

Corrigé du devoir maison n° 6+

Problème 2

Mines-Ponts PSI 2022 épr. 2

Matrices de Hurwitz

I – Matrices semi-simples

Définition. Une matrice de $M_n(\mathbb{R})$ est dite **semi-simple** si elle est diagonalisable dans $M_n(\mathbb{C})$.

Définition. Une matrice M de $M_n(\mathbb{R})$ est dite **presque diagonale** s'il existe

- * deux entiers naturels p et q ;
- * q réels $a_1, a_2, \dots, a_q$;
- * q réels non nuls $b_1, b_2, \dots, b_q$;
- * une matrice D diagonale de $M_p(\mathbb{R})$

tels que $p + 2q = n$ et M est la matrice-bloc suivante :

$$M = \begin{bmatrix} D & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & M(a_1, b_1) & 0 & & & \vdots \\ \vdots & 0 & M(a_2, b_2) & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 0 & M(a_q, b_q) \end{bmatrix}$$

où : $\forall j \in \llbracket 1, q \rrbracket, M(a_j, b_j) = \begin{pmatrix} a_j & b_j \\ -b_j & a_j \end{pmatrix}.$

Si $p = 0$, la matrice D n'est pas présente dans la matrice diagonale par blocs M . De même, si $q = 0$, alors $M = D$.

1) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\chi_A = X^2 - \text{tr}(A)X + \det(A) = X^2 - 4X + 4 = (X - 2)^2,$$

donc $\text{Sp}_{\mathbb{C}}(A) = 2$. Si A était semi-simple, elle serait $\mathbb{C}$ -semblable à $2I_2$, donc égale à cette matrice ; or ce n'est pas le cas.

Conclusion : La matrice A n'est pas semi-simple.

2) • Soit $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}$. Alors :

$$\begin{aligned} \chi_B &= X^2 - \text{tr}(B)X + \det(B) = X^2 - 4X + 13 = (X - 2)^2 + 9 \\ &= (X - 2 - 3i)(X - 2 + 3i). \end{aligned}$$

Dans $\mathbb{C}$, χ_B est scindé à racines simples, donc χ_B est $\mathbb{C}$ -diagonalisable : la matrice B est semi-simple.

• Considérons $f \in \mathcal{L}(\mathbb{C}^2)$ canoniquement associé à B .

Cherchons un vecteur propre de B pour la valeur propre $2 + 3i$; soit $V = (x, y) \in \mathbb{C}^2$ quelconque :

$$\begin{aligned} V \in E_{2+3i}(B) &\iff (B - (2 + 3i)I_2)V = 0_{2,1} \\ &\iff \begin{cases} (1 - 3i)x + 2y = 0 \\ -5x + (-1 - 3i)y = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(1 - 3i)x \\ -5x + \frac{1}{2}(1 + 3i)(1 - 3i)x = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} y = -\frac{1}{2}(1 - 3i)x \\ -5x + \frac{1}{2} \times 10x = 0 \end{cases} \\ &\iff y = -\frac{1}{2}(1 - 3i)x. \end{aligned}$$

Le vecteur $V_0 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1+3i \end{pmatrix}$ convient.

Posons $W_1 := \text{Re}(V_0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ et $W_2 := \text{Im}(V_0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. La famille de 2 vecteurs (W_1, W_2) étant libre, elle forme une base de $\mathbb{C}^2$. De plus :

$$f(W_1) = BW_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 2W_1 - 3W_2$$

$$f(W_2) = BW_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix} = 3W_1 + 2W_2.$$

Ainsi : $\text{mat}_{(W_1, W_2)}(f) = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$ et par la formule de changement de base :

$$B = Q \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -3 & 2 \end{pmatrix} Q^{-1} \quad \text{où} \quad Q = P_{\mathcal{B}_{\text{can}} \rightarrow (W_1, W_2)} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \in \text{GL}_2(\mathbb{R}).$$

3) Soit $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ admettant deux valeurs propres complexes $\mu = a + ib$ et $\bar{\mu} = a - ib$, pour $a \in \mathbb{R}$ et $b > 0$. Posons $f: V \in \mathbb{R}^2 \mapsto MB \in \mathbb{R}^2$.

* Puisque $b \neq 0$, on remarque que $\mu \neq \bar{\mu}$. La matrice M , de taille 2, admet deux valeurs propres complexes distinctes : elle est $\mathbb{C}$ -diagonalisable, donc semi-simple.

* Prenons un vecteur propre V associé à la valeur propre μ , et posons $W_1 := \operatorname{Re}(V)$ et $W_2 := \operatorname{Im}(V)$, deux vecteurs de $\mathbb{R}^2$.

Nous allons montrer que $\mathcal{B}' := (W_1, W_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Il suffit pour cela de démontrer que la famille est $\mathbb{R}$ -libre.

Remarquons que W_1 et W_2 sont combinaisons linéaires de V et $\bar{V}$:

$$W_1 = \operatorname{Re}(V) = \frac{1}{2} V + \frac{1}{2} \bar{V} \quad \text{et} \quad W_2 = \operatorname{Im}(V) = \frac{1}{2i} V - \frac{1}{2i} \bar{V}.$$

En conjuguant la relation $MV = \mu V$, puisque M est à coefficients réels, on obtient $M\bar{V} = \bar{\mu}\bar{V}$: $\bar{V}$ est vecteur propre de M pour la valeur propre $\bar{\mu}$.

La famille $(V, \bar{V})$ est $\mathbb{C}$ -libre car formée de vecteurs propres de M associés à deux valeurs propres différentes ; c'est donc une base de $\mathbb{C}^2$.

Calculons le déterminant de la famille (W_1, W_2) dans la base $(V, \bar{V})$:

$$\det_{(V, \bar{V})}(W_1, W_2) = \begin{vmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{vmatrix} = -\frac{1}{2i} \neq 0.$$

$\mathcal{B}'$ est donc une base de $\mathbb{C}^2$; elle est donc $\mathbb{C}$ -libre, et a fortiori $\mathbb{R}$ -libre, d'où le résultat : $\mathcal{B}' = (W_1, W_2)$ est une base de $\mathbb{R}^2$.

* Puisque $MV = \mu V$, en écrivant les parties réelles et imaginaires :

$$\begin{aligned} M(W_1 + iW_2) &= (a + ib)(W_1 + iW_2) \\ (MW_1) + i(MW_2) &= (aW_1 - bW_2) + i(aW_2 + bW_1) \\ MW_1 &= aW_1 - bW_2 \quad \text{et} \quad MW_2 = bW_1 + aW_2. \end{aligned}$$

La matrice de f dans la base (W_1, W_2) est donc $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Si l'on pose $Q \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{R})$ la matrice de passage de la base canonique à la base $\mathcal{B}'$, la formule de changement de base donne :

$$M = Q \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} Q^{-1}.$$

4) Montrons que : M est semi-simple si et seulement si M est $\mathbb{R}$ -diagonalisable ou χ_M admet deux racines complexes distinctes.

$\Leftarrow$ Si M est $\mathbb{R}$ -diagonalisable, alors elle est a fortiori $\mathbb{C}$ -diagonalisable, donc semi-simple. Si χ_M admet deux racines complexes distinctes, alors elle est semi-simple comme vu à la question précédente.

$\Rightarrow$ Supposons que M est semi-simple, c.à.d. $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

Puisque χ_M est de degré 2 à coefficients réels, trois cas sont possibles :

$\hookrightarrow$ ou bien χ_M a deux racines réelles distinctes.

Dans ce cas, M est $\mathbb{R}$ -diagonalisable.

$\hookrightarrow$ ou bien χ_M a une racine double réelle λ_0 .

Comme M est $\mathbb{C}$ -diagonalisable, elle est $\mathbb{C}$ -semblable à $\lambda_0 I_2$, donc égale à cette matrice. M est diagonale à coefficients réels, donc a fortiori $\mathbb{R}$ -diagonalisable.

$\hookrightarrow$ ou bien χ_M a deux racines complexes conjuguées distinctes.

Dans les 3 cas, la proposition « M est $\mathbb{R}$ -diagonalisable ou χ_M a deux racines complexes conjuguées distinctes » est satisfaite.

5) Supposons que $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ soit $\mathbb{R}$ -semblable à une matrice presque diagonale, que nous noterons $\Delta = \operatorname{diag}(D, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q))$, où : $D \in \mathcal{D}_p(\mathbb{R})$, $a_1, \dots, a_q \in \mathbb{R}$ et $b_1, \dots, b_q \in \mathbb{R}^*$.

Fixons $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$ et réduisons dans $\mathbb{C}$ la matrice $M(a_k, b_k) = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$.

Son polynôme caractéristique est :

$$\begin{aligned} X^2 - 2a_k X + (a_k^2 + b_k^2) &= (X - a_k)^2 + b_k^2 \\ &= (X - (a_k + ib_k))(X - (a_k - ib_k)) \\ &= (X - \mu_k)(X - \bar{\mu}_k) \end{aligned}$$

en posant $\mu_k := a_k + ib_k$. Puisque $b_k \neq 0$, ce polynôme est scindé à racines simples dans $\mathbb{C}$, donc $M(a_k, b_k)$ est $\mathbb{C}$ -semblable à la matrice $\operatorname{diag}(\mu_k, \bar{\mu}_k)$.

Ainsi, il existe une matrice $Q_k \in \operatorname{GL}_2(\mathbb{C})$ telle que :

$$M(a_k, b_k) = Q_k \operatorname{diag}(\mu_k, \bar{\mu}_k) Q_k^{-1}.$$

Introduisons maintenant les matrices diagonales par blocs :

$$Q := \operatorname{diag}(I_p, Q_1, \dots, Q_q) \quad \text{et} \quad Q' := \operatorname{diag}(I_p, Q_1^{-1}, \dots, Q_q^{-1}).$$

En calculant par blocs $Q \times Q'$, on obtient I_n : Q est donc inversible et $Q^{-1} = Q'$. Toujours en calculant les produits par blocs, on obtient :

$$Q \operatorname{diag}(D, \mu_1, \bar{\mu}_1, \dots, \mu_q, \bar{\mu}_q) Q^{-1} = \operatorname{diag}(D, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q)) = \Delta.$$

La matrice Δ est donc $\mathbb{C}$ -semblable à une matrice diagonale à coefficients complexes : elle est $\mathbb{C}$ -diagonalisable.

C'est également le cas de M , car elle est $\mathbb{C}$ -semblable à la matrice Δ .

Conclusion : Toute matrice réelle qui est $\mathbb{R}$ -semblable à une matrice presque diagonale est semi-simple.

- 6) • Soit $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. Comme χ_N est à coefficients réels, si μ est une racine complexe non réelle de χ_N , alors c'est aussi le cas de $\overline{\mu}$ et elle est de même ordre de multiplicité. Le polynôme χ_M peut se factoriser dans $\mathbb{C}[X]$:

$$\chi_M = \prod_{k=1}^p (X - \lambda_k) \times \prod_{k=1}^q \left((X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k}) \right),$$

où $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{R}$ (non nécessairement distincts) et $\mu_1, \dots, \mu_q \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ (non nécessairement distincts).

- Supposons $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple : elle est donc $\mathbb{C}$ -diagonalisable. Remarquons que pour chaque valeur propre $\mu \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$, si $(V_1, \dots, V_d)$ est une base du sous-espace propre $E_\mu(N)$, alors $(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_d})$ est une base de $E_{\overline{\mu}}$: les vecteurs qui la composent sont bien des vecteurs propres pour la valeur propre $\overline{\mu}$ (voir Q3) et on montre facilement que la famille reste libre par la définition ; les deux SEP ont même dimension donc le nombre de vecteurs est le bon.

On peut donc constituer une base de $\mathbb{C}^n$ constituée de vecteurs propres de N ayant la structure suivante :

$$\mathcal{B}_1 = (U_1, \dots, U_p, V_1, \overline{V_1}, \dots, V_q, \overline{V_q})$$

où les $U_k \in \mathbb{R}^n$ sont des vecteurs propres de N pour la valeur propre $\lambda_k \in \mathbb{R}$ et les $V_k \in \mathbb{C}^n$ des vecteurs propres de N pour la valeur propre $\mu_k \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$.

- Posons maintenant, pour tout $k \in \llbracket 1, q \rrbracket$:

$$W_k := \operatorname{Re}(V_k) = \frac{1}{2} V_k + \frac{1}{2} \overline{V_k} \quad \text{et} \quad W'_k := \operatorname{Im}(V_k) = \frac{1}{2i} V_k - \frac{1}{2i} \overline{V_k}.$$

La famille $\mathcal{B}_2 := (U_1, \dots, U_p, W_1, W'_1, \dots, W_q, W'_q)$ est elle aussi une base de $\mathbb{C}^n$ car :

$$\det_{\mathcal{B}_1}(\mathcal{B}_2) = \det(\operatorname{diag}(I_p, R, \dots, R)) \quad \text{où} \quad R = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2i \\ 1/2 & -1/2i \end{pmatrix}$$

$$= 1 \times (\det(R))^q = (-1/2i)^q \neq 0.$$

Elle est donc libre, vue en tant que famille de vecteurs de $\mathbb{C}^n$. Mais c'est une famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$: elle est a fortiori $\mathbb{R}$ -libre, et comme elle comporte n vecteurs, c'est une base de $\mathbb{R}^n$.

- Écrivons les valeurs propres complexes $\mu_k = a_k + i b_k$, pour $a_k \in \mathbb{R}$ et $b_k > 0$. On s'assure comme à la question 3 que

$$\forall k \in \llbracket 1, q \rrbracket, \quad f(W_k) = a W_k - b W'_k \quad \text{et} \quad f(W'_k) = b W_k + a W'_k.$$

La matrice de f dans la base $\mathcal{B}_2$ sera donc :

$$\Delta = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_p, M(a_1, b_1), \dots, M(a_q, b_q)).$$

tandis que sa matrice dans la base canonique est N . La matrice N est donc $\mathbb{R}$ -semblable à la matrice Δ , qui est presque diagonale.

Conclusion : Toute matrice $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ semi-simple est $\mathbb{R}$ -semblable à une matrice presque diagonale.

II – Une caractérisation des matrices diagonalisables de $M_n(\mathbb{C})$

Soit E un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel de dimension n et $u \in \mathcal{L}(E)$.

On suppose u diagonalisable : soit $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ une base constituée de vecteurs propres de u .

Soit F un sous-espace vectoriel de E distinct de $\{0_E\}$ et de E .

- 7) • **Par l'absurde**, supposons que tous les v_k soient dans F . L'espace F contiendrait alors $\operatorname{Vect}(v_1, \dots, v_n) = E$, ce qui **contredit** $F \neq E$.

Ainsi, il existe $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$ tel que $v_k \notin F$.

- Soit $x \in F \cap \operatorname{Vect}(v_k)$. Ce vecteur s'écrit $x = \alpha v_k$ pour $\alpha \in \mathbb{C}$ et appartient à F . Si on avait $\alpha \neq 0$, alors $\frac{1}{\alpha} x = v_k$ se trouverait aussi dans F , ce qui est faux. Donc $\alpha = 0$, $x = 0_E$, $F \cap \operatorname{Vect}(v_k) = \{0_E\}$ et finalement, F et $\operatorname{Vect}(v_k)$ sont en somme directe.

- 8) Notons $\mathcal{A} = \left\{ H \text{ sous-espace vectoriel de } E \mid \begin{array}{l} \text{tel que } u(H) \subset H \text{ et } F \cap H = \{0_E\} \end{array} \right\}$
et $\mathcal{L} = \{p \in \mathbb{N}^*, \exists H \in \mathcal{A} : p = \dim(H)\}$.

Montrons que $\mathcal{L}$ admet un maximum :

- * C'est une partie de $\mathbb{N}$ par sa définition ;
- * Cette partie est non vide. En effet, d'après la question précédente, il existe un vecteur propre v_k de u tel que $F \cap \operatorname{Vect}(v_k) = \{0_E\}$; l'espace $\operatorname{Vect}(v_k)$ est stable par u car v_k est un vecteur propre, donc $\operatorname{Vect}(v_k) \in \mathcal{A}$. De plus, $\dim(\operatorname{Vect}(v_k)) = 1 \in \mathbb{N}^*$, d'où $1 \in \mathcal{L}$.
- * Les éléments de $\mathcal{L}$ sont des dimensions de sous-espaces vectoriels de E , donc ils valent au plus $\dim(E) = n$: l'ensemble $\mathcal{L}$ est majoré par n .

Or toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un maximum.

Conclusion : $\mathcal{L}$ admet un maximum, que nous noterons r .

- 9) Notons $p := \dim(F)$ et considérons $G \in \mathcal{A}$ tel que $\dim(H) = r$.

- * Remarquons que si $r = n - p$, alors F et G sont supplémentaires dans E . En effet, F et G sont en somme directe par définition de G , et $\dim(F) + \dim(G) = p + (n - p) = n = \dim(E)$.

- * **Par l'absurde**, supposons que $r \neq n - p$. Puisque $F + G$ est directe, $p + r \leq n$ donc cela signifie que $r < n - p$.

La somme $F \oplus G$ étant de dimension au plus $n - 1$, il existe un vecteur propre v_ℓ tel que $(F \oplus G) + \operatorname{Vect}(v_\ell)$ soit directe.

Constatons que $G' := G + \operatorname{Vect}(v_\ell)$ est un élément de $\mathcal{A}$:

- **Montrons que la somme $F + G'$ est directe.**

Soit $x_F \in F$ et $x_{G'} \in G'$ tels que $x_F + x_{G'} = 0_E$.
 $x_{G'}$ s'écrit $x_G + \alpha v_\ell$ pour $x_G \in G$ et $\alpha \in \mathbb{R}$, d'où : $\underbrace{x_F + x_G}_{\in F \oplus G} + \underbrace{\alpha v_\ell}_{\in \text{Vect}(v_\ell)} = 0_E$.
 Comme la somme $(F \oplus G) + \text{Vect}(v_\ell)$ est directe,
 $x_F + x_G = 0_E$ d'une part, et $\alpha v_\ell = 0_E$ d'autre part.
 Mais $F + G$ est directe, donc $x_F = x_G = 0_E$; et $v_\ell \neq 0$, donc $\alpha = 0$.
 Finalement, $x_F = x_{G'} = 0_E$.

- **Montrons que G' est stable par u .**

Prenons $x = x_G + \alpha v_\ell \in G'$ quelconque. Alors $u(x) = u(x_G) + \alpha u(v_\ell)$,
 mais $u(x_G) \in G$ car G est stable, et $u(v_\ell) \in \text{Vect}(v_\ell)$ car v_ℓ est un vecteur propre.
 Finalement, $u(x) \in G + \text{Vect}(v_\ell) = G'$.

Enfin, la somme $G + \text{Vect}(v_\ell)$ est également directe puisque :

$$G \cap \text{Vect}(v_\ell) \subset (F + G) \cap \text{Vect}(v_\ell) = \{0_E\}, \quad \text{par définition de } v_\ell.$$

Ceci prouve que $\dim(G') = \dim(G \oplus \text{Vect}(v_\ell)) = \dim(G) + 1 = r + 1$.

C'est absurde car $r + 1 \in \mathcal{L}$ alors que r est le maximum de cet ensemble !

C'est donc que $r = n - p$, et que F et G sont en somme directe.

Conclusion : L'espace vectoriel F admet un supplémentaire G dans E qui est stable par u .

Remarques Cette manière de démontrer ce théorème est effroyablement maladroite !
 On arrive au même résultat beaucoup plus vite ainsi : considérons une base $(e_1, \dots, e_p)$ de F , qui est donc libre. Puisque $(v_1, \dots, v_n)$ est une base de E , c'en est une famille génératrice. En vertu du théorème de la base incomplète, on peut fabriquer une base de E en complétant la base de F à l'aide de certains des vecteurs v_k . Notons cette base $(e_1, \dots, e_p, u_{p+1}, \dots, u_n)$, où les u_k sont choisis parmi les v_k .

Par fractionnement de base, F et $G := \text{Vect}(u_{p+1}, \dots, u_n)$ sont supplémentaires dans E .
 Il reste à vérifier que l'espace G est stable par u , ce qui n'est pas difficile.

- 10) On ne suppose plus que u est diagonalisable,** mais seulement que tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u .

Montrons que u est diagonalisable : **par l'absurde**, supposons qu'il ne l'est pas, et considérons le sous-espace $F := \bigoplus_{\lambda \in \text{Sp}(u)} E_\lambda(u)$.

F est un sous-espace de E tel que $F \neq E$ puisque u n'est pas diagonalisable.

F est donc de dimension au plus $n - 1$: complétons une base de F en une base de E , et l'espace H engendré par les $(n - 1)$ premiers vecteurs de cette base contiendra F et sera de dimension $(n - 1)$.

Par l'hypothèse faite sur u , l'espace H admet un sous-espace Δ stable par u .

Ce dernier est une droite vectorielle stable par u , donc elle est engendrée par un vecteur propre v de u .

Comme H contient F , il contient tous les vecteurs propres de u , donc v .

Ce vecteur se trouve à la fois dans H et dans Δ , qui sont en somme directe : il est donc nul. Mais **c'est impossible** puisque c'est un vecteur propre !

Conclusion : Si tout sous-espace de E admet un supplémentaire stable par u , alors u est diagonalisable.

III – Polynômes de Hurwitz

Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit **polynôme de Hurwitz** si ses racines dans $\mathbb{C}$ appartiennent à $\text{Re}^- = \{z \in \mathbb{C} / \text{Re}(z) < 0\}$.

Définition. Un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ est dit à **coefficients strictement positifs** s'il est non nul et si, d désignant son degré, $P = \sum_{k=0}^d a_k X^k$ où, pour tout $k \in \llbracket 0, d \rrbracket$, $a_k > 0$.

- 11)** Soit $P = \sum_{k=0}^d c_k X^k \in \mathbb{R}[X]$ à coefficients strictement positifs, de degré $d \in \mathbb{N}$, et $\alpha \in \mathbb{R}$. Alors :

$$\alpha \geq 0 \implies P(\alpha) = \sum_{k=0}^d c_k \alpha^k \geq c_0 > 0 \implies P(\alpha) \neq 0.$$

Par contraposition, si α est racine réelle de P , alors $\alpha < 0$.

Conclusion : Les racines réelles des polynômes à coefficients strictement positifs sont strictement négatives.

- 12)** Soit P un polynôme de Hurwitz et Q un diviseur de P .

Les racines complexes de Q sont aussi des racines de P ; or, les racines complexes de P sont dans Re^- , donc celles de Q aussi : Q est donc un polynôme de Hurwitz.

Conclusion : Tout diviseur d'un polynôme de Hurwitz est un polynôme de Hurwitz.

- 13)** Soit P un polynôme de Hurwitz de $\mathbb{R}[X]$ irréductible et à coefficient dominant positif. On distingue deux cas :

↪ **Si $\deg(P) = 1$:** ce polynôme s'écrit $P = aX + b$ pour $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.

Son unique racine est donc $-b/a$; comme P est un polynôme de Hurwitz, cette racine est dans Re^- , ce qui signifie qu'elle est strictement négative. Autrement dit, $b > 0$ également : P est à coefficients strictement positifs.

↪ **Si $\deg(P) = 2$:** P s'écrit $aX^2 + bX + c$ où $a > 0$ et $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4ac < 0$. Montrons que $b > 0$ et $c > 0$.

Les racines complexes de P sont $\frac{-b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2a}$, donc leur partie réelle commune est $-b/(2a)$. Comme P est un polynôme de Hurwitz, ce nombre est strictement négatif, donc $b > 0$.

Ensuite, $b^2 - 4ac < 0$, donc $c > b^2/(4a) > 0$.

Le polynôme P est là aussi à coefficients strictement positifs.

Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $(z_1, z_2, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^n$. On définit les deux polynômes $P(X)$ et $Q(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ par :

$$P(X) = \prod_{k=1}^n (X - z_k) \quad \text{et} \quad Q(X) = \prod_{(k,l) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2} (X - z_k - z_l).$$

14) Supposons que $n = 2$, $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et que Q soit à coefficients strictement positifs.

↪ **1^{er} cas : si P admet deux racines réelles $\alpha = z_1$ et $\beta = z_2$.**

Montrons que $\alpha < 0$ et que $\beta < 0$ en examinant certains coefficients de Q :

$$\begin{aligned} Q &= (X - 2\alpha)(X - 2\beta)(X - \alpha - \beta)^2 \\ &= (X^2 - 2(\alpha + \beta)X + 4\alpha\beta)(X^2 - 2(\alpha + \beta)X + (\alpha + \beta)^2) \end{aligned}$$

Introduisons $s := \alpha + \beta$ et $p := \alpha\beta$. Alors :

$$\begin{aligned} Q &= (X^2 - 2sX + 4p)(X^2 - 2sX + s^2) \\ &= X^4 - 4sX^3 + \dots + 4ps^2. \end{aligned}$$

Puisque Q est à coefficients strictement positifs, on en déduit que $-4s > 0$ et $4ps^2 > 0$, d'où $s < 0$ et $p > 0$.

Puisque $p > 0$, α et β sont de même signe ;

puisque $s < 0$, $\alpha < 0$ et $\beta < 0$.

Ainsi, **P est un polynôme de Hurwitz.**

↪ **2^e cas : si P admet deux racines complexes $z = z_1$ et $\bar{z} = z_2$.**

Il s'agit cette fois de prouver que $\operatorname{Re}(z) = \operatorname{Re}(\bar{z}) < 0$. Développons Q :

$$\begin{aligned} Q &= (X - 2z)(X - 2\bar{z})(X - z - \bar{z})^2 \\ &= \left(X^2 - 2(z + \bar{z})X + z\bar{z}\right) \left(X - 2\operatorname{Re}(z)\right)^2 \\ &= \left(X^2 - 4\operatorname{Re}(z)X + |z|^2\right) \left(X^2 - 4\operatorname{Re}(z)X + 4(\operatorname{Re}(z))^2\right) \\ &= X^4 - 8\operatorname{Re}(z)X^3 + \dots \end{aligned}$$

Ainsi $-8\operatorname{Re}(z) > 0$ donc $\operatorname{Re}(z) < 0$, et **P est un polynôme de Hurwitz.**

Conclusion : Si $n = 2$, $P \in \mathbb{R}_2[X]$ et Q est à coefficients strictement positifs, alors P est un polynôme de Hurwitz.

15) Soit A et B deux polynômes réels à coefficients strictement positifs, de degrés respectifs p et q , que l'on écrit :

$$A = \sum_{i=0}^p a_i X^i \quad \text{et} \quad B = \sum_{j=0}^q b_j X^j \quad \text{où :} \quad \begin{aligned} \forall i \in \llbracket 0, p \rrbracket, \quad a_i &> 0 \\ \forall j \in \llbracket 0, q \rrbracket, \quad b_j &> 0. \end{aligned}$$

$$\text{Il en découle que : } AB = \sum_{k=0}^{p+q} c_k X^k \quad \text{où} \quad \forall k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket, \quad c_k = \sum_{\substack{(i,j) \in \mathbb{N}^2 / \\ i+j=k}} a_i b_j.$$

Les coefficients c_k sont des sommes de termes strictement positifs, car les a_i et les b_j le sont. On en déduit que $c_k > 0$ à condition toutefois que la somme qui les définit comporte au moins un terme. Or :

↪ Si $k \in \llbracket 0, p \rrbracket$, alors le terme $a_k b_0 > 0$ fait partie de cette somme ;

↪ Si $k \in \llbracket p+1, p+q \rrbracket$, alors le terme $a_p b_{k-p} > 0$ fait partie de cette somme.

Ainsi : $\forall k \in \llbracket 0, p+q \rrbracket, \quad c_k > 0$.

Conclusion : Le produit de deux polynômes à coefficients strictement positifs et un polynôme à coefficients strictement positifs.

16) Supposons que P et Q sont à coefficients réels.

Montrons que P est un polynôme de Hurwitz **si et seulement si** P et Q sont à coefficients strictement positifs.

⇒ Supposons que P soit un polynôme de Hurwitz.

* Montrons que P est à coefficients strictement positifs.

Notons $\alpha_1, \dots, \alpha_p$ les racines réelles de P et $\mu_1, \dots, \mu_q$ ses racines complexes à partie imaginaire strictement positive, toutes répétées selon leur multiplicité.

Comme P est à coefficients réels, il s'écrit donc :

$$\begin{aligned} P &= \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) \times \prod_{k=1}^q (X - \mu_k)(X - \overline{\mu_k}) \\ &= \prod_{k=1}^p (X - \alpha_k) \times \prod_{k=1}^q (X^2 - 2\operatorname{Re}(\mu_k)X + |\mu_k|^2). \end{aligned}$$

Dans cette dernière écriture, tous les facteurs sont des polynômes de $\mathbb{R}[X]$ irréductibles. Ce sont des diviseurs de P donc ce sont des polynômes de Hurwitz d'après **Q12**. Ils sont tous irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ donc d'après **Q13**, ils sont de coefficients strictement positifs.

Enfin, d'après **Q15**, leur produit P l'est également.

* Concernant le polynôme Q , chacune de ses racines complexes est une somme $z_k + \bar{z}_\ell$ de deux racines complexes de P . Comme ces dernières sont dans Re^- , c'est également le cas des racines de Q . Q est donc également un polynôme de Hurwitz, à coefficients réels.

Le même raisonnement que pour P s'applique à Q , prouvant que Q est à coefficients strictement positifs également.

⇐ Supposons que P et Q sont à coefficients strictement positifs.

Comme c'est le cas de P , **Q11** montre que P est un polynôme de Hurwitz.