

Compléments sur les ondes – Corrigé détaillé

LVH MP*/MPI*

2025–2026

I. Ondes dans une ligne électrique (constantes réparties), impédance caractéristique

Modèle. Sur un élément de longueur dx :

$$dL = \Lambda dx, \quad dC = \Gamma dx,$$

où Λ est l'inductance linéique (H/m) et Γ la capacité linéique (F/m). On note $u(x, t)$ la tension (entre les deux conducteurs) et $i(x, t)$ le courant. On rappelle :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda\Gamma}}, \quad Z_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}.$$

1) Écrire les relations différentielles entre u et i

Loi des mailles. Sur un segment de longueur dx , la chute de tension sur l'inductance série dL vaut $du = dL \frac{\partial i}{\partial t}$.

$$u(x, t) - u(x + dx, t) = \Lambda dx \frac{\partial i}{\partial t}.$$

d'où

$$\boxed{\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}}.$$

Loi des nœuds. Le courant dérivé dans la capacité dC vaut $di = dC \frac{\partial u}{\partial t}$.
Ainsi :

$$i(x, t) - i(x + dx, t) = \Gamma dx \frac{\partial u}{\partial t} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial i}{\partial x} = -\Gamma \frac{\partial u}{\partial t}}.$$

2) Équation de propagation (équation de d'Alembert)

On dérive la première par rapport à x et on élimine i avec la seconde :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial i}{\partial x} \right) = -\Lambda \frac{\partial}{\partial t} \left(-\Gamma \frac{\partial u}{\partial t} \right) = \Lambda \Gamma \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0}, \quad c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}.$$

Même démarche pour i :

$$\boxed{\frac{\partial^2 i}{\partial x^2} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 i}{\partial t^2} = 0}.$$

C'est l'équation de d'Alembert.

3) Formes des solutions et interprétation. Calcul de ρ et de la vitesse

Solutions harmoniques. Pour une excitation monochromatique de pulsation ω , on cherche des solutions sous forme d'ondes progressives :

$$i(x, t) = i_0 e^{j(\omega t - kx)} + i_1 e^{j(\omega t + kx)}.$$

La relation de dispersion se déduit de l'équation de d'Alembert :

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

Donc la vitesse de propagation est

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{k} = c = \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}}}.$$

Expression de u et calcul de ρ . On utilise $\frac{\partial u}{\partial x} = -\Lambda \frac{\partial i}{\partial t}$.

Pour le terme $e^{j(\omega t - kx)}$:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -jk u, \quad \frac{\partial i}{\partial t} = j\omega i$$

donc

$$-jk u = -\Lambda (j\omega) i \quad \Rightarrow \quad u = \frac{\Lambda \omega}{k} i = \Lambda c i.$$

Or $\Lambda c = \Lambda \frac{1}{\sqrt{\Lambda \Gamma}} = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}} = Z_0$. Ainsi pour l'onde allant vers $+x$:

$$u_+ = Z_0 i_+.$$

Pour l'onde vers $-x$, le signe s'inverse (on le voit en remplaçant $-k$ par $+k$) :

$$u_- = -Z_0 i_-.$$

On peut donc écrire

$$\boxed{u(x, t) = \rho i_0 e^{j(\omega t - kx)} - \rho i_1 e^{j(\omega t + kx)}}, \quad \boxed{\rho = Z_0 = \sqrt{\frac{\Lambda}{\Gamma}}}.$$

Interprétation physique. Le terme en $e^{j(\omega t - kx)}$ est une **onde progressive vers l'avant** (vers $+x$), celui en $e^{j(\omega t + kx)}$ une **onde réfléchie** (vers $-x$).

4) Ligne de longueur d fermée sur une impédance Z : déterminer i et u

On impose la condition à l'extrémité $x = d$:

$$Z = \frac{u(d, t)}{i(d, t)}.$$

On calcule

$$\begin{aligned} i(d, t) &= i_0 e^{j(\omega t - kd)} + i_1 e^{j(\omega t + kd)}, \\ u(d, t) &= Z_0 (i_0 e^{j(\omega t - kd)} - i_1 e^{j(\omega t + kd)}). \end{aligned}$$

En factorisant $e^{j\omega t}$, on obtient une relation entre i_1 et i_0 :

$$Z(i_0 e^{-jkd} + i_1 e^{+jkd}) = Z_0(i_0 e^{-jkd} - i_1 e^{+jkd}).$$

Donc

$$(Z - Z_0)i_0 e^{-jkd} = -(Z + Z_0)i_1 e^{+jkd}$$

$$\boxed{\frac{i_1}{i_0} = \Gamma_L e^{-2jkd}}, \quad \boxed{\Gamma_L = \frac{Z_0 - Z}{Z_0 + Z}}.$$

Γ_L est le **coefficient de réflexion en courant** (à la charge). Ainsi

$$\boxed{\begin{aligned} i(x, t) &= i_0 e^{j(\omega t - kx)} + i_0 \Gamma_L e^{-2jkd} e^{j(\omega t + kx)}, \\ u(x, t) &= Z_0 i_0 e^{j(\omega t - kx)} - Z_0 i_0 \Gamma_L e^{-2jkd} e^{j(\omega t + kx)}. \end{aligned}}$$

5) Impédance vue depuis x : $Z_\ell(x) = u(x)/i(x)$; impédance caractéristique

On écrit (en factorisant $e^{j\omega t}$) :

$$Z_\ell(x) = Z_0 \frac{e^{-jkx} - \Gamma_L e^{-2jkd} e^{jkx}}{e^{-jkx} + \Gamma_L e^{-2jkd} e^{jkx}}.$$

En multipliant numérateur et dénominateur par e^{jkx} :

$$Z_\ell(x) = Z_0 \frac{1 - \Gamma_L e^{-2jk(d-x)}}{1 + \Gamma_L e^{-2jk(d-x)}}.$$

Quand $Z_\ell(x)$ est-elle indépendante de x ? Il faut $\Gamma_L = 0$, donc

$$\boxed{Z = Z_0} \quad (\text{adaptation : impédance caractéristique}).$$

Conséquence dans i et u . Si $Z = Z_0$, alors $\Gamma_L = 0$: **pas d'onde réfléchie.**

$$\boxed{i(x, t) = i_0 e^{j(\omega t - kx)}, \quad u(x, t) = Z_0 i_0 e^{j(\omega t - kx)}}.$$

On observe une propagation *pure* vers l'avant (ligne adaptée, pas d'ondes stationnaires).

II. Ondes transverses dans une corde vibrante

Hypothèses. Corde de masse linéique λ , tension T_0 , petites pentes $|\alpha| \ll 1$. Déplacement transverse $y(x, t)$ dans le plan (Oxy) .

1) Relier α et une dérivée de y ; montrer que T ne dépend pas de x

Lien géométrique. La pente vaut $\tan \alpha \simeq \alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$, donc

$$\boxed{\alpha(x, t) \simeq \frac{\partial y}{\partial x}}.$$

PFD sur un élément dx . Sur l'élément, la tension en x vaut $\vec{T}(x) = T(x) \vec{t}(x)$ et en $x + dx$ vaut $\vec{T}(x + dx)$. Projection sur x : pour $|\alpha| \ll 1$, la composante horizontale vaut $T \cos \alpha \simeq T$. La somme des forces selon x donne (pas d'accélération longitudinale dans le modèle transverse) :

$$T(x + dx, t) - T(x, t) \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{T(x, t) = T_0 \text{ constante (en } x)}.$$

On suppose de plus T_0 indépendante du temps (énoncé).

2) Unités et interprétation de $f(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$ puis de $p(x, t) = -T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$

Pour $f(x, t) = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$. $\frac{\partial y}{\partial x}$ est sans dimension (pente). Donc f a même unité que T_0 , soit le **newton**.

La composante verticale de la tension vaut $T_0 \sin \alpha \simeq T_0 \alpha \simeq T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$. Ainsi,

$$f = -T_0 \frac{\partial y}{\partial x}$$

représente (au signe près) la composante verticale de la tension en x exercée par la partie à gauche de x sur la partie à droite de x .

Pour $p(x, t) = -T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)$. $\frac{\partial y}{\partial t}$ a pour unité m/s, donc p a pour unité

$$\text{N} \times \text{m s}^{-1} = \text{W}.$$

C'est une **puissance** : précisément, $p(x, t)$ est la puissance de la force qu'exerce la partie à gauche de x sur la partie à droite de x .

3) Équation de propagation et expression de c ; forme générale des solutions

PFD transverse. La force transverse résultante sur l'élément dx est (au 1er ordre en α) :

$$T_0 \sin \alpha(x + dx, t) - T_0 \sin \alpha(x, t) \simeq T_0 (\alpha(x + dx, t) - \alpha(x, t)) \simeq T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx.$$

Or $\alpha \simeq \frac{\partial y}{\partial x}$, donc $\frac{\partial \alpha}{\partial x} \simeq \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$. La masse de l'élément est λdx , l'accélération transverse $\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$:

$$\lambda dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}}, \quad \boxed{c = \sqrt{\frac{T_0}{\lambda}}}.$$

Solutions générales (d'Alembert).

$$\boxed{y(x, t) = F(x - ct) + G(x + ct)}.$$

F est une onde se propageant dans le sens des x croissants, G une onde se propageant selon les x décroissants.

4) Énergies et bilan local : relation entre $\frac{\partial p}{\partial x}$, $\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t}$, $\frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t}$

On définit

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2, \quad \varepsilon_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

Unités. λ est en kg/m, donc ε_c est en

$$\frac{\text{kg}}{\text{m}} \times \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} = \frac{\text{kg m}}{\text{s}^2} = \text{N} = \text{J/m}.$$

Même unité pour ε_p . Ce sont des **densités d'énergie linéiques** (énergie par unité de longueur), plus précisément ε_c est la densité linéique d'énergie cinétique, et ε_p , la densité linéique d'énergie élastique.

Relation locale (conservation de l'énergie). On dérive :

$$\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} = \lambda \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}, \quad \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) = T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

Et

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} \left[-T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right] = -T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} - T_0 \frac{\partial y}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right).$$

En utilisant l'équation d'onde $\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}$, on a

$$-T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \frac{\partial y}{\partial t} = -\lambda \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \frac{\partial y}{\partial t} = -\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t}.$$

Donc

$$\boxed{\frac{\partial \varepsilon_c}{\partial t} + \frac{\partial \varepsilon_p}{\partial t} = -\frac{\partial p}{\partial x}}.$$

Interprétation. C'est un **bilan local d'énergie** : variation temporelle de l'énergie linéique totale ($\varepsilon_c + \varepsilon_p$) est égale à la puissance algébrique reçue en x de la part de la corde à gauche de x , et en $x + dx$ de la part de la corde à droite de $x + dx$.

Autrement dit, l'énergie mécanique est **transportée** le long de la corde.

5) Onde harmonique $y(x, t) = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$: k , moyennes, vitesse de transport

On suppose $k > 0$ (propagation vers $+x$). L'équation d'onde impose

$$\omega^2 = c^2 k^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = \frac{\omega}{c}}.$$

Flux de puissance p . Avec la représentation complexe, on peut utiliser la moyenne temporelle :

$$\langle p \rangle = \left\langle -T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right) \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right) \right\rangle.$$

Pour $y = u_0 e^{i(\omega t - kx)}$, on a

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -ik y, \quad \frac{\partial y}{\partial t} = i\omega y.$$

En réel, la moyenne donne (résultat standard) :

$$\boxed{\langle p \rangle = \frac{1}{2} T_0 \omega k |u_0|^2}.$$

(positif : l'énergie va vers $+x$.)

Énergies moyennes.

$$\varepsilon_c = \frac{1}{2} \lambda \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2, \quad \varepsilon_p = \frac{1}{2} T_0 \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2.$$

Les moyennes temporelles valent :

$$\boxed{\langle \varepsilon_c \rangle = \frac{1}{4} \lambda \omega^2 |u_0|^2}, \quad \boxed{\langle \varepsilon_p \rangle = \frac{1}{4} T_0 k^2 |u_0|^2}.$$

Comme $T_0 k^2 = \lambda \omega^2$ (dispersion), on obtient

$$\boxed{\langle \varepsilon_c \rangle = \langle \varepsilon_p \rangle}.$$

Vitesse de transport de l'énergie. On définit

$$v_E = \frac{\langle p \rangle}{\langle \varepsilon_c + \varepsilon_p \rangle}.$$

Or

$$\langle \varepsilon_c + \varepsilon_p \rangle = \frac{1}{4} \lambda \omega^2 |u_0|^2 + \frac{1}{4} T_0 k^2 |u_0|^2 = \frac{1}{2} \lambda \omega^2 |u_0|^2.$$

Donc

$$v_E = \frac{\frac{1}{2} T_0 \omega k |u_0|^2}{\frac{1}{2} \lambda \omega^2 |u_0|^2} = \frac{T_0 k}{\lambda \omega}.$$

Avec $k/\omega = 1/c$ et $c = \sqrt{T_0/\lambda}$:

$$\boxed{v_E = c}.$$

Sur une corde idéale (non dispersive), vitesse de phase = vitesse de groupe = vitesse de transport d'énergie.