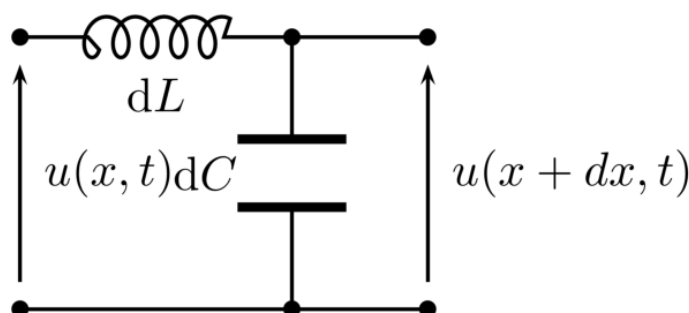


Compléments sur les ondes : exemple d'onde électrocinétique et mécanique

I Ondes dans une ligne électrique, impédance caractéristique

Une ligne électrique à constantes réparties est modélisée comme sur la figure ci-dessous, un élément de longueur dx de ligne comportant une inductance propre $dL = \Lambda dx$ et une capacité $dC = \Gamma dx$. L'ensemble est parcouru par des courants harmoniques de pulsation ω . On note $i(x, t)$ et $i(x + dx, t)$ les intensités dans la ligne aux abscisses respectives x et $x + dx$. L'impédance totale de la ligne située au-delà de l'abscisse x , vue depuis le point d'abscisse x , sera donc $Z_l(x) = \frac{u(x)}{i(x)}$.

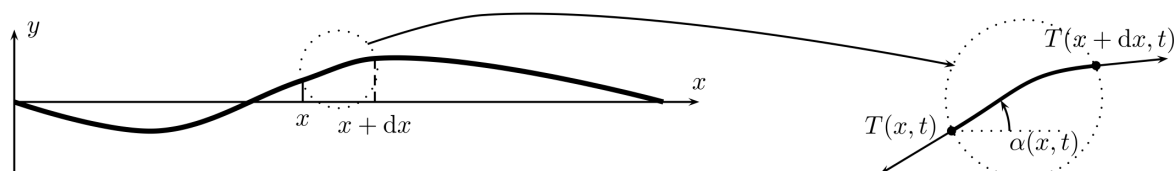


On notera encore $c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}$ et $Z_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}$

1. Écrire les relations différentielles entre u et i .
2. Établir l'équation de propagation (c'est une équation de d'Alembert).
3. Justifier que les solutions de l'équation de propagation peuvent être mises sous la forme suivante : $i = i_0 \exp(j(\omega t - kx)) + i_1 \exp(i(\omega t + kx))$ et $u = \rho i_0 \exp(j(\omega t - kx)) - \rho i_1 \exp(i(\omega t + kx))$
Calculer ρ et la vitesse de propagation des signaux dans la ligne. Que représentent chacun des deux termes présents dans les expressions de i et u ?
4. L'extrémité de la ligne de longueur d est fermée sur une impédance Z . Calculer $i(x, t)$ et $u(x, t)$ en fonction de i_0 , ρ , Z , ω , k et d .
5. Calculer $Z_l(x)$. Pour quelle valeur particulière de Z , appelée impédance caractéristique, $Z_l(x)$ est-elle indépendante de x ? Dans ce cas, que peut-on observer dans les expressions de $i(x, t)$ et $u(x, t)$?

II Ondes transverses dans une corde vibrante

On étudie (fig. ci-dessous) les oscillations transverses d'une corde élastique tendue, de masse linéique λ (masse par unité de longueur). Au repos, cette corde est confondue avec l'axe (Ox). On étudie des oscillations dans le plan (Oxy) en négligeant le poids. À l'instant t , on note $T(x, t)$ la tension de la corde à l'abscisse x et $\alpha(x, t)$ l'angle fait par la corde avec l'axe (Ox).



On supposera $|\alpha(x, t)| \ll 1$ rad. Les oscillations d'un brin de corde d'abscisse x sont décrites par $y(x, t)$.

1. Relier $\alpha(x, t)$ et une dérivée de $y(x, t)$.

Par projection du principe fondamental de la dynamique, montrer que $T(x, t)$ ne dépend pas de x . Cette force est donc égale à la tension T_0 imposée à la corde à ses deux extrémités ; on la supposera indépendante du temps dans la suite.

2. Quelles sont l'unité de mesure et l'interprétation physique de la grandeur $f(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$?

Mêmes questions pour la grandeur $p(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial y}{\partial t}$.

3. Montrer l'équation de propagation $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$ et établir l'expression de c en fonction de λ et T_0 . Quelle est la forme générale des solutions de cette équation ?

4. On note $\epsilon_c(x, t) = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2$ et $\epsilon_p(x, t) = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$. Dans quelles unités ces grandeurs se mesurent-elles ? Trouver une relation simple entre $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial \epsilon_c}{\partial t}$ et $\frac{\partial \epsilon_p}{\partial t}$. Proposer une interprétation physique.

5. On considère une onde transverse de représentation complexe $y(x, t) = u_0 \exp i(\omega t - kx)$ avec $k > 0$. Exprimer k et les valeurs moyennes $\langle p \rangle$, $\langle \epsilon_c \rangle$ et $\langle \epsilon_p \rangle$. En déduire une expression de la vitesse de transport de l'énergie mécanique le long de la corde.