

Corrigé du DS 6

Exercice 1 : matrices de rang 1, CCINP 2025

Q1. On note $C_1, \dots, C_n$ les colonnes de la matrice M . Donc $C_1 = X_1 U, C_2 = X_2 U, \dots, C_n = X_n U$.

Donc les colonnes de M sont toutes colinéaires à la matrice U . Donc $Y(\Omega) \subset \{0, 1\}$.

Soit $\omega \in \Omega$; si $U(\omega) = 0$, alors $M(\omega) = 0$ et $Y(\omega) = 0$; sinon il existe $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ tel que $X_i(\omega) \neq 0$, donc le coefficient diagonal (i, i) de la matrice M est non nul, donc $Y(\omega) \neq 0$, donc $Y(\omega) = 1$. On a montré que $(Y = 1) = (U \neq 0)$.

Or $(U = 0) = \bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)$ et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p ; donc :

$$P(Y = 1) = 1 - P(U = 0) = 1 - P(X_1 = 0)^n = 1 - (1 - p)^n.$$

Conclusion :

$$Y \sim \mathcal{B}(1 - (1 - p)^n).$$

Q2. $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i^2$. Or, pour tout $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $X_i(\Omega) = \{0, 1\}$ donc $X_i^2 = X_i$ (car $0^2 = 0$ et $1^2 = 1$). Donc : $\text{tr}(M) = \sum_{i=1}^n X_i$ est la somme de n variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre p . Donc :

$$\text{tr}(M) \sim \mathcal{B}(n, p).$$

Q3.

$$\begin{aligned} M^2 &= (U \times U^\top) \times (U \times U^\top) \\ &= U \times (U^\top \times U) \times U^\top \\ &= U \times \left(\sum_{i=1}^n X_i^2 \right) \times U^\top \\ &= \text{tr}(M) M. \end{aligned}$$

Donc :

$$M^2 = \text{tr}(M) M.$$

Soit $\omega \in \Omega$.

$M(\omega)$ est une matrice de projection

$$\begin{aligned} &\Leftrightarrow M(\omega)^2 = M(\omega) \\ &\Leftrightarrow \text{tr}(M(\omega)) M(\omega) = M(\omega) \\ &\Leftrightarrow (\text{tr}(M(\omega)) - 1) M(\omega) = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{tr}(M(\omega)) = 1 \text{ ou } M(\omega) = 0 \end{aligned}$$

Donc : « M est une matrice de projection » $= (\text{tr}(M) = 1) \cup (M = 0)$. De plus, $(\text{tr}(M) = 1)$ et $(M = 0)$ sont incompatibles (car $\text{tr}(0) = 0$), donc :

$$\begin{aligned} P((\text{tr}(M) = 1) \cup (M = 0)) &= P(\text{tr}(M) = 1) + P(M = 0) \\ &= \binom{n}{1} p^1 (1 - p)^{n-1} + (1 - p)^n \\ &= (np + 1 - p)(1 - p)^{n-1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\text{probabilité de l'événement « } M \text{ est une matrice de projection » est : } (np + 1 - p)(1 - p)^{n-1}.$$

Q4. Comme dans la question précédente, « M est une matrice de projection » $= (\text{tr}(M) = 1) \cup (M = 0)$. Donc :

$$P((\text{tr}(M) = 1) \cup (M = 0)) = P(\text{tr}(M) = 1) + P(M = 0)$$

et les variables aléatoires $X_1, \dots, X_n$ sont indépendantes, donc

$$\begin{aligned} P(M = 0) &= P\left(\bigcap_{i=1}^n (X_i = 0)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n P(X_i = 0) \\ &= (e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!})^n \\ &= e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} P(\text{tr}(M) = 1) &= P\left(\bigcup_{i=1}^n (X_i = 1) \cap \bigcap_{j \neq i} (X_j = 0)\right) \\ &= \sum_{i=1}^n (\lambda e^{-\lambda} (e^{-\lambda})^{n-1}) \\ &= n\lambda e^{-n\lambda} \end{aligned}$$

Donc :

la probabilité de l'événement « M est une matrice de projection » est :
 $(1 + n\lambda)e^{-n\lambda}$.

Q5. Toutes les colonnes de J sont égales (donc colinéaires) et J est non nulle, donc

$$\text{rg}(J) = 1 \text{ et } \text{tr}(J) = n.$$

D'après le théorème du rang, $\dim(\text{Ker}(J)) = n - \text{rg}(J) = n - 1$; donc 0 est une valeur propre de J d'ordre de multiplicité au moins $n - 1$. De plus, le polynôme caractéristique de J est scindé dans $\mathbb{C}[X]$, donc la somme des racines complexes de J est $\text{tr}(J) = n$, donc n est une valeur propre de J et son ordre de multiplicité est nécessairement 1 (car 0 est d'ordre $n - 1$ et la somme des ordre de multiplicité est inférieur à n).

On remarque que $(1, \dots, 1)$ est un vecteur propre de J pour la valeur propre n et que $((-1, 1, 0, \dots, 0), \dots, (-1, 0, \dots, 0, 1))$ est une famille libre de $(n - 1)$ vecteurs propres de J pour la valeur propre 0. Donc :

$$D = P^{-1}DP \text{ avec } D = \text{diag}(n, 0, \dots, 0) \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Q6. Soit $M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Donc le polynôme caractéristique de M est $\chi_M = X^3$;

supposons par l'absurde que M est diagonalisable, donc son polynôme minimal μ_M est simplement scindé et a les mêmes racines que χ_M , donc $\mu_M = X$ et $M = X(M) = 0$ or $M \neq 0$, d'où la contradiction. Donc : M n'est pas diagonalisable, elle est de rang 1, d'ordre 3 et de trace 0.

Exercice 2 : CCINP 2024

Q7. X est à valeurs dans $\mathbb{N}$, donc pour tout $k \in \mathbb{N}^*$

$$\begin{aligned} (X = k) &= (k - 1 < X \leq k) \\ &\leq (X > k - 1) \setminus (X > k) \end{aligned}$$

et $(X > k) \subset (X > k - 1)$ donc :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k).$$

Soit $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n k P(X = k) &= \sum_{k=1}^n k (P(X > k - 1) - P(X > k)) \\ &= \sum_{k=1}^n k P(X > k - 1) - \sum_{k=1}^n k P(X > k) \quad (\text{décalage } j = k - 1) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (j + 1) P(X > j) - \sum_{k=1}^n k P(X > k) \\ &= 0 P(X > 0) + \sum_{k=1}^{n-1} P(X > k) - n P(X > n) \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n P(X > n).$$

On reprend ici la démonstration faite en cours : On pose pour tout $(k, j) \in \mathbb{N}^2$,

$$u_{k,j} = \begin{cases} P(X = k) & \text{si } j < k \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Dans $[0; +\infty[$ ($\forall (k, j) \in \mathbb{N}^2, u_{k,j} \geq 0$) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{+\infty} u_{k,j} &= \sum_{k=0}^{+\infty} \sum_{j=0}^{k-1} P(X = k) \\ &= \sum_{k=0}^{+\infty} k P(X = k) \\ &= E(X) \end{aligned}$$

et :

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=0}^{+\infty} u_{k,j} &= \sum_{j=0}^{+\infty} \sum_{k=j+1}^{+\infty} P(X = k) \\ &= \sum_{j=0}^{+\infty} P(X > j)\end{aligned}$$

Donc, d'après le théorème de Fubini positif :

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

une autre possibilité, qui utilise le début de la question :

Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$0 \leq n P(X > n) = \sum_{k=n+1}^{+\infty} n P(X = k) \leq \sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X = k)$$

Or X est d'espérance finie, donc la série $\sum k P(X = k)$ converge, donc la suite des restes $(\sum_{k=n+1}^{+\infty} k P(X = k))_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0; donc d'après le théorème des gendarmes :

$$n P(X > n) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Or $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=1}^n k P(X = k) = \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) - n P(X > n)$, donc : $\sum P(X > k)$ converge et

$$E(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k).$$

Q8. On pose pour tout $i \in \llbracket 1; p \rrbracket$, B_i le numéro de la boule du $i^{\text{ième}}$ tirage. Les tirages étant équiprobables et avec remise, $B_i \sim \mathcal{B}(\llbracket 1; n \rrbracket)$ et les $(B_i)_{i \in \llbracket 1; n \rrbracket}$ sont indépendants. Donc $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ et pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$,

$$\begin{aligned}P(X \leq k) &= P\left(\bigcap_{i=1}^p (B_i \leq k)\right) \\ &= \prod_{i=1}^p P(B_i \leq k) \\ &= \left(\frac{k}{n}\right)^p\end{aligned}$$

Donc :

$$\text{pour tout } k \in \llbracket 0; n \rrbracket, P(X \leq k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p \text{ et pour tout } k > n, P(X \leq k) = 1.$$

Et d'après le résultat de la question 1 pour tout $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$

$$P(X = k) = P(X > k-1) - P(X > k) = (1 - P(X \leq k-1)) - (1 - P(X \leq k))$$

Donc :

$$X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket \text{ et } \forall k \in \llbracket 1; n \rrbracket, P(X = k) = \left(\frac{k}{n}\right)^p - \left(\frac{k-1}{n}\right)^p.$$

Q9. On reconnaît les sommes de Riemann associée à la fonction $x \mapsto x^p$ continue sur $[0; 1]$ donc :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p = \int_0^1 x^p dx = \frac{1}{p+1}$$

Or : $X(\Omega) = \llbracket 1; n \rrbracket$ donc X est à valeurs dans $\mathbb{N}$ et d'espérance finie, donc d'après la question 1

$$\begin{aligned}E(X) &= \sum_{k=0}^{+\infty} P(X > k) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} P(X > k) \quad (\forall k > n-1, P(X > k) = 0) \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} (1 - P(X \leq k)) \\ &= n - \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p \\ &= n \left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right)\end{aligned}$$

Or :

$$\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{p+1} > 0$$

Donc :

$$\left(1 - \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} \left(\frac{k}{n}\right)^p\right) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{p}{p+1}$$

Donc :

$$E(X) \underset{n \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{pn}{p+1}.$$