

CONCOURS COMMUN INP - ÉPREUVE SPÉCIFIQUE - FILIÈRE PSI

N.B. : le candidat attachera la plus grande importance à la clarté, à la précision et à la concision de la rédaction. Si un candidat est amené à repérer ce qui peut lui sembler être une erreur d'énoncé, il le signalera sur sa copie et devra poursuivre sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il a été amené à prendre.

RAPPEL DES CONSIGNES

- Utiliser uniquement un stylo noir ou bleu foncé non effaçable pour la rédaction de votre composition; d'autres couleurs, excepté le vert, peuvent être utilisées, mais exclusivement pour les schémas et la mise en évidence des résultats.
- Ne pas utiliser de correcteur.
- Écrire le mot FIN à la fin de votre composition.

Les calculatrices sont interdites

Le sujet est composé de six parties.

Partie I - Conducteur ohmique

Conducteur ohmique cylindrique en régime stationnaire

On considère (**figure 1**) un conducteur ohmique cylindrique, de conductivité électrique γ , de section S et de longueur h parcouru par un courant électrique constant et uniformément réparti de vecteur densité volumique de courant : $\vec{j} = j\vec{e}_y$.

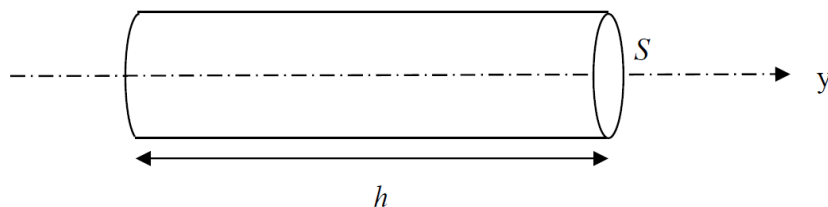


Figure 1 - Conducteur cylindrique

Q1. Rappeler la formulation locale de la loi d'Ohm en faisant intervenir d'abord le champ électrique $\vec{E}$ puis le potentiel électrique V . Donner un ordre de grandeur de la conductivité électrique du cuivre à température ambiante.

Q2. Proposer simplement une loi analogue appartenant à un autre domaine de la physique et préciser les unités de toutes les grandeurs qui interviennent.

Q3. Donner, en fonction de γ , j et des caractéristiques géométriques du conducteur, les expressions du courant électrique I traversant ce conducteur (en prenant la flèche de I dans le sens de Oy) et de la différence de potentiel $U = V_A - V_B$ (avec $y_B = y_A + h$) aux bornes de ce conducteur.

Q4. En déduire en fonction de γ et des caractéristiques géométriques, la résistance électrique R_Ω de ce conducteur.

Conducteur ohmique parallélépipédique, semi-infini, en régime sinusoïdal et effet de peau

On considère (**figure 2**) un conducteur ohmique, parallélépipédique, semi-infini suivant $\vec{e}_x$, de hauteur h suivant $\vec{e}_y$ et d'épaisseur p suivant $\vec{e}_z$. On se place en régime quasi-permanent dans lequel la densité de courant dépend de x et du temps : $\vec{j}(x, t) = j(x, t)\vec{e}_y$.

On admet alors que $j(x, t)$ vérifie l'équation : $D \frac{\partial^2 j(x, t)}{\partial x^2} = \frac{\partial j(x, t)}{\partial t}$

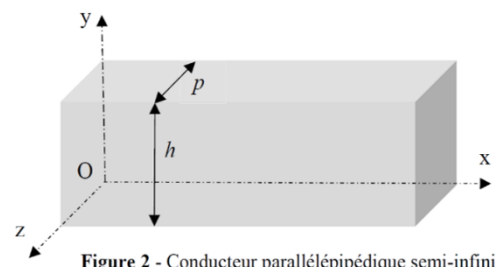


Figure 2 - Conducteur parallélépipédique semi-infini

Q5. Comment nomme-t-on ce type d'équation ? Préciser l'unité de D .

On admettra dans la suite de cette partie que $\vec{j}(x, t) = j_0 e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) \vec{e}_y$ où $\delta = \sqrt{\frac{2}{\mu_0 \gamma \omega}}$. μ_0 est la perméabilité magnétique du vide et ω la pulsation imposée par le courant.

Q6. Définir, à l'aide d'une intégrale double, l'expression de l'intensité instantanée $i(t)$ du courant transporté par ce conducteur (avec la flèche de $i(t)$ orientée dans le sens de Oy).

On donne une primitive : $F(u) = -\frac{\delta}{\sqrt{2}} e^{-u/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4} - \frac{u}{\delta}\right)$ de la fonction $f(u) = e^{-u/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{u}{\delta}\right)$

En déduire l'expression de la valeur efficace I_{eff} de ce courant en fonction de p , j_0 et δ .

Q7. Rappeler l'expression de la puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique. L'intégration de cette grandeur sur le volume du conducteur, non demandée ici, permet de déterminer l'expression de la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans ce conducteur : $P_{Joule} = \frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma}$.

Exprimer la résistance du conducteur en fonction de h , p , δ et γ et interpréter la dénomination « épaisseur de peau » associée à la grandeur δ .

Dans les questions suivantes, on considère le conducteur parcouru par un courant sinusoïdal de valeur efficace I_{eff} fixée.

Q8. Que peut-on dire de P_{Joule} dans le cas d'une conductivité infinie ? D'une conductivité nulle ?

Q9. Comparer P_{Joule} à haute et à basse fréquences. La résistance du conducteur dépend de la fréquence f suivant la loi : $R(f) = R(f_0) \left(\frac{f}{f_0}\right)^\alpha$, où f_0 est une fréquence de référence quelconque.

Déterminer la valeur de l'exposant α .

Partie II - Commande d'un moteur à courant continu

Dans un moteur à courant continu (M.C.C.), la force électromotrice (f.e.m.) induite est proportionnelle à la vitesse de rotation de la machine. La source d'énergie est généralement une source de tension constante notée U_0 . Il convient donc de l'associer à un convertisseur statique pour pouvoir faire varier la vitesse de rotation de la machine.

Q10. Un étudiant E1 propose d'intercaler, entre la source de tension continue U_0 et le M.C.C., un pont diviseur de tension résistif composé d'une résistance R_1 et d'une résistance R_2 variable (**figure 5**).

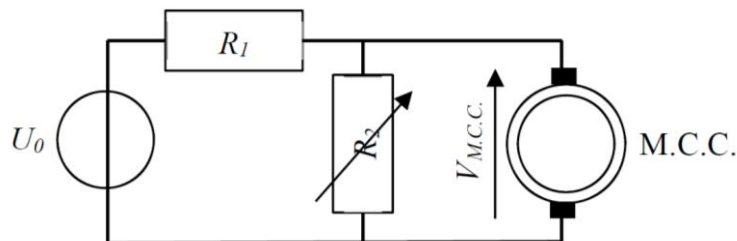


Figure 5 - Pont diviseur résistif

Exprimer, en supposant l'impédance de la M.C.C. grande devant la résistance R_2 , la tension $V_{M.C.C.}$, aux bornes de la M.C.C., en fonction de U_0 , de R_1 et de R_2 .

Q11. Un étudiant E2 suggère d'utiliser un amplificateur linéaire qui fonctionne en comparateur, de façon à délivrer sur une période T de hachage (**figure 7**) une tension hachée U_1 d'amplitude $+V_{sat}$ pour $t \in [0; \alpha T]$ et d'amplitude $-V_{sat}$ pour $t \in [\alpha T; T]$.

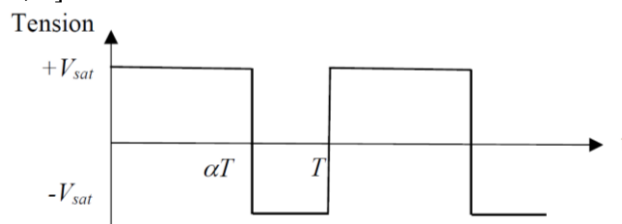


Figure 7 - Tension hachée U_1

Déterminer en fonction de α et de V_{sat} , la valeur moyenne V_{moy} de la tension hachée U_1 .

Q12. Présenter les avantages et les inconvénients de ces deux propositions en une dizaine de lignes au maximum.

Industriellement, la source de tension continue d'amplitude U_0 est connectée à la M.C.C. par l'intermédiaire d'un hacheur. On considère ici un hacheur série (**figure 8**), comprenant deux composants de puissance : un transistor T et une diode D.

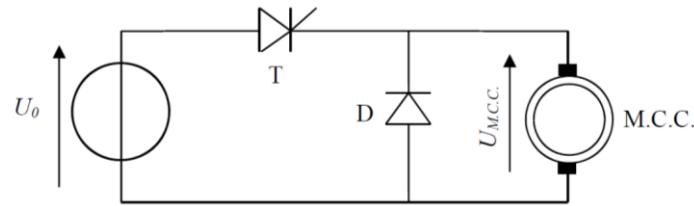


Figure 8 - Montage avec hacheur série

Le transistor est utilisé en commutation par l'intermédiaire d'une tension de commande V_{com} . On désire obtenir la tension hachée U_2 , représentée sur la **figure 9**. On note α' le rapport cyclique du hacheur et f_h la fréquence de hachage ($f_h = \frac{1}{T_h}$).

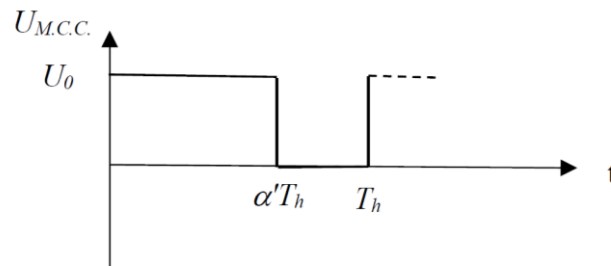


Figure 9 - Tension hachée U_2

Pour faire simple, on admettra que le transistor est passant lorsque $V_{com} = +15V$ et qu'il est bloqué lorsque $V_{com} = -15V$. On s'intéresse ici au circuit électronique qui permet de générer la tension de commande V_{com} du hacheur série. Dans tout le sujet, les amplificateurs linéaires (A.Li.) sont supposés d'impédance d'entrée infinie et d'impédance de sortie nulle. En mode linéaire, leur gain est considéré comme infini. On note $\pm V_{sat}$ leur tension de saturation, avec $V_{sat} = 15V$. On considère le circuit de commande de la **figure 10**. La résistance R_3 est une résistance variable, les deux autres résistances sont de valeurs fixes.

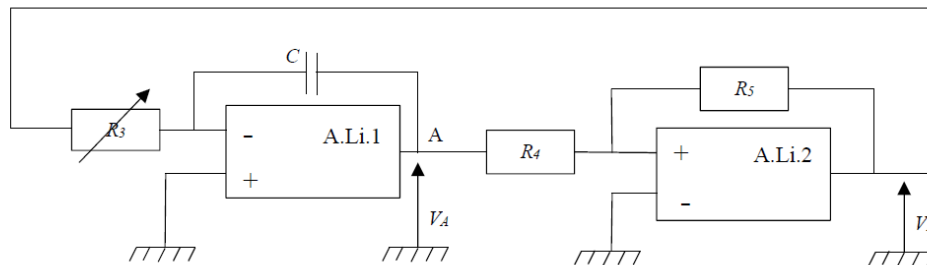


Figure 10 - Circuit de commande du hacheur

- Q13.** Préciser pour chacun des amplificateurs linéaires, s'il fonctionne, *a priori*, en régime linéaire ou saturé.
- Q14.** Déterminer, en fonction de R_3 et C , la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{V_A}{V_B}$ du montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.1. Quelle est la fonction réalisée par cette partie du montage ?
- Q15.** Quelle fonction réalise le montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.2. ?
- Q16.** On suppose que $V_A(t = 0) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$. En veillant à indiquer toutes les informations nécessaires, tracer sur un même graphe, l'allure des deux tensions V_A et V_B en fonction du temps. Comment sont modifiées ces tensions lorsqu'on augmente la résistance R_3 ?

Dans la suite du sujet, on suppose $R_5 = 2R_4$.

Q17. On connecte le point A du circuit précédent (**figure 10**) au point C du circuit décrit sur la **figure 11**. Un potentiomètre relié à un ensemble de deux condensateurs et une source de tension constante $V_m = 15V$, permettent d'imposer le potentiel de l'entrée non inverseuse de l'amplificateur linéaire A.Li.3. On a ainsi : $V^+ = \beta V_m$.

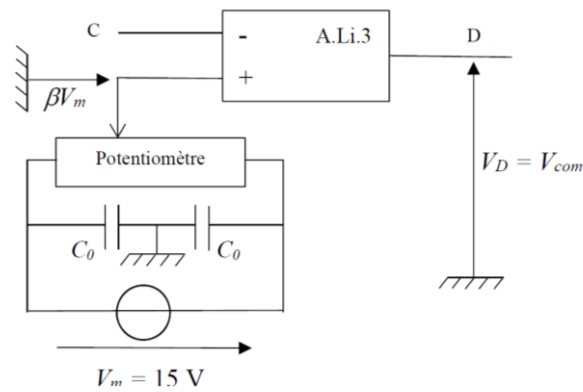


Figure 11 - Circuit supplémentaire

Sur quel intervalle varie la grandeur β ? Dessiner l'allure de la tension $V_D(t)$ dans les deux cas correspondant à $\beta = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$.

Q18. La tension $V_D(t)$ est utilisée pour commander le transistor du hacheur série qui alimente la M.C.C., on a ainsi : $V_{com}(t) = V_D(t)$. Préciser les relations qui relient la fréquence de hachage f_h et le rapport cyclique α' du hacheur aux différents éléments présents dans les circuits électroniques représentés sur les **figures 10 et 11**.

Partie III - Aspects thermiques

En cours de fonctionnement, un transistor dissipe de l'énergie, il se comporte comme une source de chaleur de puissance $P_s(t)$. Il est encapsulé dans un boîtier (**figure12**) que l'on supposera ici en contact avec le milieu atmosphérique. On note C_t la capacité thermique du transistor et C_b celle du boîtier. La conductance thermique transistor-boîtier est notée G_{tb} et celle du boîtier-extérieur est notée G_{be} . Les températures du transistor et du boîtier sont respectivement notées $T_t(t)$ et $T_b(t)$. La température de l'extérieur notée T_{ext} est constante.

Q19. Rappeler brièvement le lien qui existe entre une résistance thermique et une conductance thermique. Préciser l'unité d'une conductance thermique.

Q20. En faisant un bilan thermique sur le transistor, écrire l'équation différentielle reliant $P_s(t)$, $T_t(t)$, $T_b(t)$, C_t et G_{tb} .

Q21. En faisant un bilan thermique sur le boîtier, écrire l'équation différentielle reliant $T_b(t)$, T_{ext} , C_b , G_{tb} et G_{be} .

Q22. Une analogie thermique-électrique permet de construire le schéma électrique équivalent suivant (**figure13**).

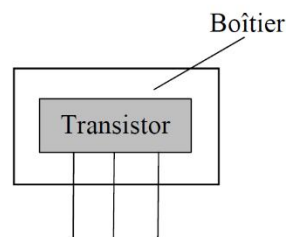


Figure 12 - Transistor et boîtier

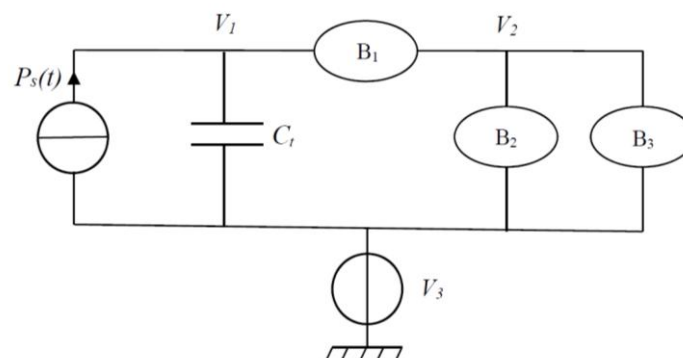


Figure 13 - Schéma électrique équivalent

Remplacer les bulles B_1 , B_2 et B_3 par les éléments électrocinétiques adéquats. Préciser à quoi correspondent les potentiels V_1 , V_2 et V_3 .

Pour favoriser les échanges thermiques avec le milieu extérieur, les différents composants de l'électronique de puissance (diodes, transistors) sont généralement montés sur des radiateurs (**figure 14**).

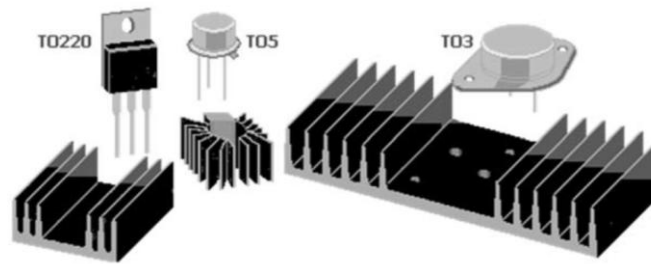


Figure 14 - Composants et radiateurs

On se propose ici de dimensionner la taille d'une ailette de refroidissement appartenant à l'un de ces radiateurs. L'ailette (**figure 15**) est assimilée à un parallélépipède d'épaisseur $e = 2\text{mm}$, de largeur $b = 10\text{cm} \gg e$ et de longueur $a = 20\text{cm}$.

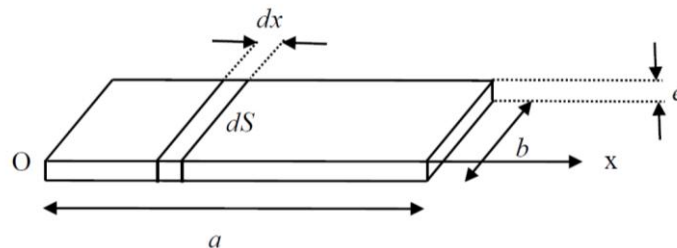


Figure 15 - Ailette de refroidissement

On se place en régime stationnaire, la température sur la face de l'ailette située en $x = 0$ est $T_0 = 65^\circ\text{C}$, la température de l'air ambiant est $T_a = 15^\circ\text{C}$. Le transfert thermique conductif est supposé unidimensionnel dans la direction de l'axe Ox . Il obéit à la loi de Fourier. La conductivité thermique de l'ailette est : $\lambda = 16\text{ W}\cdot\text{m}^{-1}\text{K}^{-1}$. Le transfert thermique de l'ailette vers l'air ambiant est tel que la puissance thermique échangée par la surface latérale dS d'un élément de longueur dx est de la forme $dP = h(T(x) - T_a)dS$ où h est une constante de valeur numérique : 160SI.

Q23. Quelle est l'unité de h ? Pourquoi est-il nécessaire, pour notre étude, de décomposer le transfert thermique entre l'ailette et l'air ambiant en éléments infinitésimaux de longueur dx ?

Q24. Établir l'équation différentielle vérifiée par $T(x)$ en faisant apparaître une longueur caractéristique L qui s'exprime en fonction de λ , e et h . Calculer puis comparer les valeurs de L et a . **Q25.** Expliquer pourquoi on peut considérer a comme infinie, puis déterminer le profil de température $T(x)$.

Q26. Exprimer en fonction de T_0 , T_a , b , h , λ et e la puissance thermique totale évacuée par l'ailette. Peut-on réduire la longueur de l'ailette sans diminuer sensiblement son efficacité ? Si oui, proposer une nouvelle longueur notée a' . Commenter la forme des radiateurs apparaissant sur la **figure 14**.

Partie IV - Le funiculaire

Un funiculaire (**figure 16**) est un moyen de transport en site propre. Il se compose généralement de deux rames circulant sur des rails en pente et dont la traction est assurée par un câble pour s'affranchir de la déclivité du terrain. Il est utilisé comme transport en commun, notamment en milieu urbain, pour la desserte d'un territoire communal au relief difficile. On le retrouve également dans certaines stations de montagne.

Les rames sont reliées par un ou plusieurs câbles. Le travail du poids de la rame descendante compense tout ou partie du travail du poids de la rame montante. L'énergie à fournir pour la traction reste ainsi relativement faible. Le moteur électrique actionnant le câble permet de fournir la puissance perdue par le frottement des roues sur les rails, celle perdue dans le système poulie-câble ainsi que celle, éventuellement nécessaire, pour vaincre la différence de



Figure 16 - Funiculaire

poids entre les deux rames. On considère un funiculaire motorisé par une M.C.C. dont les caractéristiques principales techniques sont regroupées dans le **tableau 2**.

Dénivelé :	250 m
Pente* maximale :	30 %
Longueur développée :	1 000 m
Débit de montée :	1 500 personnes par heure
Vitesse d'exploitation :	$2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$

Tableau 2 - Caractéristiques du funiculaire

* La pente est définie comme le rapport $\frac{dl}{dh}$, où dl correspond à une petite longueur de voie et dh la petite différence d'altitude correspondante.

Les puissances électriques consommées lorsque les deux rames sont toutes les deux pleines ou toutes les deux vides sont très peu différentes et considérées toutes les deux égales à 4kW.

Q27. Estimer, en prenant les initiatives qui s'imposent, la puissance électrique consommée lorsque la rame de montée est pleine et la rame de descente demi-pleine.

Q28. Que pensez-vous de l'utilisation d'un hacheur série pour alimenter le M.C.C. du funiculaire ? Vous explicitez en particulier le cas où la rame de descente est pleine et la rame de montée peu chargée et vous proposerez une ou des solution(s) pour récupérer l'énergie dans cette configuration.

Partie V - Chlore et eau de Javel

Classification périodique des éléments

Q29. À quelle période et quelle colonne appartiennent les éléments ${}_{11}^{23}\text{Na}$ et ${}_{17}^{35,5}\text{Cl}$?

Préciser la configuration électronique du chlore dans son état fondamental.

Q30. À quelle famille ou groupe appartient le sodium ? Le chlore ? Citer deux autres éléments appartenant à la même famille que le chlore.

Solubilité du chlorure de sodium en solution aqueuse

On appelle solubilité d'une espèce la quantité maximale de cette espèce initialement solide qu'on peut dissoudre dans un litre d'eau. Cette quantité est maximale lorsqu'il reste à l'équilibre une partie du solide non dissoute. La solubilité est notée s et s'exprime usuellement en $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$.

On se propose de déterminer expérimentalement la solubilité du chlorure de sodium en solution aqueuse à température ambiante.

Dans un bécher contenant 100 mL d'eau, on ajoute environ 60 g de chlorure de sodium. Bien qu'on agite suffisamment longtemps, il reste une partie du solide qui ne s'est pas dissout. On filtre et on récupère le filtrat qu'on dilue au millièmes. La mesure de la conductance de cette solution diluée donne $G = 780 \mu\text{S}$.

On a réalisé par ailleurs la courbe d'étalonnage $G = f(C)$ pour différentes solutions de chlorure de sodium (**figure 17**), avec C la concentration exprimée en $\text{mmol} \cdot \text{L}^{-1}$.

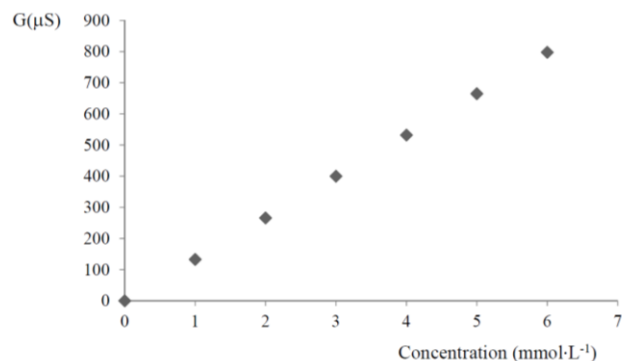


Figure 17 - Courbe d'étalonnage

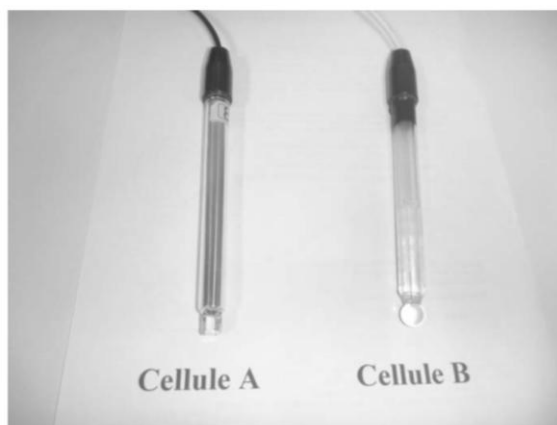


Figure 18 - Cellules

Q31. De quoi dépend la conductivité électrique d'une solution ? Laquelle des deux cellules A ou B, photographiée (**figure 18**) est associée au conductimètre ? À quel type de mesure peut servir l'autre cellule ?

Q32. Déterminer la solubilité s du chlorure de sodium à température ambiante.

Diagramme potentiel -pH (E-pH) du chlore et de l'iode

Les espèces prises en compte dans les diagrammes E-pH du chlore et de l'iode (**figure 19**) sont respectivement $HClO$, Cl^- , ClO^- , $Cl_{2(aq)}$ et $I_{2(aq)}$, IO_3^- , I^- .

Ces diagrammes sont construits pour une concentration totale en espèce dissoute de $0,1 \text{ mol.L}^{-1}$.

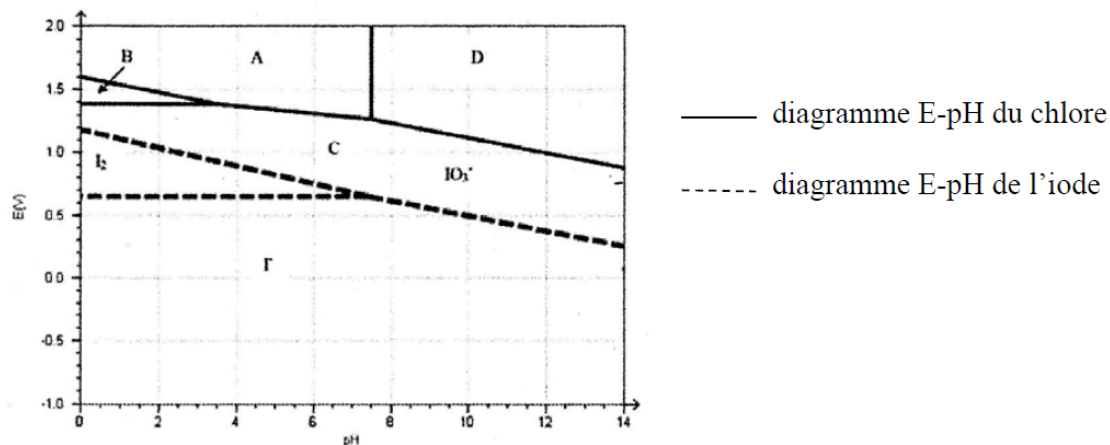


Figure 19 - Diagrammes E-pH du chlore et de l'iode

Q33. Préciser le nombre d'oxydation du chlore dans chacune des espèces considérées. Associer à chacun des domaines (A, B, C, D) une espèce chimique du chlore.

Dosage d'une eau de Javel

Une eau de Javel est une solution basique supposée équimolaire de Cl^- et ClO^- . On désire vérifier, à l'aide d'un dosage, la concentration C_0 en Cl^- ou ClO^- d'un produit commercial.

Rappels

On rappelle que le diiode est soluble dans l'eau en présence d'une quantité suffisante d'iodure de potassium et prend alors une couleur jaune brunâtre. Il forme en présence d'empois d'amidon un complexe de couleur bleue.

Attention le dichlore gazeux est un produit dangereux.

Protocole

Étape 1 : on dilue d'un facteur 100 le produit commercial. On prélève ensuite un volume V_{init} de solution diluée.

Étape 2 : on ajoute de l'iodure de potassium (K^+ , $-$) en excès.

Étape 3 : on acidifie la solution en ajoutant quelques gouttes d'une solution d'acide chlorhydrique concentrée. La solution prend alors une couleur jaune brunâtre.

Étape 4 : on ajoute une faible quantité d'empois d'amidon pour que le dosage ne soit pas perturbé. La solution est alors de couleur bleue intense.

Étape 5 : on dose alors la solution par une solution de thiosulfate de sodium ($2Na^+$, $S_2O_3^{2-}$) de concentration connue C_1 . On note V_{eq} le volume de thiosulfate versé à l'équivalence, repéré par le changement de couleur.

Q34. Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 2. Pourquoi faut-il mettre de l'iodure de potassium en excès ?

Q35. Écrire l'équation bilan de la réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 3. Quel nom porte cette équation d'oxydo-réduction ?

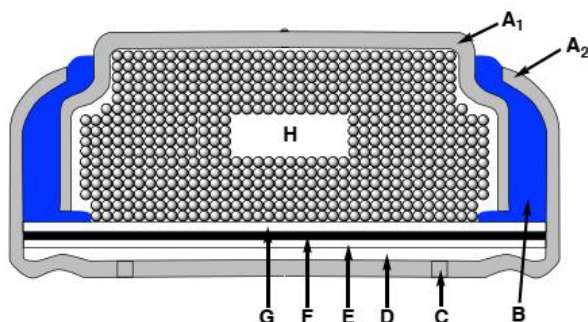
Q36. Pourquoi ne fallait-il pas acidifier la solution avant l'ajout de l'iodure de potassium ?

Q37. Écrire l'équation bilan de la réaction qui a lieu avec le thiosulfate de sodium.

Q38. Déterminer la concentration C_0 en fonction de V_{init} , V_{eq} et C_1 .

Partie VI -Piles zinc-air

Les piles zinc-air sont des accumulateurs tirant leur énergie de l'oxydation du zinc avec le dioxygène de l'air ambiant (Figure 1). Ces piles possèdent de hautes densités énergétiques et sont peu chères. Leur format varie des piles boutons pour les audioprothèses à des formats intermédiaires, pouvant être utilisés dans des appareils tels les caméras, jusqu'aux grands formats utilisables dans les véhicules électriques.

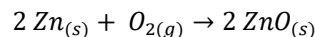


A₁ et A₂ : revêtements métalliques, B : joint isolant, C : orifice d'entrée d'air, D : membrane semi-perméable, E : dioxygène (air), F : membrane hydrophobe, G : séparateur, H : poudre de zinc et électrolyte (solution gélifiée de potasse).

Caractéristiques :

Force électromotrice : $e \approx 1,6 \text{ V}$.

Réaction de fonctionnement :



Masse de zinc dans la pile : 0,65 g.

Masse de la pile : 1,0 g.

Intensité de fonctionnement : 0,80 mA.

Tension de fonctionnement : 1,5 V.

Figure 1. Schéma et caractéristiques d'une pile bouton zinc-air.

- Q39-** Identifier l'anode et la cathode de cette pile et déterminer la polarité de la pile. Justifier.
- Q40-** Calculer la force électromotrice standard e° de cette pile à partir des valeurs des potentiels standards E° des couples redox.
- Q41-** Calculer l'enthalpie libre standard $\Delta_r G^\circ$ de la réaction de fonctionnement de la pile à 298 K en utilisant les grandeurs thermodynamiques fournies (Annexe 3). En déduire la valeur de la constante K° de cette même réaction. Conclure.
- Q42-** Calculer la valeur de la force électromotrice standard à l'aide de la valeur de $\Delta_r G^\circ$.
- Q43-** Calculer la durée théorique pendant laquelle cette pile peut fonctionner sans être déchargée.
- Q44-** Calculer l'énergie que peut fournir cette pile.

Annexes

Annexe 1. Constantes usuelles et approximations de calcul.

Constante de Faraday : $\mathcal{F} \approx 10^5 \text{ C} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Constante d'Avogadro : $\mathcal{N}_a \approx 6.10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R \approx 8 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Approximations : $\sqrt{3} \approx 1,8$ et $\sqrt{2} \approx 1,4$.

Annexe 2. Données numériques.

Volume molaire d'un gaz parfait à $T = 25^\circ\text{C}$ et $P = 1 \text{ bar}$: $V_m = 24 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Numéro atomique : $Z(\text{B}) = 5$; $Z(\text{Fe}) = 26$ et $Z(\text{Ti}) = 22$.

Rayons métalliques : $R(\text{Fe}) = 125 \text{ pm}$ et $R(\text{Ti}) = 145 \text{ pm}$.

Rayon atomique de l'hydrogène : $R(\text{H}) = 35 \text{ pm}$.

Masses molaires : $M(\text{Zn}) = 65 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$; $M(\text{glucose}) = 180 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Annexe 3. Données thermodynamiques à 298 K (valeurs arrondies).

	$\text{Zn}_{(s)}$	$\text{O}_{2(g)}$	$\text{ZnO}_{(s)}$	$\text{H}_2\text{O}_{(l)}$
$\Delta_f H^\circ (\text{kJ} \cdot \text{mol}^{-1})$	0	0	-350	-300
$S^\circ (\text{J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1})$	40	200	40	70

Potentiels redox standards à $\text{pH} = 0$: $E^\circ(\text{O}_2/\text{H}_2\text{O}) = 1,23 \text{ V}$; $E^\circ(\text{ZnO}/\text{Zn}) = -0,43 \text{ V}$; $E^\circ(\text{S}_4\text{O}_6^{2-}/\text{S}_2\text{O}_3^{2-}) = 0,08 \text{ V}$.

FIN .