

Corrigé du devoir surveillé n° 5 (v1)

Exercice

CCINP PSI 2023, exercice 1

Fonction de Bessel

Soit une fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note : $W_n = \int_0^\pi (\sin(t))^{2n} dt$.

- 1) Pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto \cos(x \sin(t))$ est continue sur le segment $[0, \pi]$, donc l'intégrale définissant $f(x)$ existe et c'est un réel.

Conclusion : La fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ est bien définie.

- 2) Introduisons la fonction $g : [0, \pi] \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$
 $(t, x) \mapsto \cos(x \sin(t)).$

de sorte que : $\forall x \in \mathbb{R}, f(x) = \int_0^\pi g(t, x) dt.$

Appliquons le théorème de dérivation itérée sous le signe intégrale :

- * Pour tout $t \in [0, \pi]$ fixé, la fonction $x \mapsto g(t, x) = \cos(x \sin(t))$ est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \frac{\partial g}{\partial x}(t, x) = -\sin(t) \sin(x \sin(t)),$$

$$\text{et} \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) = -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

- * Pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$, les fonctions $t \mapsto \frac{\partial^k g}{\partial x^k}(t, x)$ sont c.p.m. (car continues) sur $[0, \pi]$.
- * Pour tout $x \in \mathbb{R}$, les fonctions $t \mapsto g(t, x)$ et $t \mapsto \frac{\partial g}{\partial x}(t, x)$ sont automatiquement intégrables sur $[0, \pi]$ car c'est un segment.
- * Dominons la dérivée seconde :

$$\forall t \in [0, \pi], \quad \left| \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(t, x) \right| = \left| -\sin^2(t) \cos(x \sin(t)) \right|$$

$$\forall x \in \mathbb{R} : \quad = \sin^2(t) \left| \cos(x \sin(t)) \right| \leq 1,$$

et la fonction $\phi : t \mapsto 1$ est intégrable sur $[0, \pi]$ car elle est **constante** et que l'intervalle est **borné**.

Le théorème s'applique ; on obtient que $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = - \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$$

$$\text{et} \quad f''(x) = - \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt.$$

- 3) Soit $h : (x, t) \in \mathbb{R}^2 \mapsto \cos(t) \sin(x \sin(t)) \in \mathbb{R}$.

Pour $x \in \mathbb{R}$ fixé, la fonction $t \mapsto \cos(t) \sin(x \sin(t))$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, ce qui prouve que $\frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ existe pour tout $(x, t) \in \mathbb{R}^2$. Cette dérivée partielle vaut :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2 : \quad \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) = \frac{\partial}{\partial t} \left(\cos(t) \sin(x \sin(t)) \right)$$

$$= -\sin(t) \cdot \sin(x \sin(t)) + \cos(t) \cdot \frac{\partial}{\partial t} \left(\sin(x \sin(t)) \right)$$

$$= -\sin(t) \sin(x \sin(t)) + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)).$$

- 4) Montrons que f est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y''(x) + y'(x) + x y(x) = 0. \quad (E)$$

Pour cela, injectons dans l'équation les expressions des dérivées de f obtenues en **Q??** dans l'équation. **Fixons $x \in \mathbb{R}$:**

$$x f''(x) + f'(x) + x f(x)$$

$$= -x \int_0^\pi \sin^2(t) \cos(x \sin(t)) dt - \int_0^\pi \sin(t) \sin(x \sin(t)) dt$$

$$+ x \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt.$$

$$= \int_0^\pi \left(-\sin(t) \sin(x \sin(t)) dt + x (1 - \sin^2(t)) \cos(x \sin(t)) \right) dt$$

$$= \int_0^\pi \left(-\sin(t) \sin(x \sin(t)) dt + x \cos^2(t) \cos(x \sin(t)) \right) dt$$

$$= \int_0^\pi \frac{\partial h}{\partial t}(x, t) dt \quad \text{d'après Q??}.$$

À x fixé, $t \mapsto \frac{\partial h}{\partial t}(x, t)$ est la dérivée de la fonction partielle $t \mapsto h(x, t)$.
On en déduit :

$$\begin{aligned} x f''(x) + f(x) + x f(x) \\ &= \left[h(x, t) \right]_{t=0}^{t=\pi} = h(\pi, x) - h(\pi, 0) = \cos(\pi) \sin(0) - \cos(0) \sin(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Conclusion : La fonction f est solution de l'équation différentielle :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad x y''(x) + y(x) + x y(x) = 0.$$

- 5) Supposons que y soit la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$, de rayon $R > 0$, et que y soit solution de (E).

On peut dériver terme à terme sur l'ouvert de convergence $I :=]-R, R[$:

$$\forall x \in I, \quad y(x) = \sum_0^\infty a_n x^n, \quad y'(x) = \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} \quad \text{et} \quad y''(x) = \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2}.$$

Le premier membre de (E) s'écrit, pour tout $x \in I$:

$$\begin{aligned} x y''(x) + y'(x) + x y(x) \\ &= x \sum_0^\infty a_n x^n + \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} + x \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-2} \\ &= \sum_0^\infty a_n x^{n+1} + \sum_1^\infty n a_n x^{n-1} + \sum_2^\infty n(n-1) a_n x^{n-1} \\ &= \sum_1^\infty a_{n-1} x^n + \sum_0^\infty (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_1^\infty (n+1) n a_{n+1} x^n \\ &= a_1 x^0 + \sum_1^\infty \left[a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} \right] x^n. \end{aligned}$$

Comme cette expression est nulle sur I , qui est un voisinage de 0, par unicité du développement en série entière :

$$\begin{aligned} a_1 &= 0 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 1, \quad a_{n-1} + (n+1)^2 a_{n+1} = 0 \\ \forall n \geq 2, \quad a_{n-2} + n^2 a_n &= 0 \\ a_n &= -\frac{a_{n-2}}{n^2} \quad (\text{car } n^2 \neq 0). \end{aligned}$$

- 6) Dans toute cette question, x est un réel fixé.

Pour développer en série entière f , on utilise le DSE de la fonction cosinus :

$$\forall u \in \mathbb{R}, \quad \cos(u) = \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n u^{2n}}{(2n)!}, \quad \text{donc, appliqué en } u = x \sin(t) :$$

$$\begin{aligned} f(x) &= \int_0^\pi \cos(x \sin(t)) dt \\ &= \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n (x \sin(t))^{2n}}{(2n)!} dt = \int_0^\pi \sum_{n=0}^\infty \underbrace{\frac{(-1)^n \sin^{2n}(t)}{(2n)!}}_{f_n(t)} x^{2n} dt. \end{aligned}$$

Appliquons le théorème d'intégration terme à terme sur le segment $[0, \pi]$:

* Les fonctions f_n sont toutes continues sur $[0, \pi]$;

* La série de fonctions $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge simplement sur $[0, \pi]$, de somme $S_x : t \mapsto \cos(x \sin(t))$.

Montrons que cette convergence **uniforme**, en prouvant la convergence normale. Fixons $n \in \mathbb{N}$ et majorons indépendamment de t :

$$\begin{aligned} \forall t \in [0, \pi], \quad |f_n(t)| &= \left| \frac{(-1)^n \sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} \right| = \frac{\sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} \quad (x^{2n} \geq 0) \\ &\leq \frac{x^{2n}}{(2n)!} \quad \text{indépendant de } t. \end{aligned}$$

Ainsi : $0 \leq \|f_n\|_{\infty}^{[0, \pi]} \leq \frac{x^{2n}}{(2n)!}$, et comme la série $\sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ est convergente (de somme $\cosh(x)$), par théorème de comparaison, la série $\sum_{n \geq 0} \|f_n\|_{\infty}^{[0, \pi]}$ l'est également.

Cela prouve que la série $\sum_{n \geq 0} f_n$ converge normalement sur $[0, \pi]$.

On peut donc intervertir intégrale et somme pour obtenir :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) &= \sum_{n=0}^\infty \int_0^\pi \frac{(-1)^n \sin^{2n}(t)}{(2n)!} x^{2n} dt \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n}{(2n)!} \int_0^\pi \sin^{2n}(t) dt \cdot x^{2n} \\ &= \sum_{n=0}^\infty \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} x^{2n}. \end{aligned}$$

Conclusion : On a développé f en série entière sur $\mathbb{R}$.

- 7) Montrons que f est l'unique solution développable en série entière de (E) qui vérifie $f(0) = \pi$.

* f est solution de (E) d'après Q?? ; f est développable en série entière sur $\mathbb{R}$ d'après la question précédente. De plus :

$$f(0) = \int_0^\pi \cos(0) dt = \int_0^\pi 1 dt = \pi.$$

* Prouvons maintenant l'unicité.

Soit y une solution de (E) développable en série entière sur $] -R, R[$ ($R > 0$) telle que $y(0) = \pi$; notons $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ la série entière en question.

Justifions que la suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est unique, ce qui prouvera l'unicité de y .

Puisque $y(0) = a_0$, nécessairement $a_0 = \pi$.

De plus, d'après Q?? : $a_1 = 0$ et $\forall n \in \llbracket 2, \infty \rrbracket$, $a_n = -\frac{a_{n-2}}{n^2}$.

La relation de récurrence d'ordre 2 permet de déduire de a_0 la valeur de tous les termes de rangs pairs, et de a_1 celle de tous les termes de rangs impairs (ici, $a_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}$).

La suite $(a_n)_{n \geq 0}$ est donc unique, et la fonction y aussi.

Conclusion : La fonction f est l'unique solution de (E) développable en série entière telle que $y(0) = \pi$.

8) Les coefficients du développement en série entière de f vérifient :

* d'une part, d'après Q?? : $\forall n \in \mathbb{N}$, $a_{2n} = \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!}$.

* d'autre part, en itérant la relation de récurrence de Q?? :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{2n} &= -\frac{1}{(2n)^2} \cdot a_{2n-2} = -\frac{1}{(2n)^2} \times -\frac{1}{(2n-2)^2} \cdot a_{2n-4} = \dots \\ &= -\frac{1}{(2n)^2} \times -\frac{1}{(2n-2)^2} \times \dots \times -\frac{1}{2^2} \cdot a_0 \\ &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \cdot \pi. \end{aligned}$$

En identifiant ces deux expressions :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N} : \quad \frac{(-1)^n W_n}{(2n)!} &= \frac{(-1)^n}{2^{2n} (n!)^2} \pi \\ \text{donc :} \quad W_n &= \frac{(2n)!}{2^{2n} (n!)^2} \pi = \frac{1}{2^{2n}} \binom{2n}{n} \pi. \end{aligned}$$

Problème

d'après INP PC 2017

Temps d'attente d'une séquence par un automate

Un automate génère aléatoirement et une suite infinie de lettres P ou C. Les lettres sont générées de façon indépendante ; le P est produit avec probabilité $p \in]0, 1[$ et le C avec probabilité $q := 1 - p$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, soit P_n l'évènement « l'automate génère la lettre P à l'instant n »

et C_n l'évènement « l'automate génère la lettre C à l'instant n ».

L'état de l'automate varie au cours du temps en fonction des lettres produites. Cet état est un entier naturel.

I – Questions de cours

Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$, G_X sa fonction génératrice, R_X le rayon de convergence de la série entière dont G_X est la somme.

1) Puisque la suite $(P(X = n))_{n \geq 0}$ est comprise entre 0 et 1, elle est bornée, donc par définition du rayon de convergence, $R_X \geq 1$. De ce fait, l'intervalle $] -1, 1[$ est inclus dans l'ouvert de convergence $] -R_X, R_X[$ de la série entière. La somme G_X est donc une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur l'intervalle $] -1, 1[$ au moins, où on peut la dériver terme à terme :

$$\forall k \in \mathbb{N}, \forall t \in] -1, 1[, \quad G_X^{(k)}(t) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1) \cdots (n-k+1) P(X = n) t^n.$$

2) Soit X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$.

Montrons que : $X \sim Y \iff \exists r > 0 / \forall t \in] -r, r[, \quad G_X(t) = G_Y(t)$.

On procède par double implication.

[$\Rightarrow$] Supposons que $X \sim Y$; alors : $\forall n \in \mathbb{N}$, $P(X = n) = P(Y = n)$.

Comme les fonctions génératrices sont définies au moins sur $] -1, 1[$:

$$\forall t \in] -1, 1[, \quad G_X(t) = \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) t^n = G_Y(t).$$

Le réel $r = 1 > 0$ convient.

[$\Leftarrow$] Supposons qu'il existe $r > 0$ tel que $G_X = G_Y$ sur $] -r, r[$. Alors :

$$\forall t \in] -r, r[, \quad \sum_{n=0}^{\infty} P(X = n) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} P(Y = n) t^n.$$

Montrons que X et Y ont même loi :

- * Par hypothèse, on sait que $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$ et $Y(\Omega) \subset \mathbb{N}$.
- * Par unicité du développement en série entière écrit ci-dessus, $P(X = n) = P(Y = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cela prouve que $X \sim Y$.

- 3) Soit $t \in]-R_X, R_X[$, ouvert de convergence de la série entière définissant G_X . Cette série entière est donc absolument convergente en t ; en d'autres termes, la famille $(t^n P(X = n))_{n \in \mathbb{N}}$ est sommable. Puisque $X(\Omega) \subset \mathbb{N}$, la famille $(t^n P(X = n))_{n \in X(\Omega)}$ l'est aussi. Par le théorème de transfert, la variable t^X est d'espérance finie, et :

$$E(t^X) = \sum_{n=0}^{\infty} t^n P(X = n) = G_X(t).$$

II – Étude d'un cas simple

On note Y l'instant où est apparaît la lettre C pour la première fois. Soit G_Y la fonction génératrice de Y , de rayon de convergence R_Y .

- 4) La variable Y est le temps d'attente de la première lettre C. Plus précisément :
- * Y donne le rang du premier succès (observer la lettre C)
 - * lors d'une suite illimitée d'épreuve de Bernoulli (observer une lettre produite)
 - * indépendantes
 - * de probabilité de succès q , qui est constante.

Aussi, Y suit la loi géométrique de paramètre q , ce qui signifie que :

$$Y(\Omega) = \mathbb{N}^* \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, P(Y = n) = (1 - q)^{n-1} q = p^{n-1} q.$$

- 5) • G_Y est donc la somme de la série entière $\sum_{n \geq 1} p^{n-1} q t^n$.

En $t = 1/p$, remarquons que : $(p^{n-1} q (\frac{1}{p})^n)_{n \geq 1} = (\frac{q}{p})_{n \geq 1}$. Cette suite est constante, donc bornée, donc $R_X \geq 1/p$;

mais elle ne tend pas vers 0, donc $R_X \leq 1/p$.

Ainsi : $R_X = 1/p$.

- De plus : $\forall t \in]-\frac{1}{p}, \frac{1}{p}[$, $G_Y(t) = \sum_{n=1}^{\infty} p^{n-1} q t^n = q \sum_{n=1}^{\infty} (p t)^{n-1} = \frac{q}{1 - p t}$ car $|p t| < 1$.

- 6) G_Y est une fonction rationnelle définie sur $] -1/p, 1/p[$: elle est deux fois dérivable sur cet intervalle. De plus, 1 se trouve dans cet intervalle car $1/p > 1$. Ainsi, G_Y est en particulier deux fois dérivable en 1, et :

$$G'_Y(t) = \frac{d}{dt} \left(\frac{q t}{1 - p t} \right) = \frac{q(1 - p t) - q t \cdot (-p)}{(1 - p t)^2} = \frac{q}{(1 - p t)^2}$$

$$\text{d'où } G'_Y(1) = \frac{q}{(1 - p)^2} = \frac{1}{q};$$

$$\text{et } G''_Y(t) = q \frac{d}{dt} \left((1 - p t)^{-2} \right) = q \cdot -2(1 - p t)^{-3} \cdot (-p) = \frac{2 p q}{(1 - p t)^3}$$

$$\text{d'où } G''_Y(1) = \frac{2 p q}{(1 - p)^3} = \frac{2 p}{q^2}.$$

- 7) Puisque G_Y est deux fois dérivable en 1, Y admet une variance, et donc une espérance finie ; de plus :

$$E(Y) = G'_Y(1) = \frac{1}{q}$$

$$\text{et } V(Y) = G''_Y(1) + G'_Y(1) - (G'_Y(1))^2 = \frac{2p}{q^2} + \frac{1}{q} - \frac{1}{q^2} = \frac{2p + q - 1}{q^2} = \frac{p}{q^2}.$$

III – Séries entières

Soit $z \in \mathbb{C}$ et $a \in \mathbb{C}^*$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n(a) = -\frac{1}{a^{n+1}}$.

- 8) Pour étudier le rayon de convergence de $\sum_{n \geq 0} u_n(a) z^n$,

on se place au point $z = |a| > 0$.

La suite $(u_n(a) |a|^n)_{n \geq 0} = \left(-\frac{|a|^n}{a^{n+1}} \right)_{n \geq 0}$ est de module constant, égal à $\frac{1}{|a|}$.

Elle est donc bornée, mais ne tend pas vers 0.

Ceci prouve que le rayon de convergence cherché est égal à $|a|$.

- 9) Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < |a|$. Alors :

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} u_n(a) z^n &= - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{a^{n+1}} = -\frac{1}{a} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z}{a} \right)^n = -\frac{1}{a} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z}{a}} \quad (\text{car } \left| \frac{z}{a} \right| < 1) \\ &= \frac{1}{z - a}. \end{aligned}$$

Soit $a, b, \lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| < |b|$. On note I_a l'intervalle $] -|a|, |a|[$.

On pose : $\forall n \in \mathbb{N}$, $v_n = \sum_{k=0}^n u_k(a) u_{n-k}(b)$ et $\forall t \in I_a$, $f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t - a)(t - b)}$.

10) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$\begin{aligned} v_n &= \sum_{k=0}^n u_k(a) u_{n-k}(b) = \sum_{k=0}^n \left(-\frac{1}{a^{k+1}}\right) \cdot \left(-\frac{1}{b^{n-k+1}}\right) = \frac{1}{a b^{n+1}} \sum_{k=0}^n \frac{1}{a^k b^{-k}} \\ &= \frac{1}{a b^{n+1}} \sum_{k=0}^n \left(\frac{b}{a}\right)^k = \frac{1}{a b^{n+1}} \cdot \left(\frac{b}{a}\right)^0 \frac{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^{n+1}}{1 - \frac{b}{a}} \quad (\text{car } \frac{b}{a} \neq 1 \text{ puisque } \left|\frac{b}{a}\right| > 1) \\ &= \frac{1}{a b^{n+1}} \cdot \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{a^{n+2} b^{n+1} - a^{n+1} b^{n+2}} = \frac{a^{n+1} - b^{n+1}}{(a-b) a^{n+1} b^{n+1}} \\ &= \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right). \end{aligned}$$

11) Puisque $|b| > |a| > 0$: $\left|\frac{1}{b}\right| < \left|\frac{1}{a}\right|$ donc $\frac{1}{b^{n+1}} = o\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)$.

On en déduit :

$$v_n = \frac{1}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} + o\left(\frac{1}{a^{n+1}}\right)\right) \underset{n \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{a^{n+1}}.$$

12) • D'après l'équivalent ci-dessus, la série entière $\sum_{n \geq 0} v_n z^n$ a même rayon de convergence que $\sum_{n \geq 0} \frac{1}{b-a} \cdot \frac{1}{a^{n+1}} z^n$, donc que $\sum_{n \geq 0} u_n(a) z^n$ (en multipliant par la constante $a-b \neq 0$, ce qui ne change pas le rayon de convergence).

On obtient que $R\left(\sum_{n \geq 0} v_n z^n\right) = |a|$ à l'aide de Q??.

• La série entière $\sum_{n \geq 0} v_n z^n$ est le produit de Cauchy des séries entières $\sum_{n \geq 0} u_n(a) z^n$ et $\sum_{n \geq 0} u_n(b) z^n$. Le minimum des rayons de convergence de ces deux dernières vaut $|a|$; on obtient donc immédiatement :

$$\begin{aligned} \forall z \in \mathbb{C} / |z| < |a| : \quad \sum_{n=0}^{\infty} v_n z^n &= \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(a) z^n\right) \times \left(\sum_{n=0}^{\infty} u_n(b) z^n\right) \\ &= \frac{1}{z-a} \times \frac{1}{z-b} \\ &= \frac{1}{(z-a)(z-b)}. \end{aligned}$$

13) Grâce à ce résultat, pour tout $t \in I_a$:

$$f(t) = \frac{\lambda t^2}{(t-a)(t-b)} = \lambda t^2 \sum_{n=0}^{\infty} v_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n+1}} - \frac{1}{b^{n+1}}\right) t^{n+2}$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\lambda}{b-a} \left(\frac{1}{a^{n-1}} - \frac{1}{b^{n-1}}\right) t^n.$$

Cela prouve que f est développable en série entière sur I_a .

Le rayon de convergence de la série entière vaut donc au moins $|a|$; en $t = |a|$, le terme général de la série tend vers $\frac{\lambda a}{b-a} \neq 0$, donc $R_f \leq |a|$. Ainsi : $R_f = |a|$.

Soit $a, b, c, \lambda \in \mathbb{C}^*$ tels que $|a| \leq |b| \leq |c|$.

On pose : $\forall t \in I_a, g(t) = \frac{\lambda t^3}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

14) D'après la question Q??, les trois fonctions $t \mapsto \frac{1}{t-a}$, $t \mapsto \frac{1}{t-b}$ et $t \mapsto \frac{1}{t-c}$ sont toutes développables en séries entières, avec des rayons de convergence respectifs $|a|$, $|b|$ et $|c|$.

Le produit de Cauchy de ces 3 séries entières a un rayon de convergence dont le rayon de convergence vaut au moins $\min(|a|, |b|, |c|) = |a|$, et sa somme sur l'intervalle I_a est la fonction $g_0 : t \mapsto \frac{1}{(t-a)(t-b)(t-c)}$.

g_0 est donc développable en série entière avec un rayon de convergence d'au moins $|a|$; en la multipliant par le monôme $t \mapsto \lambda t^3$, on obtient la fonction g et le résultat persiste.

Conclusion : La fonction g est développable en série entière, cette dernière ayant un rayon de convergence $R_g \geq |a|$.

IV – Temps d'attente de la séquence CC

Désormais, l'état de l'automate est modifié après chaque production de lettre selon le schéma suivant :

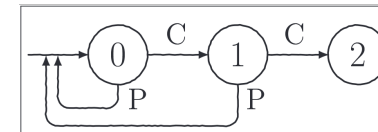


Figure 2

On note Z l'instant où, pour la première fois, l'automate atteint le niveau 2. Ainsi Z est le temps d'attente de la séquence CC.

On admet que Z est une variable aléatoire définie sur un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ telle que $Z(\Omega) \subset \mathbb{N}^*$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note $p_n = P(Z = n)$.

On note G_Z la fonction génératrice de Z et R_Z son rayon de convergence.

15) Comme il est impossible d'obtenir la séquence CC avant l'instant 2 :

$$p_1 = P(Z = 1) = P(\emptyset) = 0.$$

Obtenir la première séquence CC à l'instant 2 revient à avoir obtenu C aux deux premiers instants ; comme les événements C_1 et C_2 sont indépendants :

$$p_2 = P(C_1 \cap C_2) = P(C_1) \times P(C_2) = q^2.$$

On obtient la première séquence CC à l'instant 3 quand on obtient C aux instants 2 et 3, et P à l'instant 1 (sinon on aurait $Z = 2$) :

$$p_3 = P(P_1 \cap C_2 \cap C_3) = P(P_1) \times P(C_2) \times P(C_3) = p q^2,$$

puisque les événements P_1 , C_2 et C_3 sont indépendants.

16) Justifions que $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est un s.c.e.

À chaque réalisation de l'expérience :

- ou bien P_1 est réalisé ;
- ou bien $\overline{P_1} = C_1$ est réalisé, et dans ce cas :
 - * ou bien $\overline{P_2}$ est réalisé, et dans ce cas $C_1 \cap P_2$ est réalisé ;
 - * ou bien $\overline{P_2} = C_2$ est réalisé, et dans ce cas $C_1 \cap C_2$ est réalisé.

Dans tous les cas, un et un seul des événements $(P_1, C_1 \cap P_2, C_1 \cap C_2)$ est réalisé : cela prouve que ces 3 événements forment un s.c.e.

17) Soit $n \geq 3$. Pour évaluer $p_n = P(Z = n)$, appliquons la formule des probabilités totales sur le s.c.e. de la question précédentes :

$$\begin{aligned} P(Z = n) &= P(P_1)P_{P_1}(Z = n) + P(C_1 \cap P_2)P_{C_1 \cap P_2}(Z = n) + P(C_1 \cap C_2)P_{C_1 \cap C_2}(Z = n) \\ &= p P_{P_1}(Z = n) + q p P_{C_1 \cap P_2}(Z = n) + q^2 P_{C_1 \cap C_2}(Z = n). \end{aligned}$$

Évaluons chacune des 3 probabilités conditionnelles :

- * Supposons que P_1 est réalisé et notons Z' le premier instant où apparait la séquence CC en ignorant la première lettre produite. Sous notre hypothèse P_1 , la première séquence CC ne peut pas intervenir à la deuxième lettre générée ; et $[Z = n]$ est réalisé si et seulement si $[Z' = n - 1]$ l'est. Ainsi :

$$P_{P_1}(Z = n) = P_{P_1}(Z' = n - 1) = P(Z' = n - 1)$$

car P_1 est indépendant de $[Z' = n - 1]$.

De plus, Z' suit la même loi que Z , donc :

$$P_{P_1}(Z = n) = P(Z = n - 1) = p_{n-1}.$$

- * De même, en supposant que $C_1 \cap P_2$ est réalisé, l'événement $[Z = n]$ sera réalisé si et seulement si $[Z'' = n - 2]$ l'est, où Z'' est le rang de première apparition de la séquence CC si l'on ignore les deux premières lettres. De ce fait :

$$P_{C_1 \cap P_2}(Z = n) = P_{C_1 \cap P_2}(Z'' = n - 2) = P(Z'' = n - 2) = p_{n-2}.$$

- * En supposant que $C_1 \cap C_2$ est réalisé, la première séquence CC est apparue au rang 2 et l'événement $[Z = n]$ ne se réalise jamais, car $n \geq 3$: $P_{C_1 \cap C_2}(Z = n) = 0$.

Conclusion : $\forall n \geq 3, \quad p_n = p \cdot p_{n-1} + q p \cdot p_{n-2}.$

18) Rappelons que $G_Z(t)$ existe pour tout $t \in [-1, 1]$. Fixons un tel t et calculons :

$$\begin{aligned} G_Z(t)(1 - p t - p q t^2) &= (1 - p t - p q t^2) \sum_{n=0}^{\infty} p_n t^n \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} p \cdot p_n t^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} p q \cdot p_n t^{n+2} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} p_n t^n - \sum_{n=2}^{\infty} p \cdot p_{n-1} t^n - \sum_{n=3}^{\infty} p q \cdot p_{n-2} t^n \\ &= p_1 t^1 + (p_2 - p \cdot p_1) t^2 + \sum_{n=3}^{\infty} (p_n - p \cdot p_{n-1} - p q \cdot p_{n-2}) t^n \end{aligned}$$

Mais $p_1 = 0$ et $p_2 = q^2$ d'après la question Q?? ; et grâce à la relation de récurrence démontrée juste avant, tous les termes de la somme sont nuls.

Conclusion : $\forall t \in [-1, 1], \quad G_Z(t)(1 - p t - p q t^2) = q^2 t^2.$

Pour $t \in \mathbb{R}$, on note :

$$Q(t) = 1 - p t - p q t^2, \quad \Delta = p^2 + 4 p q > 0, \quad a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2 p q} \quad \text{et} \quad b = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2 p q}.$$

19) Calculons $Q(-1)$ et $Q(1)$:

$$Q(-1) = 1 + p - p q = 1 + p(1 - q) = 1 + p^2 > 0$$

$$Q(1) = 1 - p - p q = q - p q = (1 - p) q = q^2 > 0.$$

20) Le discriminant du polynôme Q est bien $\Delta = p^2 + 4 p q > 0$.

Ce polynôme admet donc deux racines réelles distinctes :

$$x_1 = \frac{p - \sqrt{\Delta}}{-2 p q} = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2 p q} = a \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{p + \sqrt{\Delta}}{-2 p q} = \frac{-\sqrt{\Delta} - p}{2 p q} = b.$$

Son coefficient dominant étant $-pq$, il se factorise donc :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad Q(t) = -pq(t-a)(t-b).$$

- 21) Le produit des racines de Q vaut $\frac{1}{-pq} < 0$, et puisque manifestement $b < 0$, nécessairement $a > 0$ et donc :

$$|a| = a = \frac{\sqrt{\Delta} - p}{2pq} \quad \text{et} \quad |b| = -b = \frac{\sqrt{\Delta} + p}{2pq}.$$

On en constate donc que $|a| < |b|$.

Nous avons vu en **Q??** que $Q(-1) > 0$ et $Q(1) > 0$.

De plus, puisque $-pq < 0$, $\lim_{-\infty} Q = -\infty$ et $\lim_{+\infty} Q = -\infty$.

Comme Q est une fonction continue sur $]-\infty, -1]$ et $[1, +\infty[$, par le théorème des valeurs intermédiaires, elle s'annule (au moins) une fois sur chacun de ces intervalles, et cela ne peut être ni en -1 , ni en $+1$.

Les deux racines de Q ont donc toutes les deux une valeurs absolue strictement supérieure à 1.

Conclusion : $1 < |a| < |b|$.

- 22) Soit $f: t \mapsto \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2}$ définie sur l'intervalle I_a .

- D'après la question **Q??**, on a, puisque $|a| < |b|$:

$$\begin{aligned} \forall t \in I_a, \quad f(t) &= \frac{q^2 t^2}{-pq(t-a)(t-b)} \\ &= -\frac{p}{q} t^2 \times \frac{1}{(t-a)(t-b)} \\ &= -\frac{p}{q} t^2 \times \frac{1}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) t^n \\ &= -\frac{p/q}{a-b} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{b^{n+1}} - \frac{1}{a^{n+1}} \right) t^{n+2} \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} w_n t^n. \end{aligned}$$

Cette écriture est un DSE; la série entière est bien de rayon de convergence $|a|$.

- D'après **Q??** : $\forall t \in]-1, 1[, \quad G_Z(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2} = f(t).$

On sait que G_Z et f sont développables en série entière; comme elles sont égales au voisinage de 0, leurs développements en série entière ont les

mêmes coefficients (par unicité du DSE).

On en déduit que R_Z est égal au rayon de convergence de la série entière associée à f , soit $|a|$.

- 23) On peut déduire de la question précédente que :

$$\forall t \in I_a, \quad G_Z(t) = \sum_{n=0}^{\infty} w_n t^n = f(t) = \frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2}.$$

- 24) La fonction G_Z est une fonction rationnelle définie (au moins) sur I_a , donc elle est en particulier deux fois dérivable sur cet intervalle.

Puisque $1 \in I_a$, G_Z est deux fois dérivable en 1, ce qui prouve que G_Z admet un moment d'ordre 2, donc une variance et a fortiori une espérance finie. En outre :

$$\begin{aligned} \forall t \in I_a, \quad G'_Z(t) &= \frac{d}{dt} \left(\frac{q^2 t^2}{1 - pt - pqt^2} \right) \\ &= \frac{2q^2 t \cdot (1 - pt - pqt^2) - q^2 t^2 \cdot (-p - 2pqt)}{(1 - pt - pqt^2)^2} \\ &= \frac{q^2 t \cdot (2 - 2pt - 2pqt^2 + pt + 2pqt^2)}{(1 - pt - pqt^2)^2} \\ &= \frac{q^2 t \cdot (2 - pt)}{(1 - pt - pqt^2)^2} \\ \text{donc} \quad E(Z) &= G'_Z(1) = \frac{q^2 \cdot (2 - p)}{(1 - p - pq)^2} = \frac{q^2 \cdot (2 - p)}{(q - pq)^2} = \frac{q^2 \cdot (1 + q)}{q^4} \\ &= \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q}. \end{aligned}$$

Conclusion : $E(Z) = q^{-1} + q^{-2}$.

- 25) D'après la question précédente et **Q??** :

$$E(Z) - E(Y) = \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{q^2} \right) - \frac{1}{q} = \frac{1}{q^2} > 1$$

car $q \in]0, 1[$. On en déduit a fortiori que $E(Z) \geq E(Y) + 1$.

- 26) Pour obtenir la séquence CC, il faut d'abord que la séquence C soit apparue : le rang Z d'apparition de la séquence CC est au moins égal au rang Y d'apparition de la séquence C, augmenté de 1 : $Z \geq Y + 1$.

Par croissance, puis linéarité de l'espérance des variables positives :

$$E(Z) \geq E(Y + 1) = E(Y) + E(1) = E(Y) + 1.$$