

Devoir Surveillé n° 6.

le 30 janvier.

Exercice 1 : matrices de rang 1

n est un entier naturel supérieur ou égal à 2.

On note $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices réelles d'ordre n , $M_{n,1}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices colonnes réelles d'ordre n et $M_{1,n}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices lignes réelles d'ordre n .

On suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Bernoulli de paramètre $p \in]0, 1[$. On définit les matrices aléatoires :

$$U = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} \text{ et } M = U \times U^T = \begin{pmatrix} X_1^2 & X_1X_2 & X_1X_3 & \cdots & \cdots & X_1X_n \\ X_2X_1 & X_2^2 & X_2X_3 & \cdots & \cdots & X_2X_n \\ X_3X_1 & X_3X_2 & X_3^2 & \cdots & \cdots & X_3X_n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots \\ X_nX_1 & X_nX_2 & X_nX_3 & \cdots & \cdots & X_n^2 \end{pmatrix}.$$

Q1. On pose $Y = \text{rg}(M)$.

Montrer que la variable aléatoire Y suit une loi de Bernoulli de paramètre $1 - (1 - p)^n$.

Q2. Reconnaître la loi de la variable aléatoire $\text{Tr}(M)$.

Q3. Vérifier que $M^2 = \text{Tr}(M)M$ et en déduire la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q4. Dans cette question, on suppose que $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont des variables aléatoires définies sur le même espace probabilisé, indépendantes et toutes de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. On définit la matrice aléatoire M comme ci-dessus. Avec ces nouvelles hypothèses, calculer à nouveau la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection ».

Q5. On note J la matrice de $M_n(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égaux à 1. Donner son rang et sa trace, puis la diagonaliser (on précisera une matrice de passage).

Q6. Donner (en le justifiant) une matrice d'ordre 3 de rang 1 non diagonalisable. Préciser sa trace.

Exercice 2

X est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$ d'espérance finie.

Q7. Exprimer, pour k non nul, $P(X = k)$ en fonction de $P(X > k - 1)$ et de $P(X > k)$.
Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^n kP(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - nP(X > n).$$

Démontrer le résultat de cours :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Q8. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules numérotées de 1 à n . On effectue, de façon équiprobable, p tirages successifs avec remise et on note X le plus grand nombre obtenu. Calculer, pour tout entier naturel k , $P(X \leq k)$, puis donner la loi de X .

Q9. Calculer $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p$, puis en utilisant la question **Q7**, déterminer un équivalent pour n au voisinage de $+\infty$ de $E(X)$.

Exercice 3

Q10. Démontrer que la famille $\left(\frac{i+j}{2^{i+j}}\right)_{(i,j) \in \mathbb{N}^2}$ est sommable et calculer sa somme.

Q11. Soit X et Y deux variables aléatoires sur le même espace probabilisé à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose que la loi conjointe du couple (X, Y) vérifie :

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^2, P(X = i, Y = j) = \frac{i+j}{2^{i+j+3}}.$$

- Vérifier que la relation ci-dessus définit bien une loi conjointe.
- Démontrer que les variables aléatoires X et Y suivent une même loi.
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 4

Dans cet exercice, n est un entier tel que $n \geq 2$.

Q12. Question préliminaire

Soient un réel $0 < \lambda < 1$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ une suite de variables aléatoires qui suivent chacune une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{\lambda}{n}$.

Justifier que, pour tout entier $k \geq 1$,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left[\frac{n}{n} \frac{n-1}{n} \dots \frac{n-k+1}{n} \right] = 1$$

et déterminer $\lim_{n \rightarrow +\infty} P(X_n = k)$. On convient alors d'approximer pour $n \geq 50$, $p \leq 0,01$ et $np < 10$ la loi binomiale de paramètres n et p par la loi de Poisson de paramètre $\lambda = np$.

Q13. Un examinateur interroge à l'oral du concours CCP n candidats tous nés en 1998. On suppose que les dates de naissances des n candidats sont uniformément réparties sur les 365 jours de l'année 1998. On note X_n la variable aléatoire égale au nombre de candidats qui sont convoqués le jour de leur anniversaire. Déterminer la loi de la variable X_n et donner son espérance.

Q14. Dans le cas où l'examineur interroge 219 candidats, donner une estimation de la probabilité que deux étudiants soient convoqués le jour de leur anniversaire. Prendre 0,55 comme valeur approchée de $e^{-0,6}$.