

Corrigé du devoir maison n° 6

Exercice 1

E3A PSI 2023

Soit n un entier naturel non nul.

On donne, dans un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ deux variables aléatoires X et Y prenant leurs valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$.

On suppose qu'il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2 : p_{ij} = P([X = i] \cap [Y = j]) = \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1}.$$

- 1) Puisque X et Y sont à valeurs dans $\llbracket 1, n+1 \rrbracket$, la famille $([X = i] \cap [Y = j])_{(i,j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2}$ est un système complet d'événements, donc :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} P([X = i] \cap [Y = j]) = 1.$$

$$\begin{aligned} \text{Or : } \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} P([X = i] \cap [Y = j]) &= \sum_{i=1}^{n+1} \sum_{j=1}^{n+1} \alpha \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \alpha \sum_{i=1}^{n+1} \left(\binom{n}{i-1} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \right) \left(\sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{j-1} \right) \\ &= \alpha \left(\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} 1^i 1^{n-i} \right) \left(\sum_{j=0}^n \binom{n}{j} 1^j 1^{n-j} \right) \quad (\text{translations d'indices}) \\ &= \alpha (1+1)^n (1+1)^n \quad (\text{binôme de Newton}) \\ &= \alpha \cdot 4^n. \end{aligned}$$

Conclusion : On en déduit que $\alpha = \frac{1}{4^n}$.

- 2) **Déterminons la loi de X .**

On sait que $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. Fixons $i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et calculons $P(X = i)$.

Par la formule des probabilités totales sur le s.c.e. engendré par Y — qui est $([Y = j])_{1 \leq j \leq n+1}$:

$$\begin{aligned} P(X = i) &= \sum_{j=1}^{n+1} P([X = i] \cap [Y = j]) = \frac{1}{4^n} \sum_{j=1}^{n+1} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} \\ &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} = \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \cdot 2^n = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}. \end{aligned}$$

Par la symétrie du problème, on obtient la loi de Y de la même manière et on obtient le même résultat.

Conclusion : La loi de la variable X est donnée par :

$$X(\Omega) \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket \quad \text{et} \quad \forall i \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket : P(X = i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}.$$

La loi de Y est identique à la loi de X .

✿ **Remarque.** La loi commune des variables X et Y est aussi la loi d'une variable aléatoire $Z + 1$ où $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$.

- 3) Remarquons que, pour tout $i, j \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} P([X = i] \cap [Y = j]) &= \frac{1}{4^n} \binom{n}{i-1} \binom{n}{j-1} = \left(\frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1} \right) \times \left(\frac{1}{2^n} \binom{n}{j-1} \right) \\ &= P(X = i) \times P(Y = j), \end{aligned}$$

donc les variables aléatoires X et Y sont indépendantes.

- 4) Posons $Z = X - 1$ et déterminons sa loi :

- * Puisque $X(\Omega) \subset \llbracket 1, n+1 \rrbracket$ et que $Z = X - 1$, alors $Z(\Omega) \subset \llbracket 0, n \rrbracket$.
- * Prenons $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$ et calculons $P(Z = k)$:

$$\begin{aligned} P(Z = k) &= P(X - 1 = k) = P(X = \overbrace{k+1}^{\in \llbracket 1, n+1 \rrbracket}) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{(k+1)-1} \\ &= \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2} \right)^k \left(\frac{1}{2} \right)^{n-k}. \end{aligned}$$

On constate que $Z \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$, dont on tire immédiatement : $E(Z) = \frac{n}{2}$ et $V(Z) = n \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2} \right) = \frac{n}{4}$.

Puisque $X = Z + 1$, par linéarité de l'espérance, $E(X) = E(Z) + 1 = \frac{n}{2} + 1$ et $V(X) = V(Z) = \frac{n}{4}$.

Conclusion : $Z := X - 1 \hookrightarrow \mathcal{B}(n, 1/2)$, $E(X) = \frac{n}{2} + 1$ et $V(Z) = \frac{n}{4}$.

- 5) Pour tout couple $(i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$, on pose $b_{i,j} = P_{[X=j]}(Y=i)$.
Comme les variables X et Y sont indépendantes, le conditionnement est sans effet et on obtient :

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2 : b_{i,j} = P_{[X=j]}(Y=i) = P(Y=i) = \frac{1}{2^n} \binom{n}{i-1}.$$

- 6) • L'expression des coefficients $b_{i,j}$ ne dépend pas de j , ce qui indique que toutes les colonnes de la matrice B sont identiques, donc $\text{rg}(B) \leq 1$.
Comme la colonne C_1 n'est pas nulle, $\text{rg}(B) \geq 1$ et ainsi, $\text{rg}(B) = 1$.
• $\text{Im}(B)$ et $\text{Ker}(B)$ sont deux s.e.v. de $\mathbb{R}^{n+1}$, dont on va donner des bases.
• On sait que $\dim(\text{Im}(B)) = \text{rg}(B) = 1$: il suffit de trouver un vecteur non nul de $\text{Im}(B)$.
Comme l'image d'une matrice est engendrée par ses colonnes, on peut prendre

$$V := 2^n C_1 = \left(\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \dots, \binom{n}{n} \right) \in \mathbb{R}^{n+1}$$

et alors (V) est une base de $\text{Im}(B)$.

- Par le théorème du rang matriciel :

$$\dim(\text{Ker}(B)) = n_{\text{col}}(B) - \text{rg}(B) = n+1-1 = n.$$

On cherche donc n vecteurs linéairement indépendants de $\text{Ker}(B)$.

Puisque $C_j - C_{n+1} = 0_{n+1,1}$ pour tout $j \in \llbracket 1, n \rrbracket$,

les vecteurs $V_j := (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, -1)$ de $\mathbb{R}^{n+1}$, avec le coefficient 1 en position j , appartiennent tous à $\text{Ker}(B)$.

De plus, la famille $(V_1, \dots, V_n)$ est libre car :

$$\begin{aligned} \text{rg}(V_1, \dots, V_n) &= \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \\ -1 & -1 & \dots & -1 \end{bmatrix}_{n+1,n} \geq \text{rg} \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{bmatrix}_{n,n} \\ &= \text{rg}(I_n) = n = \text{Card}(V_1, \dots, V_n). \end{aligned}$$

- 7) En posant $C := C_1$ la première colonne de la matrice B et $L := (1 \ 1 \ \dots \ 1) \in \mathcal{M}_{1,n+1}(\mathbb{R})$, on obtient immédiatement : $B = C \times L$.
8) Grâce à l'écriture de la question précédente :

$$B^2 = (C \times L)^2 = C \times (L \times C) \times L.$$

Remarquons que $L \times C$ est une matrice de taille 1×1 dont le coefficient vaut :

$$\sum_{k=1}^{n+1} 1 c_k = \sum_{k=1}^{n+1} c_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_{k,k} = \text{tr}(B).$$

On en déduit :

$$\begin{aligned} B^2 &= C \times (\text{tr}(B) \cdot I_1) \times L = \text{tr}(B) \cdot (C \times I_1 \times L) = \text{tr}(B) \cdot (C \times L) \\ &= \text{tr}(B) \cdot B. \end{aligned}$$

- 9) • D'après la question précédente, la matrice B admet pour polynôme annulateur $P := X^2 - \text{tr}(B)X$.

Puisque $\text{tr}(B) = \sum_{k=1}^{n+1} \frac{1}{2^n} \binom{n}{k-1} = 1$, il s'agit de $P = X^2 - X = X(X-1)$.

Comme ce polynôme est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, la matrice B est diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

- Grâce à ce polynôme annulateur, les valeurs propres de B se trouvent parmi les racines de P , soit 0 et 1.
- Nous avons vu que $\dim(\text{Ker}(B)) = n \geq 1$: cela prouve que 0 est bien une valeur propre de B .
- Pour prouver que 1 est bien valeur propre de B , constatons que C est vecteur propre de B ; le vecteur C est non nul et :

$$\begin{aligned} B C &= (C \times L) \times C = C \times (L \times C) = C \times (\text{tr}(B) \cdot I_1) = \text{tr}(B) C \\ &= C. \end{aligned}$$

Conclusion : La matrice B est diagonalisable, et $\text{Sp}(B) = \{0, 1\}$.

Exercice 2

INP PSI 2025

On considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

Soit $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$ et $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ une variable aléatoire qui suit la loi de Poisson de paramètre λ .

- 1) Puisque $X \hookrightarrow \mathcal{P}(\lambda)$, on sait que $X \in L^2$, et $E(X) = \lambda$, et que $V(X) = \lambda$.
- 2) Puisque $X \in L^2$ et que $\lambda > 0$, l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev s'applique et donne :

$$P(|X - E(X)| \geq \lambda) \leq \frac{V(X)}{\lambda^2} \quad \text{c.à.d.} \quad P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

3) Justifions que $\{X \geq 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geq \lambda\}$.

Prenons $\omega \in \Omega$ quelconque, et supposons que $\omega \in \{X \geq 2\lambda\}$.

Alors $X(\omega) \geq 2\lambda$. Mais alors : $X(\omega) - \lambda \geq \lambda$, et a fortiori :

$$|X(\omega) - \lambda| \geq X(\omega) - \lambda \geq \lambda.$$

On en déduit que $\omega \in \{|X - \lambda| \geq \lambda\}$.

4) Puisque $\{X \geq 2\lambda\} \subset \{|X - \lambda| \geq \lambda\}$, par croissance de la probabilité et l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev :

$$P(X \geq 2\lambda) \leq P(|X - \lambda| \geq \lambda) \leq \frac{1}{\lambda}.$$

5) La fonction G_X est la somme de la série entière suivante :

$$\sum_{n \geq 0} P(X = n) t^n = \sum_{n \geq 0} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n.$$

Étudions son rayon de convergence R . En tout point $r > 0$, on constate que :

$$e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} r^n = e^{-\lambda} \frac{(\lambda r)^n}{n!} \xrightarrow[n \rightarrow \infty]{CC} 0.$$

Ainsi, $R \geq r$, et en faisant tendre r vers $+\infty$, $R = +\infty$.

Conclusion : La somme G_X de cette série entière est définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

6) Explicitons G_X :

$$\begin{aligned} \forall t \in \mathbb{R} : G_X(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^n}{n!} t^n = e^{-\lambda} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\lambda t)^n}{n!} = e^{-\lambda} e^{\lambda t} \\ &= e^{\lambda(t-1)}. \end{aligned}$$

7) Fixons $t \geq 1$ et $\alpha \in \mathbb{R}$. Remarquons que $[X \geq \alpha] \subset [t^X \geq t^\alpha]$.

Pour cela, supposons que $X(\omega) \geq \alpha$.

En multipliant par $\ln(t) \geq \ln(1) = 0$: $X(\omega) \ln(t) \geq \alpha \ln(t)$,

et en appliquant l'exponentielle, croissante sur $\mathbb{R}$: $t^{X(\omega)} \geq t^\alpha$.

Ainsi, par croissance de la probabilité :

$$P(X \geq \alpha) \leq P(t^X \geq t^\alpha),$$

et appliquant l'inégalité de Markov à la variable **positive** $Y := t^X$ au seuil $\beta := t^\alpha > 0$:

$$P(X \geq \alpha) \leq P(t^X \geq t^\alpha) \leq \frac{E(t^X)}{t^\alpha} = \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$$

Conclusion : $\forall \alpha \in \mathbb{R}, \forall t \geq 1 : P(X \geq \alpha) \leq \frac{G_X(t)}{t^\alpha}.$

8) Appliquons ce qui précède avec $\alpha \leftarrow 2\lambda$ et $t \leftarrow 2$:

$$P(X \geq 2\lambda) \leq \frac{G_X(2)}{2^{2\lambda}} = \frac{e^{(2-1)\lambda}}{4^\lambda} = \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda.$$

9) Parmi les inégalités obtenue en 4 et 8, la plus précise est celle qui a le plus petit majorant.

On compare les logarithmes des majorants : par stricte croissance de $\ln$ sur $\mathbb{R}_+^*$:

$$\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda \iff -\ln(\lambda) \geq \lambda(1 - \ln(4)) \iff \frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \ln(4) - 1.$$

L'énoncé donne : $e \cdot (\ln(4) - 1) \geq 1,05$, donc $\ln(4) - 1 \geq \frac{1,05}{e}$.

En outre, l'étude de la fonction $\varphi : \lambda \mapsto \frac{\ln(\lambda)}{\lambda}$ sur $]0, +\infty[$ montre que cette fonction atteint son maximum en e , où elle vaut $1/e$. Ainsi :

$$\frac{\ln(\lambda)}{\lambda} \leq \frac{1}{e} \leq \frac{1,05}{e} \leq \ln(4) - 1.$$

On a donc toujours $\frac{1}{\lambda} \geq \left(\frac{e}{4}\right)^\lambda$.

Conclusion : L'inégalité trouvée en Q8 est meilleure que celle de Q4, et ce, quel que soit $\lambda > 0$.

Problème

INP PSI 2020

Les matrices de Kac

I – La dimension 3

$$\text{Soit } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } B = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1) Le polynôme caractéristique de A est donné par :

$$\begin{aligned} \chi_A &= \det(X I_3 - A) = \begin{vmatrix} X & -1 & 0 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & -X \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ -2 & X & -2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X & -4 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & -4 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2 - 4) \\ &= X(X - 2)(X + 2). \end{aligned}$$

- 2) Le polynôme χ_A est scindé à racines simples sur $\mathbb{R}$, donc A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.
Les valeurs propres de A sont les racines de χ_A : $\text{Sp}(A) = \{0, 2, -2\}$.

- 3) • Calculons le polynôme caractéristique de B :

$$\begin{aligned}\chi_B = \det(X I_3 - B) &= \begin{vmatrix} X & 1 & 0 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} X & 0 & X \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -2 & X & 2 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} \\ &= X \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & X & 4 \\ 0 & -1 & X \end{vmatrix} = X \begin{vmatrix} X & 4 \\ -1 & X \end{vmatrix} = X(X^2 + 4).\end{aligned}$$

$X^2 + 4$ est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ car de degré 2 et de discriminant $\Delta = -16 < 0$.

Dans $\mathbb{C}[X]$, ce polynôme se factorise : $\chi_B = X(X - 2i)(X + 2i)$.

- De plus : $i\chi_B(iX) = i(iX)(iX - 2i)(iX + 2i)$
 $= i^4 X(X - 2)(X + 2)$
 $= \chi_A(X).$

- 4) • Sur $\mathbb{C}$, χ_B est scindé à racines simples, donc B est diagonalisable sur $\mathbb{C}$, où ses sous-espaces propres sont des droites vectorielles de $\mathbb{C}^3$. Ses valeurs propres sont : $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(B) = \{0, 2i, -2i\}$.
 • Sur $\mathbb{R}$, χ_B n'est pas scindé donc B n'est pas diagonalisable.
 B n'a plus qu'une valeur propre : $\text{Sp}_{\mathbb{R}}(B) = \{0\}$.
 Cette valeur propre étant simple, la dimension du sous-espace propre associé reste égale à 1.

On considère $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $\Delta = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

- 5) La matrice D est diagonale et tous ses coefficients diagonaux sont non nuls.
Elle est donc inversible, et :

$$\begin{aligned}D^{-1}AD &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -2i & 0 & -2i \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & i & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}&= \begin{pmatrix} 0 & i & 0 \\ -2i & 0 & 2i \\ 0 & -i & 0 \end{pmatrix} \\ &= -iB.\end{aligned}$$

- 6) Pour les mêmes raisons, la matrice Δ est inversible et :

$$\begin{aligned}\Delta^{-1}A\Delta &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 0 & -\sqrt{2} & 0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

La matrice obtenue est symétrique réelle, donc diagonalisable.

La matrice A est semblable sur $\mathbb{R}$ à une matrice diagonalisable sur $\mathbb{R}$, donc elle est elle-même diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

II – Étude d'un endomorphisme

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on pose

$$f_k : \begin{cases} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \\ x \longmapsto \cos^k(x) \sin^{n-k}(x). \end{cases}$$

On pose aussi : $V_n = \text{Vect}_{\mathbb{C}}(f_0, f_1, \dots, f_n)$.

- 7) • Montrons que $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre. Soit $(\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ tels que $\sum_{k=0}^n \alpha_k f_k = (x \mapsto 0)$. Prouvons que tous les α_k sont nuls. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \sum_{k=0}^n \alpha_k \cos^k(x) \sin^{n-k}(x) = 0. \quad (*)$$

En $x = 0$, puisque $\sin(0) = 0$ et que $\cos(0) = 1$, tous les termes disparaissent sauf celui pour $k = n$: **on obtient $\alpha_n = 0$** .

Pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $x \not\equiv 0 \pmod{\pi}$, on peut diviser $(*)$ par $\sin(x) \neq 0$ et obtenir :

$$\forall x \in \mathbb{R} / x \not\equiv 0 \pmod{\pi}, \quad \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k \cos^k(x) \sin^{n-k-1}(x) = 0.$$

En faisant tendre x vers 0, on obtient cette fois que $\alpha_{n-1} = 0$.

En itérant le procédé (diviser par $\sin(x)$ puis faire tendre x vers 0), on annule successivement tous les α_k .

Conclusion : La famille $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est libre.

- De ce fait, cette famille est une base de V_n ,
d'où : $\dim(V_n) = \text{Card}(f_0, f_1, \dots, f_n) = n + 1$.
- 8) Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. La fonction f_k est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que produit de fonctions usuelles dérivables. Si $k \in \llbracket 1, n-1 \rrbracket$:

$$\begin{aligned} f'_k &= (\cos^k \sin^{n-k})' \\ &= k \cos^{k-1} \times (-\sin) \times \sin^{n-k} + (n-k) \cos^k \times \sin^{n-k-1} \times \cos \\ &= -k \cos^{k-1} \sin^{n-k+1} + (n-k) \cos^{k+1} \times \sin^{n-k-1} \\ &= -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1} \in V_n \end{aligned}$$

Si $k = 0$, $f'_0 = (\sin^n)' = n \sin^{n-1} \times \cos = n f_1 \in V_n$
et si $k = n$, $f'_n = (\cos^n)' = n \cos^{n-1} \times (-\sin) = -n f_{n-1} \in V_n$.

Conclusion : $\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, $f'_k \in V_n$.

- Considérons l'application $\phi_n : \begin{cases} V_n \longrightarrow V_n \\ f \longmapsto f' \end{cases}$.

Vérifions que ϕ_n est un endomorphisme de V_n .

Prenons $g := \sum_{k=0}^n \alpha_k f_k \in V_n$ quelconque.

Alors g est dérivable sur $\mathbb{R}$, et par linéarité de la dérivation :

$$g' = \left(\sum_{k=0}^n \alpha_k f_k \right)' = \sum_{k=0}^n \alpha_k f'_k \in V_n$$

car les f'_k sont dans V_n et V_n est un espace vectoriel.

Ceci démontre que ϕ_n est correctement définie (l'espace d'arrivée est respecté).

Les espaces de départ et d'arrivée étant égaux, il suffit de prouver la linéarité de ϕ_n pour prouver que c'est un endomorphisme :

$$\begin{aligned} \forall g, h \in V_n, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C}, \quad \phi_n(\alpha g + \beta h) &= (\alpha g + \beta h)' = \alpha g' + \beta h' \\ &= \alpha \phi_n(g) + \beta \phi_n(h), \end{aligned}$$

grâce, encore une fois, à la linéarité de la dérivation.

Conclusion : $\phi_n \in \mathcal{L}(V_n)$.

- D'après le premier point : $\phi_n(f_0) = n f_1$,
 $\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, $\phi_n(f_k) = -k f_{k-1} + (n-k) f_{k+1}$,
 $\phi_n(f_n) = -n f_{n-1}$.

Cela permet d'écrire la matrice de ϕ_n dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$:

$$\text{mat}_{(f_0, f_1, \dots, f_n)}(\phi_n) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & -2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & -3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & -n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = B_n.$$

- 9) Pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, posons $g_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}, x \mapsto e^{i(2k-n)x}$. Alors :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) &= e^{i(2k-n)x} = e^{ikx} \times e^{i(k-n)x} = (e^{ix})^k \times (e^{-ix})^{n-k} \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))^k \times (\cos(-x) + i \sin(-x))^{n-k} \\ &= (\cos(x) + i \sin(x))^k \times (\cos(x) - i \sin(x))^{n-k}. \end{aligned}$$

- 10) Poursuivons en appliquant la formule du binôme de Newton :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g_k(x) &= (\cos(x) + i \sin(x))^k \times (\cos(x) - i \sin(x))^{n-k} \\ &= \left(\sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \cos^p(x) i^{k-p} \sin^{k-p}(x) \right) \\ &\quad \times \left(\sum_{q=0}^{n-k} \binom{n-k}{q} \cos^q(x) (-i)^{n-k-q} \sin^{n-k-q}(x) \right) \end{aligned}$$

En développant le produit, on obtient la somme rectangulaire suivante :

$$\begin{aligned} g_k(x) &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq k \\ 0 \leq q \leq n-k}} (-1)^{n-k-q} i^{n-(p+q)} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q} \cos^{p+q}(x) \sin^{n-(p+q)}(x) \\ &= \sum_{\substack{0 \leq p \leq k \\ 0 \leq q \leq n-k}} (-1)^{n-k-q} i^{n-(p+q)} \binom{k}{p} \binom{n-k}{q} f_{p+q}(x). \quad (\spadesuit) \end{aligned}$$

Ceci prouve que $g_k \in \text{Vect}(f_0, f_1, \dots, f_n) = V_n$.

- 11) Pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$, on a :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}, \quad g'_k(x) &= \frac{d}{dx} (e^{i(2k-n)x}) = i(2k-n) e^{i(2k-n)x} \\ \text{donc } \phi_n(g_k) &= g'_k = i(2k-n) g_k. \end{aligned}$$

La fonction g_k , non nulle, est vecteur propre de ϕ_n pour la valeur propre $i(2k-n)$. Cela fournit $(n+1)$ valeurs propres distinctes de ϕ_n . Comme $\dim(V_n) = n+1$, il ne peut pas y en avoir davantage, et :

$$\text{Sp}(\phi_n) = \{i(2k-n) ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

Puisque $\text{Card}(\text{Sp}(\phi_n)) = \dim(V_n)$, l'endomorphisme ϕ_n est diagonalisable et ses sous-espaces propres sont de dimension 1, engendrés par les g_k :

$$\forall k \in \llbracket 0, n \rrbracket, \quad E_{i(2k-n)}(\phi_n) = \text{Vect}(g_k).$$

- 12)** Comme ϕ_n est un endomorphisme d'un espace vectoriel **de dimension finie**, ϕ_n est un automorphisme *si et seulement si* 0 n'est pas une valeur propre de ϕ_n . Ces valeurs propres étant les $i(2k-n)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$:

↪ **si n est impair**, $(2k-n)$ l'est aussi donc $i(2k-n)$ ne peut pas s'annuler ;

↪ **si n est pair**, en prenant $k = n/2 \in \llbracket 0, n \rrbracket$, 0 est valeur propre de ϕ_n .

Conclusion : ϕ_n est un automorphisme *si et seulement si* n est impair.

- 13)** La formule (♠) donne la décomposition de g_k sur la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$. Pour le cas $k = n$, on a nécessairement $q = 0$ dans la somme rectangulaire, et :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g_n(x) = \sum_{p=0}^n i^{n-p} \binom{n}{p} f_p(x)$$

$$\text{c'est-à-dire : } g_n = \sum_{p=0}^n i^{n-p} \binom{n}{p} f_p = \sum_{k=0}^n i^{n-k} \binom{n}{k} f_k.$$

Le vecteur g_n est vecteur propre de ϕ_n pour la valeur propre in , donc la matrice de ses coordonnées dans la base $(f_0, f_1, \dots, f_n)$ est vecteur propre de B_n pour cette même valeur propre. Cette matrice est :

$$\begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix} \quad \text{où } q_k := i^{n-k} \binom{n}{k} \text{ pour tout } k \in \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Puisque le sous-espace propre de B_n associé à in est de même dimension que celui de ϕ_n , c'est une droite vectorielle et il est engendré par cette matrice colonne.

Conclusion : $\text{Ker}(B_n - in I_{n+1}) = E_{in}(B_n) = \text{Vect} \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ où $q_k := i^{n-k} \binom{n}{k}$.

III – Les matrices de Kac de taille $n+1$

Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé, $A_n = (a_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n+1}$ la matrice :

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ n & 0 & 2 & \ddots & & \vdots \\ 0 & n-1 & 0 & 3 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 2 & 0 & n \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{R})$$

et $D_n := (d_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq n+1} = \text{diag}(1, i, \dots, i^n) \in \mathcal{M}_{n+1}(\mathbb{C})$.

- 14)** Prenons $M = (m_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$ et $D = (d_{k,\ell}) \in \mathcal{M}_p(\mathbb{C})$, cette dernière étant diagonale. Le terme général $m'_{k,\ell}$ de la matrice DM vérifie :

$$\forall k, \ell \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad m'_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} d_{k,j} m_{j,\ell} = d_{k,k} m_{k,\ell}$$

car $d_{k,j} = 0$ si $j \neq k$. De même, le terme général $m''_{k,\ell}$ de la matrice MD est :

$$m''_{k,\ell} = \sum_{j=1}^{n+1} m_{k,j} d_{j,\ell} = m_{k,\ell} d_{\ell,\ell}.$$

Conclusion : $DM = (d_{k,k} m_{k,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p}$ et $MD = (m_{k,\ell} d_{\ell,\ell})_{1 \leq k, \ell \leq p}$.

- 15)** • Comme la matrice D_n est diagonale sans 0 sur la diagonale, elle est inversible et son inverse est diagonale. Ses coefficients diagonaux sont les $\delta_{k,k} := 1/d_{k,k} = 1/i^{k-1}$ pour $k \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket$. D'après la question précédente :

$$D_n^{-1} A = \left(\frac{1}{i^{k-1}} a_{k,\ell} \right)_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \quad \text{puis} \quad D_n^{-1} A D_n = \left(\frac{1}{i^{k-1}} a_{k,\ell} i^{\ell-1} \right)_{1 \leq k, \ell \leq n+1} \\ = (a_{k,\ell} i^{\ell-k})_{1 \leq k, \ell \leq n+1}.$$

Or, pour tout couple $(k, \ell) \in \llbracket 1, n+1 \rrbracket^2$:

$$a_{k,\ell} i^{\ell-k} = \begin{cases} k i^{(k+1)-k} = ik & \text{si } \ell = k+1, \\ (n-k+2) i^{k-(k+1)} = -i(n-k+2) & \text{si } \ell = k-1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On reconnaît ici les coefficients de la matrice $-iB_n$.

Conclusion : $D_n^{-1} A_n D_n = -iB_n$.

- 16) • Relions les polynômes caractéristiques de A_n et B_n comme dans la question 3. Comme A_n est semblable à la matrice $-iB_n$, elles ont même polynômes caractéristiques, d'où :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}, \quad \chi_{A_n}(x) &= \chi_{iB_n}(x) = \det(x I_n + iB_n) = \det((-i)(ix I_n - B_n)) \\ &= (-i)^{n+1} \det((ix) - B_n) = (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(ix). \end{aligned}$$

- Rappelons que les valeurs propres de B_n sont les $i(2k - n)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. On en déduit que :

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{C}, \quad x \text{ est valeur propre de } A_n &\iff \chi_{A_n}(x) = 0 \\ &\iff (-i)^{n+1} \chi_{B_n}(ix) = 0 \\ &\iff \chi_{B_n}(ix) = 0 \\ &\iff ix \text{ est valeur propre de } B_n \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket / ix = i(2k - n) \\ &\iff \exists k \in \llbracket 0, n \rrbracket / x = 2k - n. \end{aligned}$$

Conclusion : A_n admet aussi $(n + 1)$ valeurs propres distinctes :

$$\text{Sp}(A_n) = \{2k - n ; k \in \llbracket 0, n \rrbracket\}.$$

A_n est donc diagonalisable sur $\mathbb{R}$ et ses sous-espaces propres sont de dimension 1.

- Pour trouver le sous-espace propre de A_n associé à la valeur propre n , il suffit de trouver un vecteur propre.

Avec les notations de la question 13, Posons $U = \begin{pmatrix} q_0 \\ q_1 \\ \vdots \\ q_n \end{pmatrix}$ le vecteur propre de B pour la valeur propre $i n$, et $V := D_n U$. Alors :

$$\begin{aligned} A_n V &= (D_n (-iB_n) D_n^{-1}) (D_n U) = -i D_n (B_n U) = -i D_n (i n U) = n (D_n U) \\ &= n V. \end{aligned}$$

Le vecteur V s'écrit :

$$V = D_n U = \begin{pmatrix} i^0 & & & \\ & i^1 & (0) & \\ & (0) & \ddots & \\ & & & i^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i^n \binom{n}{0} \\ i^{n-1} \binom{n}{1} \\ \vdots \\ i^0 \binom{n}{n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i^n \binom{n}{0} \\ i^n \binom{n}{1} \\ \vdots \\ i^n \binom{n}{n} \end{pmatrix} = i^n \begin{pmatrix} \binom{n}{0} \\ \binom{n}{1} \\ \vdots \\ \binom{n}{n} \end{pmatrix}.$$

Le vecteur $i^{-n} V$ est aussi un vecteur propre de A_n pour la valeur propre n , donc il engendre aussi $E_n(A)$.

Conclusion : $\text{Ker}(A - n I_{n+1}) = \text{Vect} \begin{pmatrix} p_0 \\ p_1 \\ \vdots \\ p_n \end{pmatrix}$ où $p_k = \binom{n}{k}$ pour tout $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.