

Exercice 1

E3A PSI 2023

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2, \\ p_{ij} = P([X=i] \cap [Y=j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

- 1) Déterminer la valeur du réel α .
- 2) Déterminer les lois des variables aléatoires X et Y .
- 3) Les deux variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
- 4) Reconnaître la loi de la variable aléatoire $Z = X - 1$.
En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
- 5) On note $B \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ la matrice dont le coefficient de la i^{e} ligne et de la j^{e} colonne est :

$$b_{i,j} = P_{[X=j]}(Y=i).$$

Calculer les $b_{i,j}$.

- 6) Déterminer $\text{rg}(B)$ et les sous-espaces vectoriels $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$.
- 7) Déterminer une matrice-colonne $C \in \mathcal{M}_{n+1,1}(\mathbb{R})$ et une matrice-ligne $L \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$ telles que $B = CL$.
- 8) Démontrer que $B^2 = \text{tr}(B)B$.
- 9) Déterminer les valeurs propres de B .
La matrice B est-elle diagonalisable ?

Exercice 2

INP PSI 2025

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{T}, P)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

On note $G_X: t \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} P(X=n) t^n$ la fonction génératrice de X .

L'objectif de cet exercice est d'affiner une majoration donnée par l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à une loi de Poisson.

- 1) Sans démonstration, donner l'espérance et la variance de la variable aléatoire X .
- 2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, donner une majoration de $P(|X - \lambda| \geq \lambda)$.
- 3) Justifier que l'événement $\{X \geq 2\lambda\}$ est inclus dans l'événement $\{|X - \lambda| \geq \lambda\}$.

- 4) En déduire la majoration suivante :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{1}{\lambda}. \quad (1)$$

- 5) Donner l'ensemble de définition de G_X .
- 6) Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, $G_X(t) = e^{\lambda(t-1)}$.
- 7) On suppose que $t \geq 1$.
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}$, on a :

$$P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

- 8) En déduire que :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda. \quad (2)$$

- 9) On admet que $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$.
Quelle majoration (1) ou (2) de $P(X \geq 2\lambda)$ est la plus précise ?

Problème

INP PSI 2020

Les matrices de Kac

• Notations

- Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients réels et $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ désigne l'ensemble des matrices carrées de taille n à coefficients complexes.
- Dans tout ce problème, les vecteurs de $\mathbb{R}^n$ seront notés en colonnes.
- La lettre i désigne le nombre complexe usuel vérifiant $i^2 = -1$.
On s'interdira d'utiliser cette lettre pour tout autre usage !

• Objectifs

Le but de ce problème est d'étudier quelques propriétés spectrales de deux matrices $A_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ et $B_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$ introduites par Mark Kac au milieu du XX^e siècle. Ces liens ont été mis en évidence par Alan Edelman et Eric Kostlan au début des années 2000.

Ce problème est divisé en quatre parties largement indépendantes. La **Partie I** introduit les matrices de Kac en taille 3 et met en évidence les propriétés qui seront démontrées en taille quelconque dans les **Parties II et III**.

I – La dimension 3

On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 1) Déterminer le polynôme caractéristique $\chi_A = \det(X I_3 - A)$ de A et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$.
- 2) En déduire que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Donner la liste des valeurs propres de A et la dimension des espaces propres correspondants.
On ne demande pas de déterminer les espaces propres de A dans cette question.
- 3) Déterminer le polynôme caractéristique χ_B de B et le décomposer en facteurs irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, puis dans $\mathbb{C}[X]$. Vérifier que $\chi_A(X) = i \chi_B(iX)$.
- 4) La matrice B est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Donner la liste des valeurs propres réelles puis complexes de B et la dimension des espaces propres sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ correspondants.
On ne demande pas de déterminer les espaces propres de B dans cette question.

On considère :

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{C}).$$

- 5) Exprimer $D^{-1}AD$ à l'aide de la matrice B .

$$\text{Soit } \Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

- 6) Calculer $\Delta^{-1}A\Delta$. En déduire à nouveau que la matrice A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

II – Étude d'un endomorphisme

• Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice B_n et on en étudie ses propriétés spectrales à l'aide d'un endomorphisme de dérivation.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $f_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_k(x) = \cos^k(x) \sin^{n-k}(x).$$

On note V_n le $\mathbb{C}$ -espace vectoriel défini par :

$$V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n) = \left\{ \sum_{k=0}^n \lambda_k f_k \mid (\lambda_0, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^{n+1} \right\}.$$

- 7) Montrer que la famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. En déduire la dimension de l'espace vectoriel complexe V_n .
- 8) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, montrer que $f'_k \in V_n$. En déduire que :

$$\begin{aligned} \varphi_n : V_n &\longrightarrow V_n \\ f &\longmapsto \varphi_n(f) = f' \end{aligned}$$

définit un endomorphisme de V_n et que sa matrice B_n

dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est la matrice :

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ la fonction définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = e^{i(2k-n)x}.$$

- 9) Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) = (\cos x + i \sin x)^k (\cos x - i \sin x)^{n-k}.$$

- 10) En déduire, à l'aide de la formule du binôme de Newton, que : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad g_k \in V_n$.
- 11) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, calculer g'_k . En déduire que φ_n est diagonalisable. Donner la liste des valeurs propres complexes de φ_n et décrire les espaces propres correspondants.
- 12) Pour quelles valeurs de n l'endomorphisme φ_n est-il un automorphisme de V_n ?
- 13) Écrire la décomposition de g_n dans la base $(f_0, \dots, f_n)$ et en déduire que :

$$\text{Ker}(B_n - i n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $q_k = i^{n-k} \binom{n}{k}$.

III – Les matrices de Kac de taille $n + 1$

• Objectifs

Dans cette partie, on introduit la matrice A_n . On utilise les résultats de la **Partie II** pour étudier les propriétés spectrales de la matrice A_n .

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ un entier naturel fixé. On note A_n la matrice tridiagonale suivante :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R}).$$

Le terme général $a_{k,\ell}$ de la matrice A_n vérifie donc :

- * $a_{k,k+1} = k$ si $1 \leq k \leq n$,
- * $a_{k,k-1} = n - k + 2$ si $2 \leq k \leq n + 1$,
- * $a_{k,\ell} = 0$ pour tous les couples $(k, \ell) \in \llbracket 1, n + 1 \rrbracket^2$ non couverts par les formules précédentes.

On note enfin $D_n \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice diagonale dont le k -ième terme diagonal $d_{k,k}$ vérifie $d_{k,k} = i^{k-1}$.

- 14)** Soient $M = (m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice de taille p et $D = (d_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p} \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ une matrice diagonale de taille p .

Exprimer le terme général de la matrice DM en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$, puis exprimer le terme général de la matrice MD en fonction des $m_{k,\ell}$ et des $d_{k,\ell}$.

- 15)** Montrer que $D_n^{-1} A_n D_n = -i B_n$ où B_n est la matrice déterminée dans la **Partie II**. En déduire une relation

simple entre $\chi_{A_n}(X)$ et $\chi_{B_n}(iX)$, où χ_{A_n} et χ_{B_n} sont les polynômes caractéristiques respectifs de A_n et B_n .

- 16)** En déduire, à l'aide de la **Partie II**, que A_n est diagonalisable sur $\mathbb{R}$, que les valeurs propres de A_n sont les entiers de la forme $2k - n$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et que :

$$\text{Ker}(A_n - n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix},$$

où pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on note $p_k = \binom{n}{k}$.