

Problème 1 : CCINP PSI 2020**Partie I - Conducteur ohmique****Conducteur ohmique cylindrique en régime stationnaire**

Q1. Formulation locale de la loi d'Ohm : $\vec{j} = \gamma \vec{E}$, d'où $\vec{j} = -\gamma \text{grad}(V)$ où γ est la conductivité électrique.

Pour le cuivre, son ordre de grandeur est de $6 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$.

Q2. On peut prendre l'exemple de la conduction thermique, qui va d'ailleurs servir pour la suite.

La loi électrique $\vec{j} = -\gamma \text{grad}(V)$ devient la loi thermique $\vec{j}_{cd} = -\lambda \text{grad}(T)$.

$\vec{j}_{cd}$ densité de flux thermique conductif en $[\text{W} \cdot \text{m}^{-2}]$.

λ conductivité thermique du milieu en $[\text{W} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}]$. T en $[\text{K}]$ est la température locale du milieu.

Q3. Puisque la densité de courant est uniforme, l'intégration sur la surface donne, compte tenu du sens, $I = j \cdot S$.

La loi d'Ohm locale, en projection sur Oy donne : $\frac{dV}{dy} = -\frac{j}{\gamma}$ dont l'intégration donne : $V(y) = -\frac{j}{\gamma} y + cte$

Puis : $U = V(y_A) - V(y_A + h) = \left[\frac{jh}{\gamma} \right]$.

Q4. $R_\Omega = \frac{U}{I} = \frac{h}{\gamma S}$.

Conducteur ohmique parallélépipédique, semi-infini, en régime sinusoïdal et effet de peau

Q5. Il s'agit d'une équation de diffusion et D est en $[\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}]$.

Q6. Le courant élémentaire traversant la surface $dS = dx dz$ est $di(t) = j(x, t) dx dz$ qu'on intègre pour z variant de 0 à p et x variant de 0 à l'infini, dans le sens de Oy :

$$i(t) = \int_{z=0}^p dz \int_{x=0}^{+\infty} j(x, t) dx = p \int_{x=0}^{+\infty} j(x, t) dx$$

On nous donne la primitive nécessaire. On obtient donc :

$$i(t) = \int_{x=0}^{+\infty} j_0 e^{-x/\delta} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{x}{\delta}\right) dx = \frac{p j_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{0}{\delta} - \frac{\pi}{4}\right) = \left[\frac{p j_0 \delta}{\sqrt{2}} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right) \right]$$

On en déduit : $I_{eff} = \frac{p j_0 \delta}{2}$

Q7. Puissance volumique instantanée dissipée par effet Joule dans un conducteur ohmique : $P_{JV} = \gamma E^2 = \left[\frac{j^2}{\gamma} \right]$.

Avec l'expression fournie et le résultat de Q6, on obtient : $\frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma} = R I_{eff}^2$, d'où $\frac{j_0^2 p h \delta}{4\gamma} = R \frac{p^2 j_0^2 \delta^2}{4}$, puis $\frac{h}{\gamma} = R p \delta$, et enfin $\left[R = \frac{h}{\gamma p \delta} \right]$.

On trouve donc une formule similaire à celle de la question Q4, mais avec S remplacé par $p\delta$. On voit donc que tout se passe comme si le courant circulait dans une épaisseur δ selon Ox , d'où le nom « épaisseur de peau ».

Q8. Question pas claire, car on ne nous dit pas ce qu'on maintient constant, tout en faisant tendre γ vers l'infini ou zéro.

Qualitativement, si la conductivité est infinie (supraconducteur), c'est-à-dire si la résistivité est nulle, $\left[P_{Joule} = 0 \right]$.

Et si la conductivité est nulle, il ne peut pas y avoir de courant, donc à nouveau $\left[P_{Joule} = 0 \right]$.

Q9. La formule fournie en Q7 montre que, pour j_0 fixé, P_{Joule} est proportionnel à δ , donc varie comme $\frac{1}{\sqrt{f}}$. Donc, pour j_0 fixé, P_{Joule} diminue quand la fréquence augmente.

Quant à la résistance du conducteur, on a trouvé $R = \frac{h}{\gamma p \delta}$, donc $R(f) = \frac{h \sqrt{\mu_0 \gamma \omega}}{\gamma p \sqrt{2}} = \frac{h \sqrt{\mu_0 \omega}}{p \sqrt{2} \gamma} = \frac{h \sqrt{\mu_0 \pi f}}{p \sqrt{\gamma}}$.

Il vient $R(f_0) = \frac{h \sqrt{\mu_0 \pi f_0}}{p \sqrt{\gamma}}$, puis $\frac{R(f)}{R(f_0)} = \sqrt{\frac{f}{f_0}}$. On a donc $\left[\alpha = \frac{1}{2} \right]$.

Partie II - Commande d'un moteur à courant continu

Q10. Puisqu'on suppose l'impédance de la M.C.C. grande devant la résistance R_2 , le courant est quasiment le même dans R_1 et R_2 , donc on peut appliquer le théorème du pont diviseur de tension, qui donne $\left[V_{MCC} = \frac{R_2}{R_1 + R_2} U_0 \right]$.

Q11. Visiblement, l'« amplificateur linéaire » dont on parle ici est un « ALI ». Mais il est de notoriété publique qu'un ALI est un composant de traitement de signal, pas un composant de puissance. Le courant de sortie ne peut pas

dépasser quelques dizaines de mA (25 mA pour un ALI 741), donc inutile d'espérer alimenter un moteur à courant continu avec cela !

Malgré tout, on peut déterminer en fonction de α et de V_{sat} , la valeur moyenne V_{moy} de la tension hachée U_I :

$$U_1 = \frac{1}{T}(\alpha T V_{sat} - (T - \alpha T) V_{sat}), \text{ d'où } \boxed{U_1 = (2\alpha - 1) V_{sat}}.$$

Q12. Le premier est un montage « potentiométrique » ; il permet en effet de faire varier la tension d'alimentation de la MCC, mais les résistances dissipent de l'énergie en permanence, donc le rendement du système n'est pas bon. Le second devrait être associé à un amplificateur de puissance, pour que le courant puisse être important. Et il est alors très intéressant car le rendement du hacheur est bien meilleur que celui d'un montage potentiométrique.

Q13. Compte tenu du rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse, l'Ali 1 fonctionne, a priori, en régime linéaire. Compte tenu de l'absence de rebouclage de la sortie sur l'entrée inverseuse, l'Ali 2 fonctionne en régime saturé.

Q14. Le montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.1. est classique ; en utilisant la loi des nœuds sur l'entrée inverseuse, on obtient aisément la fonction de transfert $\boxed{H(j\omega) = \frac{V_A}{V_B} = -\frac{1}{jR_3C\omega}}$. La fonction réalisée par cette partie du montage est l'intégration (et une multiplication par une constante négative).

Q15. Le montage lié à l'amplificateur linéaire A.Li.2. est un comparateur à hystérésis.

Q16. Pour l'Ali 2, $V^- = 0$, et en appliquant la loi des nœuds sur l'entrée non inverseuse, $\frac{V_A - V^+}{R_4} = \frac{V^+ - V_B}{R_5}$, donc $V^+ = \frac{V_A R_5 + V_B R_4}{R_4 + R_5}$. L'Ali 2 est en saturation haute pour $\frac{V_A R_5 + V_B R_4}{R_4 + R_5} > 0$, c'est-à-dire pour $V_A > -\frac{R_4}{R_5} V_{sat}$ et en saturation basse pour $\frac{V_A R_5 + V_B R_4}{R_4 + R_5} < 0$, c'est-à-dire pour $V_A < \frac{R_4}{R_5} V_{sat}$.

De plus, puisque pour l'Ali 1, $V^+ = 0$, V_A est la tension aux bornes du condensateur C ; c'est donc une fonction continue du temps.

Puisqu'on suppose que $V_A(t=0) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$, c'est qu'à $t=0$, la condition $V_A < \frac{R_4}{R_5} V_{sat}$ cesse d'être vraie, donc l'Ali 2 bascule de la saturation basse à la saturation haute.

Le montage intégrateur donne $V_A(t) = V_A(0) - \frac{1}{R_3 C} \int_0^t V_{sat} dt$, d'où $V_A(t) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5} - \frac{V_{sat}}{R_3 C} t$.

Ceci dure jusqu'à l'instant t_1 où $V_A(t_1) = -\frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$, donc $t_1 = 2 \frac{R_4 R_3 C}{R_5}$. L'Ali 2 passe alors en saturation basse.

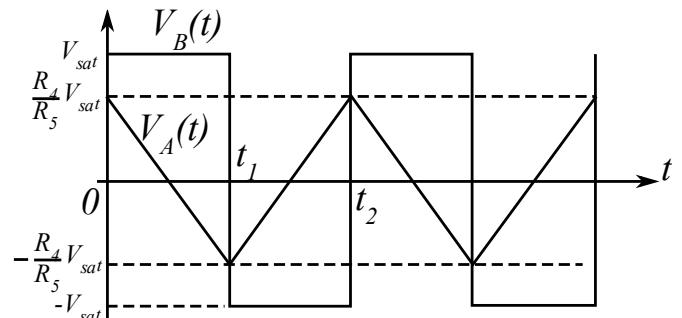
Puis $V_A(t) = V_A(t_1) + \frac{V_{sat}}{R_3 C} (t - t_1) = -\frac{R_4 V_{sat}}{R_5} + \frac{V_{sat}}{R_3 C} (t - t_1)$.

Ceci dure jusqu'à l'instant t_2 où $V_A(t_2) = \frac{R_4 V_{sat}}{R_5}$, donc

$$t_2 - t_1 = 2 \frac{R_4 R_3 C}{R_5}.$$

L'allure des deux tensions V_A et V_B en fonction du temps est dessinée ci-contre.

Lorsqu'on augmente la résistance R_3 , les durées des paliers de V_B augmentent, donc la période de fonctionnement augmente aussi.



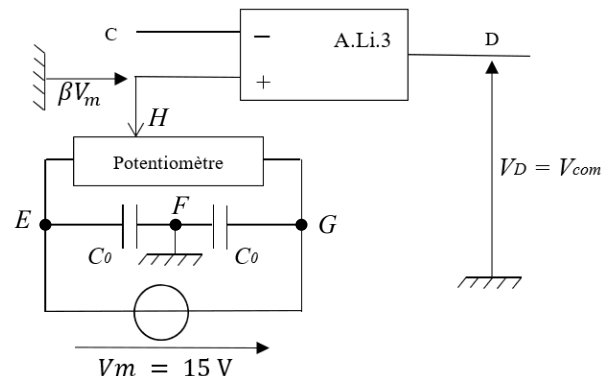
Q17. Ajoutons les points E, F, G, H sur la figure 11 (cf ci-contre).

Hélas, le circuit de la figure 11 présente un souci qui compromet la résolution de cette question : du fait du fil de masse entre les deux condensateurs, on ne peut pas appliquer le théorème du pont diviseur de tension sur la partie formée des deux condensateurs ; pour éviter cet écueil, il faudrait mettre un montage suiveur entre le point F et la masse. Supposons que cela soit le cas. En réutilisant les calculs faits en Q14, on a $V_F - V_E = \frac{V_G - V_E}{2} = \frac{V_m}{2}$, et puisque $V_F = 0$,

$$V_E = -\frac{V_m}{2}, \text{ et } V_G = +\frac{V_m}{2}.$$

Notons R_{pot} la résistance totale du potentiomètre entre E et G , et r la résistance de la portion du potentiomètre située entre E et H . Vu que pour l'Ali 3, $i^+ = 0$, on peut appliquer le théorème du pont diviseur de tension pour écrire que

$$V_H - V_E = \frac{r}{R_{pot}} V_m, \text{ d'où } V_H = -\frac{V_m}{2} + \frac{r}{R_{pot}} V_m = V_m \left(\frac{r}{R_{pot}} - \frac{1}{2} \right).$$



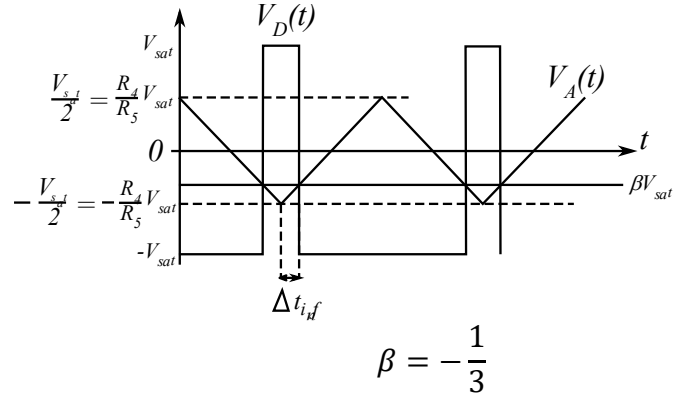
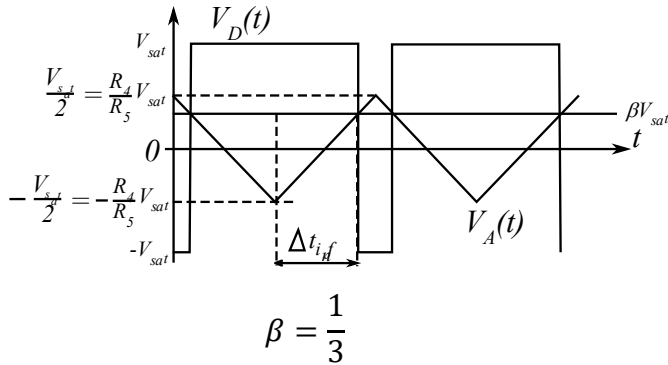
Or, $0 \leq \frac{r}{R_{pot}} \leq 1$, donc $-\frac{V_m}{2} \leq V_H \leq \frac{V_m}{2}$.

Et puisque V_H représente V^+ pour l'Ali 3, en posant $V^+ = \beta V_m$, on voit que $\boxed{-0,5 \leq \beta \leq 0,5}$.

Pour $R_5 = 2R_4$, $V_C(t) = V_A(t)$ est un signal triangle variant entre $-\frac{V_{sat}}{2}$ et $\frac{V_{sat}}{2}$. Et puisque

l'Ali3 est monté en comparateur simple, on obtient aisément l'allure de la tension $V_D(t)$

dans les deux cas correspondant à $\beta = \frac{1}{3}$ et $\beta = -\frac{1}{3}$:



Q18. Puisque : $V_{com}(t) = V_D(t)$, la fréquence de hachage f_h est la fréquence fondamentale de $V_D(t)$, qui est la même que celle de $V_A(t)$. Cette fréquence est l'inverse de la période $T = 4 \frac{R_4 R_3 C}{R_5}$, donc $\boxed{f_h = \frac{R_5}{4 R_4 R_3 C}}$.

Et puisque $R_5 = 2R_4$, $\boxed{f_h = \frac{1}{2 R_3 C}}$.

Et le rapport cyclique α' du hacheur est le rapport $\alpha' = \frac{\Delta t_h}{T}$, en notant Δt_h la portion de période au cours de laquelle $V_D(t) = +V_{sat}$. On a donc aussi, en se limitant par exemple à la phase de croissance de $V_A(t)$, de durée $T/2$, $\alpha' = \frac{\Delta t_{inf}}{T/2}$, en notant Δt_{inf} la portion de la phase de croissance de $V_A(t)$ pendant laquelle $V_A(t) < \beta V_{sat}$.

D'après le théorème de Thalès, on a donc $\alpha' = \frac{\Delta t_{inf}}{T/2} = \frac{\beta V_{sat} - (-\frac{V_{sat}}{2})}{\frac{V_{sat}}{2} - (-\frac{V_{sat}}{2})}$, donc $\boxed{\alpha' = \frac{\beta + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}} = \beta + 0,5 = \frac{r}{R_{pot}}}$.

Partie III - Aspects thermiques

Q19. Résistance thermique et conductance thermique sont inverses l'une de l'autre.

Une conductance thermique est en $W.K^{-1}$.

Q20. On applique le premier principe au transistor entre t et $t + dt$:

$$C_t dT_t = P_s(t)dt - G_{tb}(T_t(t) - T_b(t))dt$$

On divise par dt qu'on fait tendre vers 0 de façon à faire apparaître les dérivées :

$$\boxed{C_t \left(\frac{dT_t}{dt} \right) + G_{tb} T_t(t) = P_s(t) + G_{tb} T_b(t)}.$$

Q21. On applique le premier principe au transistor entre t et $t + dt$:

$$C_b dT_b = G_{tb}(T_t(t) - T_b(t))dt - G_{be}(T_b(t) - T_{ext})dt$$

$$\boxed{C_b \left(\frac{dT_b}{dt} \right) + (G_{tb} + G_{be}) T_b(t) = G_{tb} T_t(t) + G_{be} T_{ext}}.$$

Q22. Les équations précédentes équivalent à des lois des mailles, conformes au schéma électrique de la figure 13, avec les correspondances suivantes :

$$\boxed{B_1 \leftrightarrow R_{tb} = \frac{1}{G_{tb}}}; \boxed{B_2 \leftrightarrow C_b}; \boxed{B_3 \leftrightarrow R_{be} = \frac{1}{G_{be}}}; \boxed{V_1 \leftrightarrow T_t}; \boxed{V_2 \leftrightarrow T_b}; \boxed{V_3 \leftrightarrow T_{ext}}.$$

Q23. h est en $\boxed{W.K^{-1}.m^{-2}}$.

La température de l'ailette n'est pas uniforme. A surface égale le flux thermique conductif n'est pas le même selon la valeur de x le long de l'ailette. On fera donc un bilan élémentaire.

Q24. En régime stationnaire, la variation d'énergie interne est nulle pour la tranche élémentaire. Le premier principe appliqué à cette tranche s'écrit donc (en négligeant la conducto-convection sur les petites faces latérales, puisque $e \ll b$) :

$$0 = (j_{cd}(x) - j_{cd}(x + dx))be - 2b dx h(T(x) - T_a)$$

On divise par dx , qu'on fait alors tendre vers 0 pour obtenir la dérivée :

$$-\left(\frac{dj_{cd}}{dx}(x)\right) - \frac{2h}{e}(T(x) - T_a) = 0 \quad \text{avec} \quad j_{cd}(x) = -\lambda \frac{dT}{dx}(x)$$

Ce qui donne finalement : $\boxed{\frac{d^2T}{dx^2}(x) - \frac{2h}{e\lambda}(T(x) - T_a) = 0}$,

On voit apparaître une longueur caractéristique : $L = \sqrt{\frac{e\lambda}{2h}}$ d'où $\frac{d^2T}{dx^2} - \frac{T-T_a}{L} = 0$.

Q25. Numériquement, $\boxed{L = 1,0 \text{ cm} \ll a}$. On peut donc considérer a comme infini.

La solution générale s'écrit : $T(x) = A \exp\left(-\frac{x}{L}\right) + B \exp\left(\frac{x}{L}\right) + T_a$

Pour éviter la divergence en $x = a$ considéré infini, il faut donc $B = 0$ ce qui donne $A = T_o - T_a$ avec la condition aux limites en $x = 0$.

$$\boxed{T(x) = (T_o - T_a) \exp\left(-\frac{x}{L}\right) + T_a}$$

Q26. Par dérivation avec Fourier, on obtient $j_{cd}(x)$ puis $j_{cd}(0) = \frac{\lambda}{L}(T_o - T_a)$

puis : $\boxed{P_{th} = bej_{cd}(0) = b\sqrt{2he\lambda}(T_o - T_a)}$.

Difficile de répondre à la question sur la réduction de a . En effet, on a considéré a quasi-infini, et on a fait l'approximation $B = 0$ en conséquence.

Si on choisit a plus petit, il faut reprendre les calculs, avec $B \neq 0$, ce qui sera assez long, et ne semble pas correspondre à l'esprit de cette fin de question ...

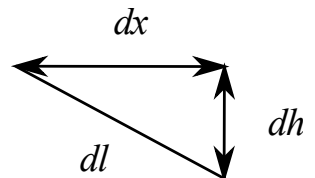
On voit dans la formule ci-dessus que P_{th} est proportionnel à l'épaisseur e de l'ailette. Il peut donc être judicieux de prendre e un peu plus grand (au moins sur une partie de l'ailette), pour pouvoir diminuer a . C'est ce qu'on croit apercevoir sur la figure 14 : des ailettes plus larges près de la base.

Partie IV - Le funiculaire ☹️☹️☹️☹️

« * La pente est définie comme le rapport $\frac{dl}{dh}$, où dl correspond à une petite longueur de voie et dh à la petite différence d'altitude correspondante. » ☹️☹️☹️☹️

Entre l'auteur, le cobayeur, le président de jury : personne n'a vu que cette définition était violemment fautive ??? non seulement dh devrait être au numérateur, mais en plus, ce n'est pas dl qu'il faut prendre, c'est dx , distance **horizontale** : la pente est $\frac{dh}{dx}$ (et si $dh = 0$, la pente est nulle, pas infinie !!).

Ceci dit, on n'en avait pas forcément besoin pour résoudre la question, car **seul le dénivelé vertical compte**.



Dénivelé :	250 m
Pente* maximale :	30 %
Longueur développée :	1 000 m
Débit de montée :	1 500 personnes par heure
Vitesse d'exploitation :	2 m·s ⁻¹

Tableau 2 - Caractéristiques du funiculaire

Q27.

Méthode 1 (rapide et à la louche) :

En $\Delta t = 1\text{h}$, on peut monter $N_1 = 1500$ personnes, mais on peut donc en descendre autant. Si la rame montante est pleine, et celle descendante à moitié, c'est énergétiquement comme si en $\Delta t = 1\text{h}$, on ne montait que $N_2 = 750$ personnes. En notant $P_0 = 4 \text{ kW}$, la puissance permettant de vaincre les frottements quand les deux rames sont remplies de la même façon, $m = 80 \text{ kg}$ la masse moyenne d'un passager, avec ses bagages, et Δh le dénivelé, la puissance moyenne dépensée est

$$\boxed{P_{moy} = \frac{N_2 mg \Delta h}{\Delta t} + P_0 = \frac{750 \times 80 \times 9,8 \times 250}{3600} + 4.10^3 = 4.10^4 \text{ W}}$$

Méthode 2 (plus fine et plus détaillée) :

Il faut commencer par estimer le nombre de personnes dans une rame. L'énoncé aurait dû nous indiquer le nombre de places dans une rame, qui est une des données du cahier des charges. Comme ce n'est pas le cas, nous devons nous débrouiller avec 3 valeurs : la longueur développée ($L=1000$ m), le débit de montée ($D=1500$ p/h), et la vitesse d'exploitation ($v_0 = 2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$).

Mais le funiculaire ne se déplace pas en permanence à la vitesse d'exploitation : il passe un certain temps en gare, à attendre la montée et la descente des passagers.

Donc on doit inventer des durées d'attente en gare, entre deux mouvements des rames. Prenons par exemple $\Delta t_{att} = 1 \text{ minute} = 60 \text{ s}$.

Et puis une fois en mouvement, une rame ne passe pas instantanément d'une vitesse nulle à la vitesse d'exploitation. Faute d'information, nous négligerons la durée des accélérations.

La durée totale d'un cycle de montée est $T = \frac{L}{v_0} + \Delta t_{att}$.

Le débit de montée est certainement la valeur maximale que peut atteindre le funiculaire. Donc si on note N le nombre de personnes que peut contenir une rame, on a : $D = \frac{N}{T}$, d'où $N = D \left(\frac{L}{v_0} + \Delta t_{att} \right)$.

Notons m la masse moyenne d'un passager, avec ses bagages. On ne sait pas si le funiculaire dont il est question ici est destiné à des skieurs (avec des vêtements chauds, des skis, des chaussures de ski, des bâtons), ou bien à des piétons habillés normalement. Prenons par exemple $m = 80 \text{ kg}$.

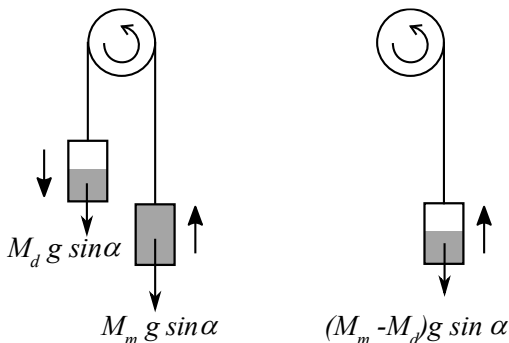
Notons M la masse d'une rame. Si celle de montée est pleine, et celle de descente à moitié pleine, les masses des deux rames sont $M_m = M + Nm$, et $M_d = M + \frac{Nm}{2}$.

Pour calculer le travail du poids (qui est une force verticale), seul compte le dénivelé vertical (cf méthode 1).

Pour celles et ceux qui ne sont pas convaincus, procédons autrement : on nous donne la pente maximale, que nous noterons a_{max} . Mais la pente moyenne se calcule au moyen du dénivelé Δh et de la longueur développée L , et il est plus simple de s'intéresser à l'angle α qu'à sa tangente, qui représente la pente moyenne, a_{moy} :

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{\Delta h}{L}\right).$$

Contrairement à ce que dit l'énoncé, la pente est la tangente de l'angle entre les rails et l'horizontale (cf dessin ci-contre), d'où $\alpha = \arctan a$. En se plaçant dans le plan moyen des rails, on a le schéma ci-dessous, sur lequel apparaissent les composantes des poids projetées dans le plan de la figure. Si on néglige les poids



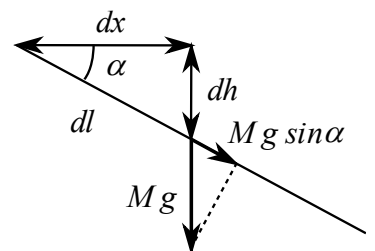
des câbles devant ceux des rames, le problème mécanique du dessin de gauche équivaut à celui du dessin de droite. La puissance mécanique nécessitée par la force $(M_m - M_d)g \sin \alpha$ exercée sur la rame qui se déplace à la vitesse v_0 est $P_1 = (M_m - M_d)g \sin \alpha v_0$. Cette puissance mécanique s'ajoute à celle, $P_0 = 4 \text{ kW}$, permettant de vaincre les frottements, quand les deux rames sont remplies de la même façon.

La puissance totale nécessaire dans le contexte évoqué est donc

$$P = P_1 + P_0 = (M_m - M_d)g \sin \alpha v_0 + P_0$$

$$\text{D'où } P = \frac{Nm}{2} g \frac{\Delta h}{L} v_0 + P_0, \text{ et enfin, } P = D \left(\frac{L}{v_0} + \Delta t_{att} \right) \frac{m}{2} g \frac{\Delta h}{L} v_0 + P_0.$$

$$\text{Numériquement, } P = \frac{1500}{3600} \left(\frac{1000}{2} + 60 \right) \times \frac{80}{2} \times 9,8 \times \frac{250}{1000} \times 2 + 4.10^3 = 5.10^4 \text{ W}.$$



Conclusion : les 2 méthodes donnent des résultats assez comparables. La première donne une puissance moyenne, celle qu'on aurait si le funiculaire fonctionnait en permanence, comme un télésiège. En réalité, un funiculaire, tout comme un téléphérique, ne fonctionne pas en permanence, et il fait des va et viens. C'est la raison pour laquelle la première méthode donne une valeur un peu plus petite : c'est une moyenne entre celle (méthode 2) pendant le fonctionnement et celle, nulle pendant l'arrêt.

Q28. L'utilisation d'un hacheur série pour alimenter la M.C.C. du funiculaire n'est pas une très bonne idée mais il convient de rappeler que le hacheur série est le seul au programme !

Ce n'est pas une très bonne idée car il ne permet que d'envoyer de l'énergie à la machine à courant continu, en tant que moteur. Lorsque la rame descendante est plus remplie que la rame montante, il serait préférable de

recupérer de l'énergie de la part de la machine à courant continu. Pour cela, il faudrait un hacheur parallèle (appelé aussi survolteur). Mais puisqu'on y est à faire du hors-programme, on a besoin que la machine à courant continu change de sens de rotation, pour que chaque puisse monter et descendre. Donc on a besoin d'un hacheur réversible en tension et en courant, ce qu'on appelle un hacheur 4 quadrants. C'est le seul qui permettra d'utiliser la machine à courant continu dans ses 4 quadrants : moteur marche avant, moteur marche arrière, génératrice marche avant, génératrice marche arrière.

On pourrait aussi utiliser d'autres systèmes de récupération d'énergie, comme un volant d'inertie, ou bien une batterie, ou un supercondensateur, etc.

Partie VI - Chlore et eau de Javel

Classification périodique des éléments

Q29. L'élément sodium $^{23}_{11}\text{Na}$ appartient à la 3^{ème} période et à la 1^{ère} colonne.

L'élément chlore $^{35,5}_{17}\text{Cl}$ appartient à la 3^{ème} période et à l'avant-dernière colonne.

Pour le chlore dans son état fondamental, la configuration électronique est $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^5$.

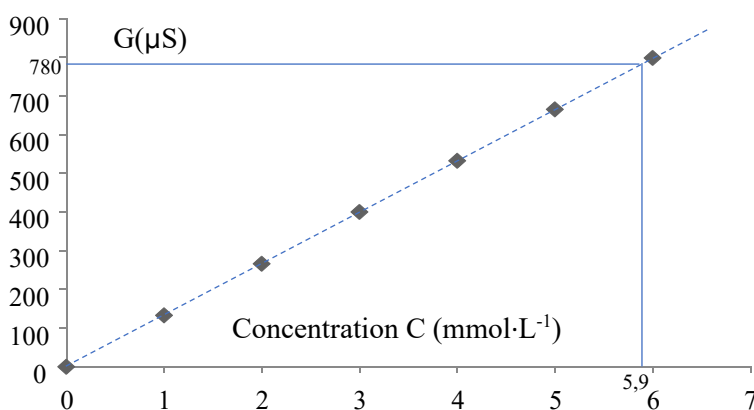
Q30. Le sodium appartient à la famille des alcalins. Le chlore appartient à la famille des halogènes, tout comme le fluor et le brome.

Q31. La conductivité électrique d'une solution dépend surtout des ions qui y sont présents (leur mobilité plus ou moins grande), et de leurs concentrations. Elle dépend aussi de la température.

La cellule associée au conductimètre est la A : on y aperçoit deux plaques métalliques en vis-à-vis.

La cellule B sert à mesurer un pH, c'est est une « électrode de verre ».

Q32. À l'aide de la courbe d'étalonnage (cf ci-contre), on établit que, puisque la conductivité mesurée est $G = 780 \mu\text{S}$, le filtrat, dilué au millième, a une concentration de $5,9 \text{ mmol}\cdot\text{L}^{-1}$. Donc le filtrat avait une concentration de $5,9 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. On peut donc conclure que la solubilité du chlorure de sodium à température ambiante est $s = 5,9 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$.



Q33. Avec un nombre d'oxydation de -II pour l'oxygène, et +I pour l'hydrogène, on a :

Espèce	HClO	Cl ⁻	ClO ⁻	Cl ₂ (aq)
n.o. du chlore	+I	-I	+I	0

A	B	C	D
HClO	Cl ₂ (aq)	Cl ⁻	ClO ⁻

Le tableau de droite s'en déduit en rangeant les espèces verticalement par n.o. croissant, et en mettant l'acide à gauche de la base.

Protocole

Étape 1 : on dilue d'un facteur 100 le produit commercial. On prélève ensuite un volume V_{init} de solution diluée.

Étape 2 : on ajoute de l'iodure de potassium (K^+ , I^-) en excès.

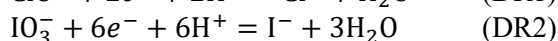
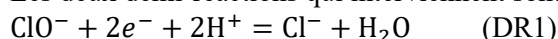
Étape 3 : on acidifie la solution en ajoutant quelques gouttes d'une solution d'acide chlorhydrique concentrée. La solution prend alors une couleur jaune brunâtre.

Étape 4 : on ajoute une faible quantité d'empois d'amidon pour que le dosage ne soit pas perturbé. La solution est alors de couleur bleue intense.

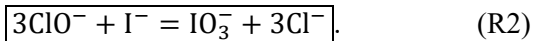
Étape 5 : on dose alors la solution par une solution de thiosulfate de sodium (2Na^+ , $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$) de concentration connue C_1 . On note V_{eq} le volume de thiosulfate versé à l'équivalence, repéré par le changement de couleur.

Q34. En analysant le diagramme potentiel-pH, on voit (règle du gamma) qu'en milieu basique, les ions iodure I^- doivent réagir avec les ions ClO^- , pour former des IO_3^- et des Cl^- .

Les deux demi-réactions qui interviennent sont :



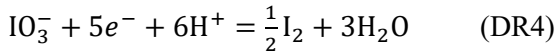
La réaction bilan de l'étape 2 s'obtient en éliminant les électrons :



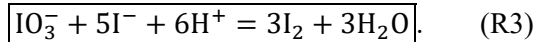
On met de l'iodure de potassium en excès pour transformer tous les ions ClO^- , le but étant de doser ces ions présents dans l'eau de Javel.

Q35. La réaction chimique qui s'est produite lors de l'étape 3 est celle entre les ions I^- et les ions IO_3^- .

Les deux demi-réactions qui interviennent sont :



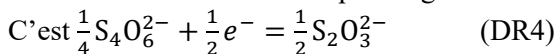
La réaction bilan de l'étape 3 s'obtient en éliminant les électrons :



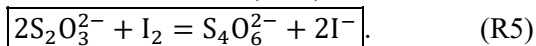
Cette équation d'oxydo-réduction porte le nom de médiamutation.

Q36. Il ne fallait-il pas acidifier la solution avant l'ajout de l'iodure de potassium, car cela aurait provoqué la médiamutation de ClO^- et Cl^- , pour former du dichlore Cl_2 . On nous rappelle dans l'énoncé que le dichlore gazeux est un produit dangereux.

Q37. Pour la réaction qui a lieu avec le thiosulfate de sodium, il aurait été sympathique de rappeler le couple rédox associé : cela ne me semble pas exigible des PSI.



On la combine avec (DR3), en éliminant les électrons :



Q38. Soit n_0 le nombre de moles de ClO^- présentes dans la solution diluée de l'étape 1. On a donc $n_0 = \frac{C_0 V_{\text{init}}}{100}$.

Suite à l'étape 2, on a donc, d'après (R2), $\frac{n_0}{3}$ moles de IO_3^- .

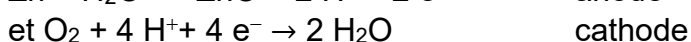
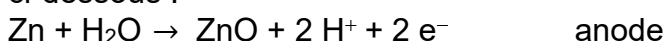
Puis l'étape 3 conduit à n_0 moles de I_2 .

La réaction (R5) du dosage de l'étape 5 donne, à l'équivalence, $C_1 V_{\text{eq}} = 2n_0$, d'où $C_1 V_{\text{eq}} = \frac{C_0 V_{\text{init}}}{50}$,

puis $C_0 = 50C_1 \frac{V_{\text{eq}}}{V_{\text{init}}}.$

Piles zinc-air

Q39. L'équation de la réaction de fonctionnement est la combinaison linéaire des demi-équations ci-dessous :



En combinant les deux, on obtient bien la réaction donnée dans l'énoncé : $2\text{Zn} + \text{O}_2 \rightarrow 2\text{ZnO}$

Il y a donc oxydation de Zn à l'anode, qui est donc la face du dessus, vers laquelle est la poudre de zinc.

Et il y a réduction de O_2 à la cathode, qui est la face de dessous, dans laquelle il y a des orifices pour faire rentrer l'air.

Les électrons sont libérés à l'anode (face du dessus) et entrent dans le circuit électrique relié à la pile.

Le courant électrique rentre donc par la face du dessus, qui constitue la borne moins.

On peut justifier cela autrement : à la différence d'un électrolyseur, une pile fonctionne de façon spontanée, donc avec un gamma favorable, donc la courbe intensité potentiel anodique doit être à gauche de la courbe cathodique. Donc le potentiel de la cathode est supérieur à celui de l'anode :

Cathode = borne + ; anode = borne -.

Q40. La tension à vide standard aux bornes de la pile vaut : $e^\circ = E^\circ(\text{O}_{2(g)}/\text{H}_2\text{O}_{(l)}) - E^\circ(\text{ZnO}_{(s)}/\text{Zn}_{(s)})$

AN : $e^\circ = 1,23 - (-0,43) = 1,66 \text{ V}$

Q41. Pour la réaction de fonctionnement : $2 \text{Zn}_{(s)} + \text{O}_{2(g)} = 2 \text{ZnO}_{(s)}$ on a d'après la loi de Hess :

$$\Delta_r H^\circ = 2\Delta_f H^\circ(\text{ZnO}_{(s)}) - 2\Delta_f H^\circ(\text{Zn}_{(s)}) - \Delta_f H^\circ(\text{O}_{2(g)}). \quad \text{AN : } \Delta_r H^\circ = -2 \times 350 = -700 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

Par définition : $\Delta_r S^\circ = 2S_m^\circ(\text{ZnO}_{(s)}) - 2S_m^\circ(\text{Zn}_{(s)}) - S_m^\circ(\text{O}_{2(g)})$.

$$\text{AN : } \Delta_r S^\circ = 2 \times 40 - 2 \times 40 - 200 = -200 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}$$

$$\Delta_r G^\circ = \Delta_r H^\circ - T\Delta_r S^\circ.$$

$$\text{A } 298 \text{ K : } \Delta_r G^\circ(298 \text{ K}) = -700 \cdot 10^3 + 200 \times 298 \simeq -640 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$K^\circ = e^{-\frac{\Delta_r G^\circ}{RT}}. \quad \text{AN : } K^\circ = e^{\frac{640000}{8 \times 300}} = e^{267} \gg 1. \quad \text{C'est trop pour une calculatrice (mais interdite aux Mines)}$$

$$\text{Pour faire l'AN on peut calculer } \log K^\circ = \frac{\ln(K^\circ)}{\ln(10)} = -\frac{\Delta_r G^\circ}{RT \ln(10)} \simeq -\frac{\Delta_r G^\circ}{0,06F} \simeq \frac{6,4}{0,06} \simeq 107 \text{ soit } K^\circ \simeq 10^{107}.$$

Conclusion : La transformation est thermodynamiquement très favorisée.

$$\text{Q42. } \Delta_r G^\circ = -4Fe^\circ \Leftrightarrow e^\circ = \frac{-\Delta_r G^\circ}{4F}. \quad \text{AN : } e^\circ \simeq \frac{640000}{4 \times 10^5} \simeq 1,6 \text{ V}.$$

La valeur est en accord avec celle calculée à la Q11, compte tenu des approximations dans les AN.

Q43. La durée théorique de fonctionnement Δt vérifie $q = i\Delta t$, où q est la charge qui circule dans les fils du circuit pendant cette durée. Zn est le réactif limitant car O_2 est apporté en continu à la cathode.

D'après les demi-réactions écrites en Q1, il circule 2 électrons pour chaque atome de zinc consommé, donc pour n moles de zinc, $q = 2nF$. Il vient $2nF = i\Delta t$, d'où $\frac{2m_{\text{Zn}}}{M_{\text{Zn}}}F = i\Delta t$, puis $\Delta t = \frac{2m_{\text{Zn}}}{iM_{\text{Zn}}}F$.

$$\text{AN : } \Delta t = \frac{2 \times 10^5 \times 0,65}{0,8 \cdot 10^{-3} \times 65} = \frac{20}{0,8} \times 10^5 = 2,5 \cdot 10^6 \text{ s} \quad (\text{soit environ } \frac{2,5 \cdot 10^6}{24 \times 3600} \simeq 30 \text{ jours}).$$

Q44. L'énergie électrique que peut fournir la pile vaut : $W_{\text{él}} = Ui\Delta t$ où U est la tension de fonctionnement.

$$\text{AN : } W_{\text{él}} = 1,5 \times 0,8 \cdot 10^{-3} \times 25 \cdot 10^5 = 1,5 \times 20 \cdot 10^2 = 3,0 \cdot 10^3 \text{ J}$$