

Problème

Mines-Ponts PSI 2022 épr. 2

Matrices de Hurwitz

• Notations

- * n désigne un entier naturel non nul.
- * $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.
- * $M_n(\mathbb{K})$ désigne l'espace vectoriel des matrices carrées de taille n et à coefficients dans $\mathbb{K}$ et, pour une matrice M de $M_n(\mathbb{K})$, on note χ_M son polynôme caractéristique.
- * $\mathbb{K}[X]$ désigne l'espace vectoriel des polynômes à coefficients dans $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}_n[X]$ désigne le sous-espace vectoriel de $\mathbb{K}[X]$ des polynômes de degré inférieur ou égal à n .
- * $\operatorname{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$.
- * On désigne par $\langle \cdot, \cdot \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$ et $\|\cdot\|$ sa norme associée :

$$\langle (x_1, x_2, \dots, x_n), (y_1, y_2, \dots, y_n) \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$$

$$\text{et } \|(x_1, x_2, \dots, x_n)\| = \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2}.$$

- * On confondra abusivement, pour le calcul matriciel, le vecteur $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{K}^n$ avec la matrice colonne $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ de ses coordonnées dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$.
- * Pour $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ de $\mathbb{C}^n$, on notera son conjugué $\bar{X} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, sa partie réelle $\operatorname{Re}(X) = \frac{X + \bar{X}}{2}$ et sa partie imaginaire $\operatorname{Im}(X) = \frac{X - \bar{X}}{2i}$.
- * Si $M \in M_n(\mathbb{R})$, et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, l'endomorphisme de $\mathbb{K}^n$ canoniquement associé à M est $\mathbb{K}^n \longrightarrow \mathbb{K}^n$
 $X \longmapsto MX$.

• Rappels

- * Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{K})$ sont **semblables dans** $M_n(\mathbb{K})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{K})$ inversible telle que $A = P B P^{-1}$.
Deux matrices A et B de $M_n(\mathbb{R})$ sont **semblables dans** $M_n(\mathbb{C})$ si il existe une matrice P de $M_n(\mathbb{C})$ inversible telle que $A = P B P^{-1}$.
- * Soient R et S deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. R est un **diviseur** de S s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ tel que $S = QR$. Les **polynômes irréductibles de** $\mathbb{K}[X]$ sont les polynômes de degré 1 et les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

• Objectifs

- Il s'agit d'établir pour un système différentiel linéaire d'ordre 1, une équivalence entre des propriétés qualitatives des solutions et des conditions portant sur la nature de la matrice associée à ce système et de son polynôme caractéristique.
- La partie 1 concerne l'étude de propriétés de matrices semi-simples.
- La partie 2 propose de trouver une caractérisation de matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.
- La partie 3 est consacrée à l'étude des polynômes de Hurwitz.
- Les parties 1, 2 et 3 sont indépendantes.
- La partie 4, sur l'équivalence annoncée pour les systèmes différentiels, utilise des résultats des parties 1 et 3.

I – Matrices semi-simples

Définition. Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Définition. Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe

- * deux entiers naturels p et q ;
- * q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
- * q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
- * une matrice D diagonale de $M_p(\mathbb{R})$

tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice-bloc suivante :

$$M = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & M(a_2, b_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & M(a_q, b_q) \end{bmatrix}$$

$$\text{où : } \forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}.$$

Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

Soit A la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.

1) La matrice A est-elle semi-simple ?

Soit B la matrice de $M_2(\mathbb{R})$ définie par $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$.

2) Démontrer que B est semi-simple et en déduire l'existence d'une matrice Q de $M_2(\mathbb{R})$ inversible et de deux réels a et b à déterminer tels que :

$$B = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

Indication : on pourra, pour un vecteur propre V de B , introduire les vecteurs $W_1 = \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 = \operatorname{Im}(V)$.

Soit M une matrice de $M_2(\mathbb{R})$.

On suppose dans la question 3 seulement que M admet deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}^*$.

- 3) Démontrer que M est semi-simple et semblable dans $M_2(\mathbb{R})$ à la matrice $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.
- 4) Démontrer que M est semi-simple si, et seulement si, l'une des conditions suivantes est satisfaite :
 - * M est diagonalisable dans $M_2(\mathbb{R})$;
 - * χ_M admet deux racines complexes conjuguées de partie imaginaire non nulle.
- 5) Soit N une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ semblable à une matrice presque diagonale. Démontrer que N est semi-simple.
- 6) Soit N une matrice de $M_n(\mathbb{R})$. Donner la forme factorisée de χ_N dans $\mathbb{C}[X]$ en précisant, dans les notations, les racines réelles et les racines complexes conjuguées. En déduire que si N est semi-simple alors elle est semblable dans $M_n(\mathbb{R})$ à une matrice presque diagonale.

II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$

Dans cette partie, E désigne un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et u désigne un endomorphisme de E .

On suppose dans les questions 7), 8) et 9) que u est diagonalisable. On note $\mathcal{B} = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ une base de E formée de vecteurs propres de u . Soit F un sous-espace vectoriel de E , différent de $\{0_E\}$ et de E .

- 7) Démontrer qu'il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$ et qu'alors F et la droite vectorielle engendrée par v_k sont en somme directe. On note alors :

$$\mathcal{A} = \left\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \mid \begin{array}{l} \text{tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \end{array} \right\}$$

et $\mathcal{L} = \{p \in \mathbb{N}^*, \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}$.

- 8) Démontrer que $\mathcal{L}$ admet un plus grand élément que l'on nommera r .
- 9) Démontrer que F admet un supplémentaire G dans E stable par u .
- 10) On suppose que tout sous-espace vectoriel de E possède un supplémentaire dans E stable par u . Démontrer que u est diagonalisable. En déduire une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$.

Indication : on pourra raisonner par l'absurde et introduire un sous-espace vectoriel, dont on justifiera l'existence, de dimension $n - 1$ et contenant la somme des sous-espaces propres de u .

III – Polynômes de Hurwitz

Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **polynôme de Hurwitz** si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à $\operatorname{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \operatorname{Re}(z) < 0\}$.

Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit à **coefficients strictement positifs** s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $a_k > 0$.

- 11) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Démontrer que si α est une racine d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, alors $\alpha < 0$.
- 12) Démontrer que tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.
- 13) Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. Démontrer que tous les coefficients de P sont strictement positifs.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in \llbracket 1,n \rrbracket^2} (X - z_k - z_l).$$

- 14) On suppose $n = 2$ et $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Si les coefficients de Q sont strictement positifs, P est-il alors un polynôme de Hurwitz ?
- 15) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$ dont tous les coefficients sont strictement positifs. Démontrer que les coefficients du produit AB sont également strictement positifs.
- 16) Démontrer que si P et Q sont dans $\mathbb{R}[X]$, alors on a l'équivalence : P est un polynôme de Hurwitz si, et seulement si, les coefficients de P et Q sont strictement positifs.

IV – Système différentiel de matrice associée semi-simple

Soit $M \in M_n(\mathbb{R})$. On note (S) le système différentiel

$$(S) \quad X' = M X,$$

où X est une application de la variable t de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}^n$, dérivable sur $\mathbb{R}$.

Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que M est semblable à T dans $M_n(\mathbb{R})$ et l'on note (S^*) le système différentiel

$$(S^*) \quad Y' = T Y.$$

- 17) Démontrer que les coordonnées d'une solution X de (S) sont combinaisons linéaires des coordonnées d'une solution Y de (S^*) .

Dans les deux questions suivantes 18 et 19, on suppose $n = 2$, on note alors $X = (x, y)$ où x et y sont deux fonctions dérivables de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et l'on pose $z = x + iy$.

On suppose qu'il existe a et b réels tels que $M = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

- 18) Démontrer que X est solution de (S) si, et seulement si, z est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1 à déterminer. En déduire une expression des coordonnées des solutions de (S) en fonction de t .
Résoudre le système $X' = B X$ où B est la matrice de la question 2).

19) Soit $M \in M_2(\mathbb{R})$ semi-simple. Donner une condition nécessaire et suffisante, portant sur les parties réelles et imaginaires des valeurs propres de M , pour que toute solution de (S) ait chacune de ses coordonnées qui tende vers 0 en $+\infty$.

On reprend le cas général $n \geq 2$ et on considère les assertions suivantes :

(A₁) χ_M est un polynôme de Hurwitz ;

(A₂) Les solutions de (S) tendent vers $0_{\mathbb{R}^n}$ quand t tend vers $+\infty$;

(A₃) Il existe $\alpha > 0$, il existe $k > 0$ tels que pour toute solution Φ de (S),

$$\forall t \geq 0 : \quad \|\Phi(t)\| \leq k e^{-\alpha t} \|\Phi(0)\|.$$

Soit $T \in M_n(\mathbb{R})$. On suppose que T vérifie la condition suivante :

$$\exists \beta \in \mathbb{R}_+^*, \forall X \in \mathbb{R}^n : \quad \langle TX, X \rangle \leq -\beta \|X\|^2. \quad (\text{C})$$

20) Démontrer que A₃ est vraie avec $k = 1$ pour toute solution Φ de (S*).

Indication : on pourra introduire la fonction $t \mapsto e^{2\beta t} \|\Phi(t)\|^2$.

21) On suppose que $M \in M_n(\mathbb{R})$ est semi-simple. Démontrer que les assertions A₁, A₂ et A₃ sont équivalentes.

Indication : on pourra commencer par montrer que A₃ implique A₂.