

Corrigé du devoir surveillé n° 5+ (v1)

Problème

Variables aléatoires entières symétriques à forte dispersion

I – Généralités sur les variables aléatoires

- 1) La variable aléatoire M_n est une fonction de $X_1, \dots, X_n$. Puisque les variables $(X_1, \dots, X_n, X_{n+1})$ sont (mutuellement) indépendantes, M_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions.
- 2) Soit X une variable aléatoire. Elle est d'espérance finie si et seulement si la famille $(k P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$ est sommable, c'est-à-dire si et seulement si

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k| P(X = k) < +\infty.$$

Mais par la formule de transfert, cette somme est l'espérance de la variable aléatoire positive $|X|$: l'affirmation ci-dessus se réécrit $E(|X|) < +\infty$.

Conclusion : La variable aléatoire X est d'espérance finie si et seulement si la variable aléatoire $|X|$ est d'espérance finie.

- 3) Soit X une variable aléatoire. On suppose que $P(|X| \leq M) = 1$ pour un réel M . Montrons que la famille $(k P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$ est sommable. On calcule la somme ci-dessous dans $[0, \infty]$:

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k| P(X = k) = \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ |k| \leq M}} |k| P(X = k) + \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ |k| > M}} |k| P(X = k).$$

Remarquons que, dans la deuxième somme, puisque $|k| > M$:

$$\begin{aligned} [X = k] &\subset [|X| > M] \quad \text{donc} \quad P(X = k) \leq P(|X| > M) \\ &= 1 - P(|X| \leq M) \\ &= 0 \end{aligned}$$

donc toutes les $P(X = k)$ sont nulles. Dans la première somme, on utilise que $|k| \leq M$ et alors :

$$\sum_{k \in X(\Omega)} |k| P(X = k) \leq \sum_{\substack{k \in X(\Omega) \\ |k| \leq M}} M P(X = k) + 0 = M P(|X| \leq M) < +\infty.$$

La famille $(k P(X = k))_{k \in X(\Omega)}$ est bien sommable, donc la variable X est d'espérance finie.

Conclusion : Toute variable aléatoire quasi-bornée est d'espérance finie.

- 4) • Soit X une variable aléatoire entière qui vérifie $(\mathcal{D}_\alpha)$.

$$P(|X| \geq n) = \frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)_{n \rightarrow \infty} \sim \frac{\alpha}{n} \quad \text{car } \alpha \neq 0.$$

Puisque la série harmonique est divergente, par théorème de comparaison de séries à termes positifs, la série $\sum_{n \geq 1} P(|X| \geq n)$ est divergente également.

Mais puisque $|X|$ est à valeurs dans $\mathbb{N}$:

$$E(|X|) = \sum_{n=1}^{\infty} n P(|X| \geq n) = +\infty.$$

Cela prouve que X n'est pas d'espérance finie.

- On sait que toute variable aléatoire discrète qui admet un moment d'ordre 2 admet aussi un moment d'ordre 1 (ce résultat provient de l'inégalité $\forall a, b \in \mathbb{R} : |a| \leq \frac{1}{2}(a^2 + 1)$ et du théorème de comparaison pour les variables aléatoires).

Par contraposition, puisqu'ici X n'admet pas de moment d'ordre 1, X n'admet pas de moment d'ordre 2.

Conclusion : Si X est une variable entière vérifiant $(\mathcal{D}_\alpha)$, alors ni X , ni X^2 ne sont d'espérance finie.

- 5) Soit X une variable aléatoire symétrique, et $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ impaire.

- Puisque X est symétrique, X et $-X$ ont même loi. Pas le principe de transfert de loi, $f(X)$ et $f(-X)$ ont même loi. Mais comme f est impaire, $f(-X) = -f(X)$. Ainsi : $f(X)$ et $-f(X)$ ont même loi, en d'autres termes : $f(X)$ est une variable symétrique.
- Supposons que $f(X)$ soit d'espérance finie.

$$\begin{aligned} E(f(X)) &= E(-f(X)) && \text{car } f(X) \sim -f(X) \\ &= -E(f(X)) && \text{par linéarité de l'espérance,} \end{aligned}$$

d'où $E(f(X)) = 0$.

6) Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques et indépendantes.

Montrons que $(-X, -Y) \sim (X, Y)$. Pour tous réels k, ℓ :

$$\begin{aligned} P(-X = k, -Y = \ell) &= P(X = -k, Y = -\ell) \\ &= P(X = -k) \times P(Y = -\ell) \quad \text{car } X \perp Y, \\ &= P(X = k) \times P(Y = \ell) \quad \text{car } X \text{ et } Y \text{ symétriques,} \\ &= P(X = k, Y = \ell) \quad \text{car } X \perp Y. \end{aligned}$$

Introduisons les couples $C := (X, Y)$ et $C' := (-X, -Y)$.

Il s'agit de variables aléatoires discrètes à valeurs dans $E = \mathbb{R}^2$.

En appliquant le principe de transfert de loi avec la fonction $u: (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto x + y \in \mathbb{R}$, on en déduit que les variables $u(C) = X + Y$ et $u(C') = -X - Y$ ont même loi. Autrement dit : la variable $X + Y$ est symétrique.

II – Deux sommes de séries

On fixe ici un nombre complexe z tel que $z \neq 1$ et $|z| \leq 1$. On introduit la fonction :

$$L: t \mapsto \int_0^t \frac{z}{1-uz} du.$$

7) • Montrons que L est correctement définie sur le segment $[0, 1]$.

Fixons $t \in [0, 1]$ et justifions que l'intégrale existe.

Remarquons que uz est toujours différent de 1 :

- * si $u \in [0, 1[$, $|uz| = u|z| \leq u < 1$
- * si $u = 1$, $uz = z \neq 1$ par hypothèse.

Le dénominateur de la fraction ne s'annule donc jamais.

La fonction $\ell: u \mapsto \frac{z}{1-uz}$ étant continue sur le segment $[0, t]$, $L(t)$ est bien défini.

- De plus, par le théorème fondamental de l'analyse, L est l'unique primitive de ℓ sur $[0, 1]$ qui s'annule en 0. En particulier, L est dérivable et :

$$\forall t \in [0, 1], \quad L'(t) = \frac{z}{1-tz}.$$

Par les théorèmes opératoires, L' est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$ et :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \forall t \in [0, 1], \quad L^{(n)}(t) &= z \cdot \frac{d^{n-1}}{dt^{n-1}} \left(\frac{1}{1-tz} \right) \\ &= \frac{(n-1)! z^n}{(1-tz)^n}. \end{aligned}$$

8) Soit $t \in]0, 1]$.

* Par la deuxième inégalité triangulaire dans $\mathbb{C}$:

$$|1-tz| \geq \underbrace{|1| - |tz|}_{\geq 0} = 1 - t|z| \geq 1 - t \quad \text{car } |z| \leq 1.$$

* Étudions le cas d'égalité : supposons que $|1-tz| = 1-t$.

Toutes les inégalités ci-dessus sont alors des égalités.

La deuxième donne $t|z| = t$, donc $|z| = 1$ puisque $t \neq 0$.

De plus :

$$\begin{aligned} |1-tz|^2 &= (1-t)^2 \\ (1-tz)(\overline{1-tz}) &= (1-t)^2 \\ 1 - 2\operatorname{Re}(z)t + |z|^2 t^2 &= 1 - 2t + t^2 \\ \operatorname{Re}(z) &= 1. \quad (\text{grâce à } t \neq 0 \text{ encore une fois}) \end{aligned}$$

Puisque $\operatorname{Re}(z) = 1$ et $|z| = 1$, nécessairement $z = 1$, ce qui est exclu par hypothèse.

Conclusion : $\forall t \in]0, 1], \quad |1-tz| > 1-t$.

9) • Appliquons le **théorème de convergence dominée** aux fonctions

$$f_n: t \mapsto \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n, \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}, \text{ sur l'intervalle }]0, 1]:$$

* Pour tout $t \in]0, 1]$ fixé, $\left| \frac{1-t}{1-tz} \right| < 1$ d'après la question précédente, donc $f_n(t) = \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$.

La suite $(f_n)_{n \geq 0}$ converge simplement vers $t \mapsto 0$ sur $]0, 1]$.

* Les fonctions f_n sont c.p.m. sur $]0, 1]$ car continues.

* Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $t \in]0, 1]$, $|f_n(t)| \leq 1$ et la fonction constante $\phi: t \mapsto 1$ est intégrable sur $]0, 1]$ car cet intervalle est borné.

Le théorème s'applique, et donne :

$$\int_0^1 \left| \frac{1-t}{1-tz} \right|^n dt \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_0^1 0 dt = 0.$$

• Pour étudier la deuxième intégrale, on pose

$$g_n: t \mapsto \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}$$

et on applique une nouvelle fois le théorème de convergence dominée :

* La convergence simple sur $]0, 1]$ vers la fonction nulle provient du fait que : $\forall n \in \mathbb{N}, \forall t \in]0, 1], \quad |g_n(t)| \leq \frac{|f_n(t)|}{|1-tz|}$;

- * Toutes les fonctions g_n sont continues par morceaux, car continues sur $]0, 1]$;
- * On domine $|g_n|$ par la fonction $\Psi: t \mapsto \frac{1}{|1-tz|}$, qui est intégrable sur $]0, 1]$ car continue sur le segment $[0, 1]$.

$$\text{En conclusion : } \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 0 dt = 0.$$

- 10) Comme la fonction L est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0, 1]$, on peut lui appliquer la formule de Taylor avec reste intégral à tout ordre $n \in \mathbb{N}^*$ entre $a = 0$ et $b = 1$:

$$\begin{aligned} L(1) &= \sum_{k=0}^n \frac{L^{(k)}(0)}{k!} (1-0)^k + \int_0^1 \frac{(1-t)^n}{n!} L^{(n+1)}(t) dt \\ &= 0 + \sum_{k=1}^n \frac{z^k}{k} + \int_0^1 \frac{z^{n+1}(1-t)^n}{(1-tz)^{n+1}} dt. \end{aligned}$$

D'après la question précédente, le reste intégral tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$. Puisque $L(1)$ est une constante, par différence, la somme partielle de série converge également et on obtient en passant à la limite :

$$L(1) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^k}{k} \quad \text{soit : } \forall z \in \mathbb{C} / |z| \leq 1 \text{ et } z \neq 1 : \int_0^1 \frac{z du}{1-uz} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n}.$$

- 11) Soit $\gamma: (t, u) \in \mathbb{R}^2 \mapsto |1 + u e^{it}| \in \mathbb{R}$.

- Montrons que γ est continue.

$(\gamma_1: (t, u) \mapsto t) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$	car polynomiale;
$(\gamma_2: x \mapsto e^{ix}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}, \mathbb{C})$	est une fonction usuelle;
$(\gamma_3: (t, u) \mapsto e^{it}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$	car $\gamma_3 = \gamma_2 \circ \gamma_1$;
$(\gamma_4: (t, u) \mapsto u) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$	car polynomiale;
$(\gamma_5: (t, u) \mapsto u e^{it}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$	car $\gamma_5 = \gamma_4 \times \gamma_3$;
$(\gamma_6: (t, u) \mapsto 1 + u e^{it}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{C})$	car $\gamma_6 = 1 + \gamma_5$;
$(\gamma_7: z \mapsto z) \in \mathcal{C}(\mathbb{C}, \mathbb{R})$	est une fonction usuelle;
$(\gamma: (t, u) \mapsto 1 + u e^{it}) \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$	car $\gamma = \gamma_7 \circ \gamma_6$.

- Soit $a \in]0, \pi[$ et $K := [-a, a] \times [0, 1]$.

La fonction γ est à valeurs réelles, continues sur la partie K , fermée et bornée de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^2$, de dimension finie. Par le théorème des bornes atteintes, γ admet un minimum sur K : il existe $(t_0, u_0) \in K$ tel que :

$$\forall (t, u) \in K, \quad \gamma(t, u) \geq \gamma(t_0, u_0) \quad \text{c.à.d.} \quad |1 + u e^{it}| \geq |1 + u_0 e^{it_0}|.$$

Posons $m_a := |1 + u_0 e^{it_0}|$. Immédiatement $m_a \geq 0$.

- **Par l'absurde**, supposons que $m_a = 0$. On aurait $u_0 e^{it_0} = -1 = 1 e^{i\pi}$. Puisque $u_0 \geq 0$, on peut identifier modules et arguments : on obtient $u_0 = 1$ et $t_0 \equiv \pi [2\pi]$. Toutefois, $t_0 \in [-a, a] \subset]0, \pi[$, donc c'est impossible.

Conclusion : Pour tout $a \in]0, \pi[$, il existe un réel $m_a > 0$ tel que :

$$\forall (t, u) \in [-a, a] \times [0, 1], \quad |1 + u e^{it}| \geq m_a.$$

12) Introduisons la fonction $f: \begin{cases}]-\pi, \pi[\times [0, 1] \longrightarrow \mathbb{C} \\ (t, u) \longmapsto \frac{e^{it}}{1 + u e^{it}} \end{cases}$

et l'intégrale à paramètre : $F: t \mapsto \int_0^1 \frac{e^{it}}{1 + u e^{it}} du$.

Appliquons le théorème de dérivation sous l'intégrale :

- * Pour tout $u \in [0, 1]$ fixé, la fonction $t \mapsto \frac{e^{it}}{1 + u e^{it}}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]-\pi, \pi[$ et :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\pi, \pi[, \quad \frac{\partial f}{\partial t}(t, u) &= \frac{ie^{it} \cdot (1 + u e^{it}) - e^{it} \cdot i u e^{it}}{(1 + u e^{it})^2} \\ &= \frac{ie^{it}}{(1 + u e^{it})^2}. \end{aligned}$$

- * Pour $t \in]-\pi, \pi[$ fixé, les fonction $u \mapsto f(u, t)$ et $u \mapsto \frac{\partial f}{\partial t}(u, t)$ sont c.p.m. sur $[0, 1]$ car continues.
- * Pour $t \in]-\pi, \pi[$ fixé, la fonction $u \mapsto f(u, t)$ est intégrable sur $[0, 1]$ car continue sur un segment.
- * Prenons un segment $[-a, a] \subset]-\pi, \pi[$.

À l'aide du minorant $m_a > 0$ de la question précédente :

$$\begin{aligned} \forall t \in [-a, a], \quad \left| \frac{\partial f}{\partial t}(t, u) \right| &= \left| \frac{ie^{it}}{(1 + u e^{it})^2} \right| = \frac{1}{|1 + u e^{it}|^2} \leq \frac{1}{m_a^2} \text{ indép. de } t. \\ \forall u \in [0, 1]: \end{aligned}$$

La fonction constante $\phi: u \mapsto \frac{1}{m_a^2}$ est intégrable sur $[0, 1]$ car c'est un intervalle borné.

Le théorème s'applique : il prouve que $F \in \mathcal{C}^1(]0, \pi[, \mathbb{C})$ et que :

$$\forall t \in]0, \pi[, \quad F'(t) = \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1 + u e^{it})^2} du.$$

- 13) • Pour tout $t \in]-\pi, \pi[$, calculons l'intégrale donnant $F'(t)$:

$$\begin{aligned} F'(t) &= \int_0^1 \frac{ie^{it}}{(1+ue^{it})^2} du = i \int_0^1 \frac{\frac{d}{du}(1+ue^{it})}{(1+ue^{it})^2} du = i \left[\frac{-1}{1+ue^{it}} \right]_0^1 \\ &= i \left[1 - \frac{1}{1+e^{it}} \right] = \frac{ie^{it}}{1+e^{it}} = \frac{ie^{it/2}}{e^{-it/2} + e^{it/2}} = \frac{-\sin(t/2) + i \cos(t/2)}{2 \cos(t/2)} \\ &= -\frac{\tan(t/2)}{2} + \frac{i}{2}. \end{aligned}$$

- De ce fait, on a pour tout $t \in]-\pi, \pi[$:

$$F'(t) = -\frac{\sin(t/2)}{2 \cos(t/2)} + \frac{i}{2} = \frac{\frac{d}{dt}(\cos(t/2))}{\cos(t/2)} + \frac{i}{2}.$$

En prenant une primitive de part et d'autre, il existe une constante $C \in \mathbb{C}$ telle que :

$$\forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F(t) = \ln |\cos(t/2)| + \frac{it}{2} + C.$$

En $t = 0$, le membre de gauche vaut $F(0) = \int_0^1 \frac{1}{1+u} du = \ln(2)$, et à droite, il vaut C . En remarquant que $\cos(t/2) > 0$ sur l'intervalle d'étude, on obtient finalement :

$$\begin{aligned} \forall t \in]-\pi, \pi[, \quad F(t) &= \ln(\cos(t/2)) + \frac{it}{2} + \ln(2) \\ &= \ln(2 \cos(t/2)) + \frac{it}{2}. \end{aligned}$$

- 14) Soit $\theta \in]0, 2\pi[$. Tout d'abord, appliquons le résultat de la question précédente à $t = \theta - \pi \in]-\pi, \pi[$:

$$\begin{aligned} F(\theta - \pi) &= \ln\left(2 \cos\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\pi}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2} \\ &= \ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) + \frac{i(\theta - \pi)}{2}. \end{aligned} \quad (*)$$

D'autre part, par définition de la fonction F :

$$F(\theta - \pi) = \int_0^1 \frac{e^{i(\theta - \pi)}}{1 + ue^{i(\theta - \pi)}} = - \int_0^1 \frac{e^{i\theta}}{1 - ue^{i\theta}}.$$

On utilise maintenant le résultat de **Q10** avec $e^{i\theta}$ dans le rôle de z (c'est légitime car $|e^{i\theta}| = 1$ et $z \neq 1$ puisque $\theta \neq 0 \pmod{2\pi}$) :

$$F(\theta - \pi) = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{in\theta}}{n} = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} - i \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}. \quad (**)$$

En identifiant parties réelles et imaginaires dans les deux écritures (*) et (**) :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n} = -\ln\left(2 \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n} = \frac{\pi - \theta}{2},$$

et ce, pour tout réel $\theta \in]0, \pi[$.

III – Fonction caractéristique d'une variable aléatoire symétrique

On étudie dans cette partie une variable aléatoire X fixée, que l'on suppose entière ($X(\Omega) \subset \mathbb{Z}$) et symétrique.

On pose :

$$\Phi_X: \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ t \longmapsto E(\cos(tX)), \end{cases}$$

appelée **fonction caractéristique de X** .

- 15) • Montrons que Φ_X est bien définie. Soit $t \in \mathbb{R}$.
Puisque $|\cos(tX)| \leq 1$, d'après **Q3**, $\cos(tX) \in L^1$, donc $E(\cos(tX))$ existe et appartient à $\mathbb{R}$.
• Montrons que Φ_X est une fonction paire. L'intervalle $\mathbb{R}$ est symétrique et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(-t) = E(\cos(-tX)) = \underset{\substack{\uparrow \\ \text{la fonction cos est paire}}}{E(\cos(tX))} = \Phi_X(t).$$

- Puisque $-1 \leq \cos(tX) \leq 1$ et que les 3 variables de cet encadrement sont d'espérance finie,
par croissance de l'espérance : $E(-1) \leq E(\cos(tX)) \leq E(1)$,
donc $-1 \leq \Phi_X(t) \leq 1$, d'où $|\Phi_X(t)| \leq 1$.

- 16) Comme X est une variable discrète réelles, l'ensemble $X(\Omega)$ peut s'écrire en énumération $X(\Omega) = \{x_i; i \in I\}$ où les x_i sont des réels distincts, et I est ou bien un ensemble fini, ou bien $\mathbb{N}$. Dans les deux cas, par la formule de transfert :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_X(t) &= E(\cos(tX)) = \sum_{x \in X(\Omega)} \cos(tx) P(X = x) \\ &= \sum_{i \in I} \cos(tx_i) P(X = x_i). \end{aligned}$$

↪ **1^{er} cas** : si I est fini.

La fonction Φ_X est la somme *finie* des fonctions $t \mapsto P(X = x_i) \cos(x_i t)$, qui sont continues sur $\mathbb{R}$ (ce sont des fonctions sinusoidales).

La fonction Φ_X est donc continue.

↪ **2^e cas** : si $I = \mathbb{N}$. On a dans ce cas : $\forall t \in \mathbb{R}, \Phi_X(t) = \sum_{i=0}^{\infty} \underbrace{P(X = x_i) \cos(x_i t)}_{f_i(t)}$
 Appliquons le théorème de continuité de la somme :

* Toutes les fonctions f_i sont continues sur $\mathbb{R}$.

* On montre sans peine que $\|f_i\|_{\infty}^{\mathbb{R}} = P(X = x_i)$ pour tout $i \in \mathbb{N}$,

et comme $\sum_{i=0}^{\infty} P(X = x_i) = 1$ puisque $([X = x_i])_{i \in \mathbb{N}}$ est un s.c.e.,

la série $\sum_{i \geq 0} f_i$ converge normalement, donc uniformément, sur $\mathbb{R}$.

La somme Φ_X de cette série reste donc continue sur $\mathbb{R}$.

Conclusion : Dans tous les cas, la fonction Φ_X est continue sur $\mathbb{R}$.

Dans la suite de cette partie, on suppose de plus que X est une variable aléatoire vérifiant la condition $(\mathcal{D}_\alpha)$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose : $r_n := P(|X| \geq n)$.

17) Fixons un réel $t \in]0, 2\pi[$. D'après $(\mathcal{D}_\alpha)$:

$$\begin{aligned} \forall n \geq 1, \quad r_n \cos(nt) &= P(|X| \geq n) \cos(nt) = \left(\frac{\alpha}{n} + O\left(\frac{1}{n^2}\right) \right) \frac{\cos(nt)}{n} \\ &= \underbrace{\alpha \cdot \frac{\cos(nt)}{n}}_{u_n} + \underbrace{O\left(\frac{1}{n^2}\right)}_{v_n}. \end{aligned}$$

La série $\sum_{n \geq 1} u_n$ est convergente par **Q14** et linéarité de la sommation,

et la série $\sum_{n \geq 1} v_n$ est absolument convergente par théorème de comparaison.

Par linéarité de la sommation, la série $\sum_{n \geq 1} r_n \cos(nt)$ est donc convergente.

18) * Toujours pour $t \in]0, 2\pi[$ fixé, rappelons que X est à valeurs dans $\mathbb{Z}$, donc par la formule de transfert :

$$\Phi_X(t) = E(\cos(tX)) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} P(X = n) \cos(nt).$$

On répartit l'ensemble $\mathbb{Z}$ en 3 paquets : $\{0\}$, $\mathbb{N}^*$ et $\mathbb{Z}_-^* = \{-n; n \in \mathbb{N}^*\}$:

$$\Phi_X(t) = P(X = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(X = n) \cos(nt) + \sum_{n=1}^{\infty} P(X = -n) \cos(-nt)$$

$$\begin{aligned} &= P(X = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(\underbrace{[X = n] \cup [X = -n]}_{\text{union disjointe car } n \neq 0}) \cos(nt) \\ &= P(|X| = 0) + \sum_{n=1}^{\infty} P(|X| = n) \cos(nt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} P(|X| = n) \cos(nt). \end{aligned}$$

Remarquons que : $\forall n \in \mathbb{N}, [|X| = n] = [|X| \geq n] \setminus [|X| \geq n+1]$;
 et comme $[|X| \geq n+1] \subset [|X| \geq n]$:

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} (P(|X| \geq n) - P(|X| \geq n+1)) \cos(nt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (r_n - r_{n+1}) \cos(nt). \end{aligned}$$

* Puisque la série ci-dessus est convergente, et que la série $\sum_{n \geq 0} r_n \cos(nt)$ l'est aussi d'après la question précédente, la série $\sum_{n \geq 1} r_{n+1} \cos(nt)$ converge également par différence. On peut donc écrire, par linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(nt) - \sum_{n=0}^{\infty} r_{n+1} \cos(nt) \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} r_n \cos(nt) - \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos((n-1)t) \quad (\text{par translation d'indice}) \\ &= \underbrace{P(|X| \geq 0)}_{r_0 \cos(0)} + \sum_{n=1}^{\infty} r_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n [\cos(nt) - \cos((n-1)t)]. \end{aligned}$$

19) • Étudions $\lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int}$ en intervertissant limite et somme.

À cette fin, notons $I :=]0, 2\pi[$ et introduisons les fonctions

$$g_n : t \in I \mapsto \left(r_n - \frac{\alpha}{n}\right) e^{int} \in \mathbb{C} \quad \text{pour } n \in \mathbb{N}^*.$$

* Pour $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $\lim_{t \rightarrow 0^+} g_n(t) = r_n - \frac{\alpha}{n}$, limite finie.

* Montrons que $\sum_{n \geq 1} g_n$ converge uniformément sur I , dont 0 est une extrémité.

On constate immédiatement que $\|g_n\|_\infty^I = \left| r_n - \frac{\alpha}{n} \right|$,

donc par la propriété ($\mathcal{D}_\alpha$) : $\|g_n\|_\infty^I = O\left(\frac{1}{n^2}\right)$.

Par théorème de comparaison, $\sum_{n \geq 1} \|g_n\|_\infty^I$ est convergente, ce qui prouve la convergence normale (donc uniforme) sur I de $\sum_{n \geq 1} g_n$.

L'interversion est donc légitime, et on obtient :

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 0^+} \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} &= \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{t \rightarrow 0^+} \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right), \end{aligned}$$

nombre que nous noterons $C \in \mathbb{R}$.

• Pour tout $t \in]0, \pi[$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{int} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\alpha}{n} + \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right) \right) e^{int}.$$

On sait que les séries $\sum_{n \geq 1} r_n e^{int}$ et $\sum_{n \geq 1} \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int}$ sont convergentes.

Par linéarité de la sommation, leur différence $\sum_{n \geq 1} \frac{\alpha}{n} e^{int}$ est donc également convergente. On peut maintenant écrire :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n e^{int} &= \alpha \sum_{n=1}^{\infty} \frac{e^{int}}{n} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(r_n - \frac{\alpha}{n} \right) e^{int} \\ &= -\alpha \ln \left(2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) + i \alpha \frac{\pi - t}{2} + C + o(1)_{t \rightarrow 0^+} \end{aligned}$$

d'après ce qu'on vient de voir et la question Q14.

• Puisque $C \in \mathbb{R}$, en identifiant les parties réelles, on obtient :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nt) &= -\alpha \ln \left(2 \sin \left(\frac{t}{2} \right) \right) + C + o(1)_{t \rightarrow 0^+} \\ &= -\alpha \ln(t + o(t)) + O(1) \\ &= -\alpha \ln(t) - \alpha \ln(1 + o(1)) + O(1) \\ &= -\alpha \ln(t) + o(\ln(t)) \\ &\sim_{t \rightarrow 0^+} -\alpha \ln(t); \end{aligned}$$

et en identifiant les parties imaginaires :

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin(nt) &= \alpha \frac{\pi - t}{2} + o(1) \\ &= \frac{\alpha \pi}{2} + o(1)_{t \rightarrow 0^+}. \end{aligned}$$

20) • Toujours pour $t \in]0, 2\pi[$, reprenons la conclusion de Q17 :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left[\cos(nt) - \cos((n-1)t) \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} r_n \left[\cos(nt) - \cos(nt) \cos(t) - \sin(nt) \sin(t) \right] \\ &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(1 - \cos(t)) \cdot r_n \cos(nt) - \sin(t) \cdot r_n \sin(nt) \right]. \end{aligned}$$

Comme les séries $\sum_{n \geq 1} r_n \cos(nt)$ et $\sum_{n \geq 1} r_n \sin(nt)$ sont convergentes, par linéarité de la sommation :

$$\begin{aligned} \Phi_X(t) &= 1 + (1 - \cos(t)) \sum_{n=1}^{\infty} r_n \cos(nt) - \sin(t) \sum_{n=1}^{\infty} r_n \sin(nt) \\ &= 1 + O(t^2) \times O(\ln t) - (t + o(t)) \times \left(\frac{\alpha \pi}{2} + o(1) \right) \\ &= 1 + O(t^2 \ln(t)) - \frac{\alpha \pi}{2} t + o(t) \\ &= 1 - \frac{\alpha \pi}{2} t + o(t)_{t \rightarrow 0^+}. \end{aligned}$$

• Ce développement asymptotique nous permet d'étudier la dérivabilité à droite de Φ_X en 0 :

$$\begin{aligned} \forall t > 0, \quad \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} &= \frac{1}{t} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha \pi}{2} t + o(t)_{t \rightarrow 0^+} \right) - 1 \right] \\ &= -\frac{\alpha \pi}{2} + o(1)_{t \rightarrow 0^+} \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} -\frac{\alpha \pi}{2}. \end{aligned}$$

Ainsi, Φ_X est dérivable à droite en 0 et $\Phi'_d(0) = -\frac{\alpha \pi}{2}$.

Pour la dérivabilité à gauche, on exploite la parité de la fonction Φ_X :

$$\forall t < 0, \quad \frac{\Phi_X(t) - \Phi_X(0)}{t} = \frac{\Phi_X(|t|) - \Phi_X(0)}{t}$$

$$= \frac{1}{t} \cdot \left[\left(1 - \frac{\alpha \pi}{2} |t| + o(|t|) \right) - 1 \right]_{t \rightarrow 0^-}$$

$$= +\frac{\alpha \pi}{2} + o(1)_{t \rightarrow 0^-} \xrightarrow{t \rightarrow 0^-} +\frac{\alpha \pi}{2}.$$

La fonction Φ_X est également dérivable à gauche en 0, mais $\Phi'_g(0) = +\frac{\alpha \pi}{2} \neq \Phi'_d(0)$ car $\alpha \neq 0$ par hypothèse.

Conclusion : La fonction Φ_X n'est pas dérivable en 0, où sa courbe admet un point anguleux.

IV – Convergence simple de la suite des fonctions caractéristiques des variables M_n

21) Soit X et Y deux variables aléatoires symétriques indépendantes. Alors :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = E(\cos(t(X+Y)))$$

$$= E(\cos(tX) \cos(tY) - \sin(tX) \sin(tY)).$$

Les produits de cosinus ou de sinus sont bornés ; les deux produits de variables dans la différence ci-dessus admettent donc des espérances finies. Par linéarité de l'espérance :

$$\Phi_{X+Y}(t) = E(\cos(tX) \cos(tY)) - E(\sin(tX) \sin(tY))$$

$$= E(\cos(tX)) E(\cos(tY)) - E(\sin(tX)) E(\sin(tY))$$

puisque $X \perp Y$ entraîne $\cos(tX) \perp \cos(tY)$ et $\sin(tX) \perp \sin(tY)$. De plus, les espérances des sinus sont nulles car X et Y sont symétriques et $f: x \mapsto \sin(tx)$ est impaire (cf. Q5). On obtient finalement :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{X+Y}(t) = \Phi_X(t) \times \Phi_Y(t).$$

22) • Avant d'aborder les moyennes empiriques M_n , démontrons un résultat analogue pour les sommes $S_n := \sum_{i=1}^n X_i$, par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$. On introduit les propositions :

$$\mathcal{H}(n): \begin{cases} \text{la variable } S_n \text{ est symétrique} \\ \forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{S_n}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^n. \end{cases}$$

* **Initialisation.** Pour $n = 1$, $S_n = X_1$ est bien symétrique, et :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{S_1}(t) = \Phi_{X_1}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^1$$

donc $\mathcal{H}(1)$ est vraie.

* **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathcal{H}(n)$ soit vraie.

Or S_n et X_{n+1} sont indépendantes par le lemme des coalitions, et puisqu'elles sont toutes les deux symétriques, $S_{n+1} = S_n + X_{n+1}$ l'est aussi et leurs fonctions caractéristiques vérifient :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{S_{n+1}}(t) = \Phi_{S_n+X_{n+1}}(t) = \Phi_{S_n}(t) \times \Phi_{X_{n+1}}(t)$$

$$= (\Phi_{X_1}(t))^n \times \Phi_{X_1}(t)$$

en utilisant $\mathcal{H}(n)$ et le fait que X_{n+1} et X_1 ont même loi.

On a prouvé : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{S_{n+1}}(t) = (\Phi_{X_1}(t))^{n+1}$; la proposition $\mathcal{H}(n+1)$ est donc vraie également.

• Venons-en maintenant à M_n . Tout d'abord, M_n est symétrique car S_n l'est :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(M_n = -x) = P(S_n = -nx) = P(S_n = nx) = P(M_n = x).$$

Ensuite, sa fonction caractéristique vérifie :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = E(\cos(tM_n)) = E(\cos(\frac{t}{n} S_n)) = \Phi_{S_n}(\frac{t}{n})$$

$$= (\Phi_{X_1}(\frac{t}{n}))^n \quad \text{d'après le point précédent.}$$

Conclusion : M_n est une variable aléatoire symétrique pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, dont la fonction caractéristique est donnée par :

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(\frac{t}{n}) \right)^n.$$

23) Fixons un réel $t \in \mathbb{R}$ et étudions la limite de $\Phi_{M_n}(t)$ quand $n \rightarrow \infty$. D'après la question précédente :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(\Phi_{X_1}(\frac{t}{n}) \right)^n.$$

La question Q20 donne un développement asymptotique de Φ_{X_1} au voisinage de 0⁺ : **on traite donc d'abord les cas où $t > 0$.**

Puisque $t/n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0^+$, on a :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi_{M_n}(t) = \left(1 - \frac{\alpha \pi}{2} \cdot \frac{t}{n} + o\left(\frac{t}{n}\right) \right)^n$$

$$= \exp \left[n \ln \left(1 - \frac{\alpha \pi t}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right] \quad (t \text{ est fixé})$$

$$= \exp \left[n \left(-\frac{\alpha \pi t}{2n} + o\left(\frac{1}{n}\right) \right) \right]$$

$$= \exp \left[-\frac{\alpha \pi t}{2} + o(1) \right]$$

$$\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha \pi t}{2}\right).$$

Si maintenant $t < 0$, on se ramène au cas $t > 0$ grâce à la parité de la fonction Φ_{M_n} :

$$\Phi_{M_n}(t) = \Phi_{M_n}(|t|) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\alpha \pi |t|}{2}\right).$$

Cette expression de la limite est valable également dans le cas $t > 0$, mais aussi $t = 0$ (pour lequel $\Phi_{M_n}(0) = 1 = \exp(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$).

Conclusion : $\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\pi \alpha |t|}{2}\right).$

24) Par l'absurde : supposons que la suite $(\Phi_{M_n})_{n \geq 1}$ converge uniformément sur $\mathbb{R}$ vers la fonction $h: t \mapsto \exp(-\frac{\alpha \pi |t|}{2})$.

Étudions la limite de la suite $(\Phi_{M_n}(2\pi n))_{n \geq 1}$ de deux manières :

* Tout d'abord, on compare $\Phi_{M_n}(2\pi n)$ à $h(2\pi n)$ en exploitant la convergence uniforme :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad |\Phi_{M_n}(2\pi n)| &= |h(2\pi n) + (\Phi_{M_n}(2\pi n) - h(2\pi n))| \\ &\leq |h(2\pi n)| + |\Phi_{M_n}(2\pi n) - h(2\pi n)| \\ &\leq |h(2\pi n)| + \|\Phi_{M_n} - h\|_{\infty}^{\mathbb{R}}. \end{aligned}$$

Puisque cette dernière expression tend vers 0 quand $n \rightarrow \infty$ (expression de $h(x)$ et convergence uniforme de Φ_{M_n} vers h), d'après le théorème des gendarmes :

$$\Phi_{M_n}(2\pi n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0.$$

* Toutefois, l'expression de Φ_{M_n} trouvée à la question **Q22** nous donne :

$$\begin{aligned} \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \Phi_{M_n}(2\pi n) &= (\Phi_{X_1}(2\pi))^n \\ \text{mais : } \Phi_{X_1}(2\pi) &= E(\cos(2\pi X_1)) = E(1) = 1. \end{aligned}$$

$\uparrow$
 X_1 est une variable entière

On obtient ainsi : $\Phi_{M_n}(2\pi n) = 1^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$: cela contredit le résultat précédent.

Conclusion : La suite $(\Phi_{M_n})_{n \geq 1}$ ne converge pas uniformément sur $\mathbb{R}$.

Commentaire

Dans ce problème, on a établi que les fonctions caractéristiques des variables M_n convergent simplement sur $\mathbb{R}$:

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \Phi_{M_n}(t) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(-\frac{\pi \alpha |t|}{2}\right).$$

À partir de là, des théorèmes d'analyse de Fourier permettraient de démontrer que la suite $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers une variable de Cauchy de paramètre $\frac{\pi \alpha}{2}$:

- Une telle variable aléatoire Z est une variable aléatoire à densité : elle n'est pas discrète car l'ensemble de ses valeurs possibles n'est pas dénombrable.

Dans ce cas, $Z(\Omega) = \mathbb{R}$ et la loi de Z est définie par une fonction densité, ici :

$$\begin{aligned} f: \mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ u &\longmapsto \frac{\alpha}{2} \cdot \frac{1}{u^2 + \left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Cette fonction f est positive, d'intégrale sur $\mathbb{R}$ égale à 1.

Elle décrit les probabilités associées à la variable aléatoire Z par la relation :

$$\forall [a, b] \subset \mathbb{R}: \quad P(a \leq Z \leq b) = \int_a^b f(t) dt = \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)^2}.$$

- Dire que la suite de variables aléatoires $(M_n)_{n \geq 1}$ converge en loi vers Z signifie que pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(a \leq M_n \leq b) &\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} P(a \leq Z \leq b) \\ &= \frac{\alpha}{2} \int_a^b \frac{du}{u^2 + \left(\frac{\pi \alpha}{2}\right)^2}. \end{aligned}$$

Intuitivement : quand n est « grand », la loi de M_n « ressemble très fort » à la loi de Z . Autrement dit : les calculs de probabilités impliquant concernant la variable M_n peuvent être menés en remplaçant M_n par Z , au prix d'une légère approximation quand n est grand.

— FIN DU PROBLÈME —