Devoir surveillé n° 5+

jeudi 20 février 2025
4 heures · 12h45-16h45

Problème

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

On utilisera systématiquement la locution « **variable aléatoire** » pour parler d'une variable aléatoire réelle discrète, et « **variable aléatoire entière** » pour parler d'une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{Z}$.

On introduit deux définitions concernant les variables aléatoires :

Définition (Dispersion d'ordre α)
*On fixe un réel $\alpha > 0$. Soit $X : \Omega \to \mathbb{R}$ une variable aléatoire. On dit que X vérifie la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$ — dite **de dispersion d'ordre α** — lorsque, quand n tend vers $+\infty$,*

$$\mathrm{P}\big(|X| \geqslant n\big) = \frac{\alpha}{n} + \mathrm{O}\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Définition (Variables aléatoires symétriques)
*On dit qu'une variable aléatoire X est **symétrique** lorsque $-X$ suit la même loi que X, autrement dit lorsque :*

$$\forall\, x \in X(\Omega), \quad \mathrm{P}(X = x) = \mathrm{P}(X = -x).$$

On rappelle le *principe de transfert de l'égalité en loi* :

Théorème (Transfert de l'égalité en loi)
Étant donné deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans un même ensemble E, ainsi qu'une application $u : E \to F$, si X et Y suivent la même loi, alors $u(X)$ suit la même loi que $u(Y)$.

Dans tout le sujet, on se donne une suite $(X_n)_{n\geqslant 1}$ de variables aléatoires entières, mutuellement indépendantes, toutes de même loi, symétriques, et vérifiant la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$.

On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k$$

appelée n^{e} moyenne empirique des variables X_k. L'objectif du sujet est d'établir la convergence simple d'une suite de fonctions associées aux variables M_n afin d'obtenir des informations sur la loi de M_n lorsque n est « grand ».

Les deux premières parties du sujet sont totalement indépendantes l'une de l'autre.

Généralités sur les variables aléatoires

1) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Justifier que les variables M_n et X_{n+1} sont indépendantes.

2) Soit X une variable aléatoire. À quelle condition nécessaire et suffisante la variable X est-elle d'espérance finie ? Montrer alors que X est d'espérance finie si et seulement si $|X|$ est d'espérance finie.
Désormais, on pourra noter $X \in \mathrm{L}^1$ pour indiquer que X est d'espérance finie.

3) Soit X une variable aléatoire, que l'on suppose quasiment bornée, c'est-à-dire qu'il existe un réel $M \geqslant 0$ tel que $\mathrm{P}\big(|X| \leqslant M\big) = 1$.
Montrer que X est d'espérance finie.

4) Soit X une variable aléatoire entière vérifiant $(\mathscr{D}_\alpha)$. Montrer que X n'est pas d'espérance finie, et que X^2 non plus.

5) Soient X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction impaire.
Montrer que $f(X)$ est symétrique, et que si $f(X)$ est d'espérance finie, alors $\mathrm{E}\big(f(X)\big) = 0$.

6) Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. En comparant la loi de $(-X, -Y)$ à celle de (X, Y), démontrer que $X + Y$ est symétrique.

Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leqslant 1$. On introduit la fonction :

$$L : \quad t \longmapsto \int_0^t \frac{z}{1 - uz}\,\mathrm{d}u.$$

7) Montrer que, sur le segment $[0, 1]$, la fonction L est convenablement définie et de classe $\mathscr{C}^\infty$. Donner une expression simple de sa dérivée n^{e} pour tout $n \geqslant 1$.

8) Justifier que pour tout $t \in]0, 1]$, on a $1 - t \leqslant |1 - tz|$, et plus précisément encore que $1 - t < |1 - tz|$.

9) En déduire successivement que :

$$\int_0^1 \left|\frac{1-t}{1-tz}\right|^n \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \qquad \text{et que} \qquad \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}}\,\mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

10) En déduire, grâce à une formule de Taylor, que :

$$L(1) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{z^n}{n}.$$

La question suivante fait appel à la théorie des fonctions de deux variables. Vous pouvez admettre ses résultats si vous ne voyez pas comment la traiter.

11) Montrer que la fonction :

$$\gamma: \quad \begin{cases} \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R} \\ (t,u) \longmapsto \left|1+u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| \end{cases}$$

est continue. En déduire qu'il existe, pour tout $a \in \,]\,0,\pi\,[$, un réel $m_a > 0$ tel que :

$$\forall\,(t,u) \in [-a,a\,] \times [\,0,1\,], \quad \left|1+u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right| \geqslant m_a.$$

12) Montrer que la fonction :

$$F: \quad t \in \,]-\pi,\pi[\, \longmapsto \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}{1+u\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}}\,\mathrm{d}u$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et donner une expression de sa dérivée sous la forme d'une intégrale à paramètre.

13) Montrer que :

$$\forall\, t \in \,]-\pi,\pi[\,, \quad F'(t) = -\frac{\tan({}^t/_2)}{2} + \frac{\mathrm{i}}{2}$$

et en déduire la valeur de $F(t)$ pour tout $t \in \,]-\pi,\pi[$.

14) Soit $\theta \in \,]\,0,\,2\pi\,[$.
Déduire des questions précédentes que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos(n\,\theta)}{n} = -\ln\!\left(2\,\sin\!\left(\tfrac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(n\,\theta)}{n} = \frac{\pi-\theta}{2}.$$

Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On étudie dans cette partie une variable aléatoire X fixée, que l'on suppose entière ($X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$) et symétrique.
On pose :

$$\Phi_X: \quad \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto \mathrm{E}\big(\cos(t\,X)\big), \end{cases}$$

appelée **fonction caractéristique de X.**

15) Montrer que Φ_X est bien définie, que c'est une fonction paire et que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \left|\Phi_X(t)\right| \leqslant 1.$$

16) En utilisant le théorème du transfert, montrer que Φ_X est continue.
Indication : il sera justicieux d'écrire $X(\Omega)$ sous forme énumérée : $X(\Omega) = \{x_i\,;\, i \in I\}$, où les x_i sont distincts deux à deux, et où I est ou bien un intervalle entier $[\![1,n]\!]$, ou bien $\mathbb{N}$.

Dans la suite de cette partie, on suppose de plus que X est une variable aléatoire vérifiant la condition $(\mathscr{D}_\alpha)$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose :

$$r_n := \mathrm{P}\big(|X| \geqslant n\big).$$

17) On fixe un réel $t \in \,]\,0,2\pi\,[$. À l'aide notamment de la question 14, montrer que la série $\sum\limits_{n\geqslant 1} r_n \cos(n\,t)$ est convergente.

18) Toujours pour un réel $t \in \,]\,0,2\pi\,[$, montrer successivement que :

$$\Phi_X(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} (r_n - r_{n+1}) \cos(n\,t)$$

puis que :

$$\Phi_X(t) = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \Big[\cos\big(n\,t\big) - \cos\big((n-1)\,t\big)\Big].$$

19) Montrer qu'il existe un nombre réel C tel que :

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(r_n - \frac{\alpha}{n}\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}nt} \xrightarrow[t\to 0^+]{} C,$$

et en déduire que, quand t tend vers 0^+,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} r_n \cos(n\,t) = \mathrm{O}\big(\ln(t)\big) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{+\infty} r_n \sin(n\,t) = \frac{\pi\,\alpha}{2} + \mathrm{o}(1).$$

20) Conclure que, quand t tend vers 0^+,

$$\Phi_X(t) = 1 - \frac{\pi\,\alpha}{2}\,t + \mathrm{o}(t).$$

La fonction Φ_X est-elle dérivable en 0 ?

Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

21) Soient X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Montrer que :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t)\,\Phi_Y(t).$$

22) Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, la variable M_n est symétrique, et :

$$\forall\, t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}\left(\tfrac{t}{n}\right)\right)^n.$$

23) En déduire que pour tout réel t,

$$\Phi_{M_n}(t) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \exp\left(-\frac{\pi\,\alpha\,|\,t\,|}{2}\right).$$

24) La convergence établie à la question précédente est-elle uniforme sur $\mathbb{R}$?

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n\geqslant 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi\alpha}{2}$, ce qui signifie que pour tout segment $[\,a,b\,]$ de $\mathbb{R}$,

$$\mathrm{P}(a \leqslant M_n \leqslant b) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{\alpha}{2}\int_a^b \frac{\mathrm{d}u}{u^2 + \left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)^2}.$$

— FIN DU PROBLÈME —