donc héréditaire et l'inégalité est vérifiée pour tout n .

Remarque : c'est une convergence très rapide....

9. Ce programme calcule les termes successifs de la suite (u_n) jusqu'à ce que n soit assez grand pour avoir $\frac{1}{2^{n-1}} < 10^{-p}$. Il retourne alors $\boxed{u_n}$, qui est donc une approximation à 10^{-p} près de ϕ .