Devoir surveillé n° 5

jeudi 30 février 2025
4 heures · 12h45-16h45

Exercice

Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\pi} \cos\big(x \sin(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note :

$$W_n = \int_0^{\pi} \big(\sin(t)\big)^{2n}\,\mathrm{d}t.$$

1) Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et donner des expressions sous forme d'intégrales de $f'(x)$ et $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

3) Soit une fonction $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2, \quad h(x,t) = \cos(t)\sin\big(x \sin(t)\big).$$

Justifier l'existence de $\dfrac{\partial h}{\partial t}$, puis déterminer $\dfrac{\partial h}{\partial t}(x,t)$ pour tout $(x,t) \in \mathbb{R}^2$.

4) En déduire que f est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x\,y''(x) + y'(x) + x\,y(x) = 0. \qquad (E)$$

5) On suppose qu'il existe une solution de (E) développable en série entière notée $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ de rayon de convergence $R > 0$.

Montrer que $a_1 = 0$ et que pour tout entier $n \geqslant 2$:

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}.$$

6) En utilisant un théorème d'interversion série-intégrale, montrer que f est développable en série entière au voisinage de 0 et exprimer les coefficients du développement de f en fonction des termes de la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

7) Déduire des questions précédentes que f est l'unique solution développable en série entière de (E) vérifiant $f(0) = \pi$.

8) En déduire, pour tout $n \in \mathbb{N}$, une expression de W_n en fonction de n.

Problème

Temps d'attente d'une séquence par un automate

Soit $p \in \,]0,\,1[$. On pose $q = 1 - p$.

On considère un automate qui génère successivement les lettres C ou P jusqu'à obtenir une certaine séquence prédéfinie.

On suppose que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, l'automate génère la n-ième lettre à l'instant n de façon indépendante de toutes les générations précédentes. On suppose également qu'à chaque génération, les lettres P et C ont des probabilités p et q (respectivement) d'être générées. Suivant les parties considérées, on définit différents niveaux que l'automate peut atteindre.

Dans tous les cas, l'automate est initialement au niveau 0. On se propose alors d'étudier l'espérance et de la variance de la variable aléatoire donnant le temps d'attente d'une séquence de caractères prédéfinie. Cette étude sera menée à l'aide de fonctions génératrices, et mobilisera de ce fait la théorie des séries entières.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n » et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

I — Questions de cours

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On rappelle que sa fonction génératrice, notée G_X, est la somme de la série entière :

$$\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{P}(X = n)\,t^n,$$

dont on notera R_X le rayon de convergence.

1) Justifier que $R_X \geqslant 1$. Quelles conséquences immédiates en déduit-on pour la fonction G_X ?

2) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$. Démontrer que X et Y ont même loi si et seulement si il existe un réel $r > 0$ tel que les fonctions G_X et G_Y soient égales sur l'intervalle $]-r, r[$.

3) Soit $t \in \,]-R_X, R_X[$. Justifier que $\mathrm{G}_X(t)$ est égale à l'espérance d'une variable aléatoire, que l'on précisera.

II — Étude d'un cas simple

Dans cette partie, l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 dès qu'il génère la lettre C. Si, en revanche, il génère la lettre P, alors il reste au niveau 0. L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 1. On résume l'expérience par la figure 1 suivante :

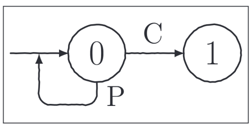

Figure 1

On note Y l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 1. On admet que Y est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$. On note G_Y la fonction génératrice de Y et R_Y son rayon de convergence.

4) Reconnaître la loi de Y et préciser en particulier $\mathrm{P}(Y=n)$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

5) Montrer que $R_Y = \frac{1}{p} > 1$ et que :

$$\forall\, t \in \left]-\tfrac{1}{p}, \tfrac{1}{p}\right[, \quad \mathrm{G}_Y(t) = \frac{q\,t}{1-p\,t}.$$

6) Montrer que G_Y est 2 fois dérivable en 1 et que

$$G_Y'(1) = \frac{1}{q} \quad \text{et} \quad G_Y''(1) = \frac{2p}{q^2}.$$

7) En déduire les valeurs de $\mathrm{E}(Y)$ et de $\mathrm{V}(Y)$.

III — Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\dfrac{1}{a^{n+1}}$.

8) Montrer que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n(a) z^n$ est une série entière de rayon de convergence égal à $|a|$.

9) Montrer que si $|z| < |a|$, on a :

$$\frac{1}{z-a} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n(a) z^n.$$

Soit a, b et λ des nombres complexes non nuls. Dans les questions **Q10** à **Q13**, on suppose que $|a| < |b|$.
On définit, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$v_n = \sum_{k=0}^{n} u_k(a)\, u_{n-k}(b)$$

et pour tout réel t tel que $|t| < |a|$,

$$f(t) = \frac{\lambda\, t^2}{(t-a)(t-b)}.$$

10) Montrer que l'on a :

$$v_n = \frac{1}{a\, b^{n+1}} \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{b-a}\left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right).$$

11) Trouver un équivalent simple de v_n quand n tend vers $+\infty$.

12) En déduire que le rayon de convergence de $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n z^n$ est égal à $|a|$ et que si $|z| < |a|$, alors :

$$\frac{1}{(z-a)(z-b)} = \sum_{n=0}^{+\infty} v_n z^n.$$

13) Justifier que f est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_f tel que $R_f = |a|$.

Soit a, b, c et λ des nombres complexes non nuls.
On suppose que : $\quad |a| \leqslant |b| \leqslant |c|$.
Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on pose :

$$g(t) = \frac{\lambda\, t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}.$$

14) Justifier que g est développable en série entière au voisinage de 0 et que la série entière qui lui est associée possède un rayon de convergence R_g tel que $R_g \geqslant |a|$.

IV — Temps d'attente de la séquence CC

Dans cette partie, l'automate passe du niveau 0 au niveau 1 lorsqu'il génère la lettre C. Depuis le niveau 1, il passe au niveau 2 s'il génère la lettre C. En revanche, s'il génère la lettre P, il retombe au niveau 0 (quel que soit le niveau où il se trouve). L'expérience s'arrête dès que l'automate a atteint le niveau 2, c'est-à-dire dès que l'automate aura généré la séquence CC. On résume l'expérience par la figure 2 suivante :

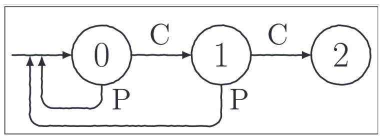

Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, \mathrm{P})$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = \mathrm{P}(Z=n)$.
On note G_Z la fonction génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence.

15) Calculer p_1, p_2 et p_3.

16) Justifier que $(P_1,\ C_1 \cap P_2,\ C_1 \cap C_2)$ est un système complet d'évènements.

17) En déduire que pour tout $n \geqslant 3$, on a :

$$p_n = p\,p_{n-1} + p\,q\,p_{n-2}.$$

18) En déduire que pour tout $t \in [-1, 1]$, on a :

$$\mathrm{G}_Z(t)(1 - p\,t - p\,q\,t^2) = q^2\, t^2.$$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$Q(t) = 1 - p\,t - p\,q\,t^2, \qquad \Delta = p^2 + 4pq > 0,$$
$$a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2pq}.$$

19) Montrer que $\quad Q(-1) = 1 + p^2 > 0$
et que $\quad Q(1) = q^2 > 0$.

20) Montrer que : $\quad \forall\, t \in \mathbb{R},\ Q(t) = -p\,q\,(t-a)(t-b)$.

21) Montrer que $1 < |a| < |b|$.

Pour tout réel t tel que $|t| < |a|$, on définit

$$f(t) = \frac{q^2\, t^2}{1 - p\,t - p\,q\,t^2}.$$

22) Montrer à l'aide de la question **Q13** que f est développable en série entière au voisinage de 0, que sa série entière associée est G_Z et que $R_Z = |a|$.

23) Montrer que :

$$\forall\, t \in \left]-|a|, |a|\right[, \quad \mathrm{G}_Z(t) = \frac{q^2\, t^2}{1 - p\,t - p\,q\,t^2}.$$

24) Montrer que Z admet une espérance et une variance, puis que : $\quad \mathrm{E}(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

25) À l'aide des questions **Q7** et **Q24**, vérifier que $\mathrm{E}(Z) \geqslant \mathrm{E}(Y) + 1$ où Y est la variable aléatoire définie en partie **II**.

26) Retrouver ce résultat par un raisonnement n'utilisant pas l'expression exacte de ces deux espérances.