VII Propagation d'une onde cylindrique dans le vide

$$\vec{E} = f(r)\, e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_z} \qquad k = \omega/c$$

1°) $\vec{rot}\,\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$

$$\left(= -\frac{\partial}{\partial r}\left(f(r)\, e^{i(\omega t - kr)}\right)\vec{e_\theta} = -(f' - ikf)\, e^{i(\omega t - kr)} \vec{e_\theta}\right.$$

$$= -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \Rightarrow \vec{B} = \frac{1}{i\omega}(f' - ikf)\, e^{i(\omega t - kr)} \vec{e_\theta}$$ en ignorant les champs statiques.

2°) MA $\vec{rot}\,\vec{B} = \varepsilon_0 \mu_0 \dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{1}{c^2}\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \dfrac{i\omega}{c^2} f(r)\, e^{i(\omega t - kr)} \vec{u_z}$

$$= \frac{1}{r}\frac{d}{dr}\left(\frac{r}{i\omega}(f' - ikf)\, e^{i(\omega t - kr)}\right)\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{i\omega}\frac{1}{r}\left(-ikr(f' - ikf) + (f' - ikf) + r(f'' - ikf')\right) = \frac{i\omega}{c^2} f$$

$$r f'' + f'(1 - 2ikr) - ikf(1 - ikr) = -k^2 r f$$

3°) $\vec{E} = f(r)\cos(\omega t - kr)\vec{u_z}$ (champ réel).

$$\vec{B} = \frac{1}{\omega}\left(f' \sin(\omega t - kr) - kf\cos(\omega t - kr)\right)\vec{e_\theta}$$

D'où $\vec{\Pi} = \dfrac{\vec{E} \wedge \vec{B}}{\mu_0} = \dfrac{1}{\mu_0 \omega}\left(-ff' \sin(\omega t - kr)\cos(\omega t - kr) + kf^2\cos^2(\omega t - kr)\right)\vec{e_r}$

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{k}{2\mu_0 \omega} f^2(r)\, \vec{e_r}$$

$$P = 2\pi r h \frac{k}{2\mu_0 \omega} f^2(r)$$ (Puissance rayonnée à travers le cylindre de hauteur h de rayon r, d'axe Oz).

P ne dépend pas de r car aucune puissance ne disparaît (ou n'est créée) entre deux cylindres de rayons r_1 et r_2.

Pour $h = 1$ m $P = P_0 = \dfrac{\pi r k f^2(r)}{\mu_0 \omega}$

$$\Rightarrow f(r) = \sqrt{\frac{\mu_0 c P_0}{\pi r}}$$