

## CURLING

Le curling est un sport de précision pratiqué sur glace. Le but est de faire glisser une pierre en granite sur une piste jusqu'à atteindre une cible circulaire tracée au sol, appelée *maison*. Lors du déplacement de la pierre, deux joueurs peuvent balayer la glace devant celle-ci, ce qui en fait le seul sport de précision où la trajectoire peut être modifiée après le lancer. Bien que le principe du jeu soit simple, les mécanismes physiques responsables de la courbure de la trajectoire de la pierre ne sont toujours pas élucidés.



On considère ici le cas simple d'un mouvement rectiligne d'une pierre assimilée à un point matériel de masse  $m$  lancé à la vitesse initiale

$$\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x.$$

Les frottements de la pierre sur la glace provoquent l'apparition d'une mince pellicule d'eau liquide. Expérimentalement, on constate que l'on peut modéliser la force de frottement par une expression de la forme :

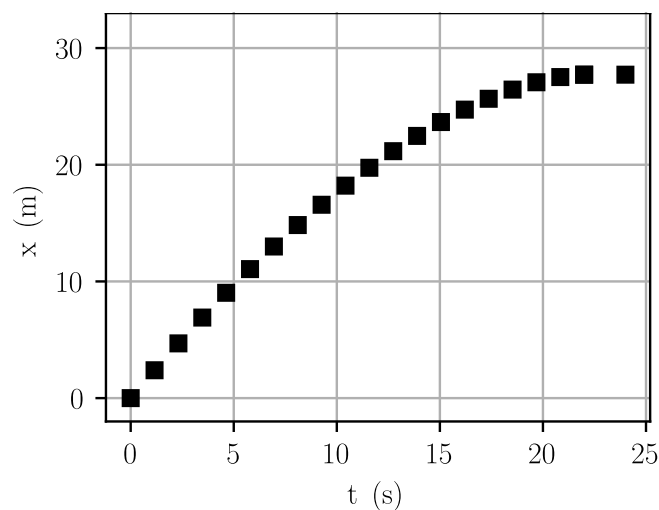
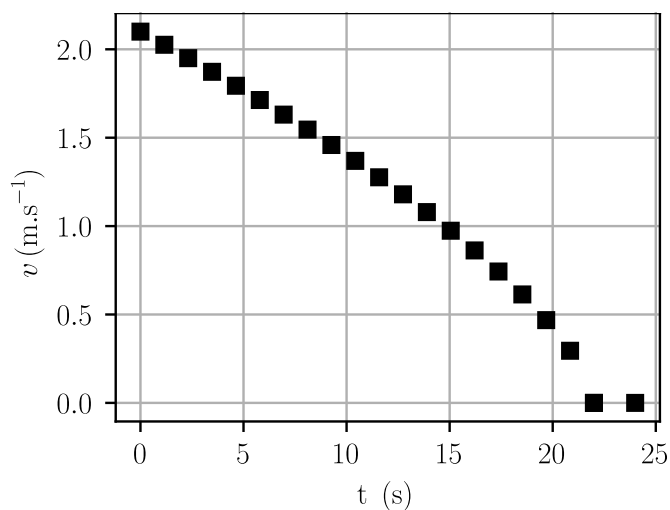
$$\vec{f} = -\mu mg \vec{e}_x,$$

où  $g$  correspond à l'accélération de la pesanteur et  $\mu$  à un coefficient de frottement solide dépendant de la vitesse  $v$  de la pierre :

$$\mu = \alpha v^\lambda,$$

avec  $\alpha$  et  $\lambda$  deux constantes.

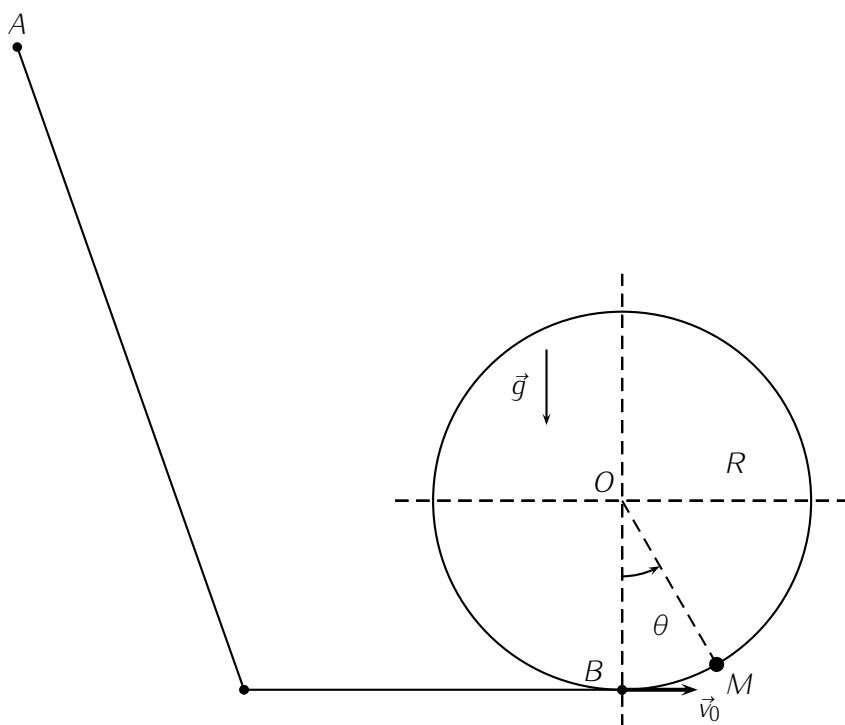
- |    |                                                                                                                                                                                 |
|----|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Q1 | 1. Exprimer la puissance de la force de frottement sur la pierre.                                                                                                               |
| Q2 | 2. L'épaisseur de la pellicule d'eau augmente avec la vitesse de la pierre. En déduire un encadrement de $\lambda$ .                                                            |
| Q3 | 3. Établir l'équation différentielle régissant le mouvement de la pierre.                                                                                                       |
| Q4 | 4. Utiliser la méthode de séparation des variables pour trouver l'expression de $v(t)$ .                                                                                        |
| Q5 | 5. En déduire le temps de glisse de la pierre.                                                                                                                                  |
| Q6 | 6. Établir l'équation horaire de la trajectoire et exprimer la distance totale parcourue par la pierre.                                                                         |
| Q7 | 7. On dispose des résultats expérimentaux ci-dessous. Que vaut le temps de glisse ? Que vaut la distance parcourue ? En déduire la valeur de $\lambda$ puis celle de $\alpha$ . |



Q8

8. Le centre de la maison mesure 61 cm de rayon. Quelle doit être la précision relative sur  $v_0$  pour l'atteindre à coup sûr ? Commenter.

### FÉFÉ AU SKI



Le petit Ferréol s'amuse sur la piste de ski « les amis de Timo » à La Norma. Il s'élance sans vitesse initiale du haut de la piste, repéré par le point A, descend sans freiner jusqu'à atteindre le point B où il percute une cible suspendue à un fil.

Pour l'étude, Ferréol sera assimilé à un point matériel de masse  $M = 20$  kg. On néglige tout frottement.

## Étude de la descente

- Q9 1. On note  $h$  la différence d'altitude entre les points  $A$  et  $B$  et  $g$  l'accélération de la pesanteur. Quelle est, en fonction de  $g$  et  $h$ , la vitesse de Ferréol en  $B$  notée  $v_0$  ?
- Q10 2. On donne  $h = 4$  m et  $g = 9.81$  m.s<sup>-2</sup>, effectuer l'application numérique pour  $v_0$ .

## Étude de la collision

La masse de la cible est  $m = 5$  kg, elle est initialement au repos. On suppose que le choc entre Ferréol et la cible est élastique, cela signifie que la quantité de mouvement et l'énergie cinétique de l'ensemble {Ferréol + cible} sont conservées pendant le choc. On en déduit la vitesse  $v'_0$  de la cible juste après le choc :

$$v'_0 = \frac{2M}{m + M} v_0$$

- Q11 1. Évaluer numériquement  $v'_0$ .
- Q12 2. Donner l'expression de la quantité de mouvement de Ferréol juste avant le choc en fonction de  $M$  et  $v_0$ . Que vaut celle de la cible juste avant le choc ?
- Q13 3. En utilisant la conservation de la quantité de mouvement de l'ensemble {Ferréol + cible} montrer que la vitesse de Ferréol après le choc est  $v_F = \frac{M-m}{M+m} v_0$ .
- Q14 4. Faire l'application numérique.

## Étude du looping de la cible

On étudie la cible assimilée à un point matériel de masse  $m$  initialement en  $B$  avec la vitesse  $v'_0$ . Elle est attachée à une potence à l'aide d'un fil idéal sans masse de longueur  $R = 1.5$  m. On suppose que la cible décrit un mouvement plan le long du cercle de rayon  $R$ .

- Q15 1. Établir l'expression du travail du poids entre les positions  $B$  et  $M$  en fonction de  $\theta$  et constantes. Vérifier son signe.
- Q16 2. Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la cible entre les positions  $B$  et  $M$ , en déduire l'expression de  $v$  en fonction de  $\theta$  et des constantes.
- Q17 3. Énoncer et appliquer le principe fondamental de la dynamique à la bille.  
Montrer que la norme de la tension du fil sur la cible peut s'écrire sous la forme :

$$T = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0'^2}{R}$$

- Q18 4. À quelle condition sur  $T$  la cible effectue-t-elle un tour complet ?
- Q19 5. En déduire une condition sur  $v'_0$  pour que la cible effectue un tour complet.
- Q20 6. Faire l'application numérique et conclure.
- Q21 7. Après plusieurs essais Ferréol se rend compte que la cible ne fait pas de looping, mais avance jusqu'à un angle maximal  $\theta_{\max} = 30^\circ$ . Quel(s) point(s) du modèle vous semble(nt) le(s) plus critiquable(s) ?

## CURLING

1. On étudie la pierre dans un référentiel terrestre supposé galiléen. Elle est soumise à son poids  $\vec{P}$  ainsi qu'à la réaction du sol  $\vec{R}$ , où  $R_N$  et  $R_T$  sont respectivement les composantes normale et tangentielle de la force de frottement.

Lorsque la pierre avance à la vitesse  $v$ , la puissance de la force de frottement vaut

$$\mathcal{P} = \vec{R}_T \cdot \vec{v}.$$

On sait que la force de frottement s'oppose au glissement, donc

$$\mathcal{P} = -\alpha v^{\lambda+1} mg$$

2. L'épaisseur de la pellicule d'eau augmente avec la vitesse de la pierre. On en déduit que  $|\mathcal{P}|$  est une fonction croissante de  $v$  donc  $\lambda > -1$ .

De plus, si la couche de lubrification augmente alors la force de frottement diminue, ce qui implique que l'intensité de la force de frottement est une fonction décroissante de l'épaisseur de la couche d'eau. Ainsi  $\lambda < 0$

On obtient donc un encadrement du coefficient de frottement (ou de la force de frottement) en fonction de la vitesse.

$$-1 < \lambda < 0$$

3. Appliquons la seconde loi de Newton à la pierre :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R}.$$

La projection selon l'axe ( $Oy$ ) vertical donne  $R_N = mg$  et ainsi  $\vec{R}_T = -\mu mg \vec{e}_x = -\alpha v^\lambda mg \vec{e}_x$

En projection selon l'axe ( $Ox$ ) du mouvement :

$$m \frac{dv}{dt} = -\alpha v^\lambda mg.$$

La vitesse  $v(t)$  est solution d'une équation différentielle non linéaire à coefficients constants.

4. On peut utiliser la méthode de séparation des variables pour la résoudre :

$$\frac{dv}{v^\lambda} = -\alpha g dt.$$

En intégrant terme à terme on obtient :

$$\frac{1}{1-\lambda} \left( v^{1-\lambda} - v_0^{1-\lambda} \right) = -\alpha g t.$$

Ainsi :

$$v = v_0 \left( 1 - \frac{\alpha g t}{v_0^{1-\lambda}} \right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

5. La pierre ne glisse plus dès que  $v = 0$ . La pierre s'arrête donc à l'instant  $t_s$  tel que :

$$t_s = \frac{v_0^{1-\lambda}}{\alpha g (1-\lambda)}$$

6. Pour obtenir l'équation horaire de la trajectoire, il faut intégrer la vitesse par rapport au temps. Pour simplifier l'écriture notons :

$$v(t) = v_0 \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{\frac{1}{1-\lambda}}$$

alors :

$$x(t) = -v_0 t_s \frac{2-\lambda}{1-\lambda} \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{\frac{2-\lambda}{1-\lambda}} + cste$$

En utilisant les conditions initiales  $x(0) = 0$ , on détermine la constante d'intégration.

$$cste = v_0 t_s \frac{2-\lambda}{1-\lambda} = x_f$$

Ainsi :

$$x(t) = x_f \left(1 - \left(1 - \frac{t}{t_s}\right)^{\frac{2-\lambda}{1-\lambda}}\right)$$

La valeur limite  $x_f$  représente alors la position finale de la pierre, autrement dit la distance parcourue.

7. Sur le graphe, on lit le temps d'arrêt  $t_s = 22$  s ainsi que la distance parcourue  $x_f = 28$  m. La vitesse initiale vaut  $v_0 = 2,1 \text{ m.s}^{-1}$ .

On peut alors déterminer la valeur du coefficient  $\lambda$  apparaissant dans l'expression de la force de frottement à partir de l'expression de  $x_f$ . En effet,

$$\lambda = \frac{2x_f - v_0 t_s}{x_f - v_0 t_s} \simeq -0,5$$

Ce résultat est compatible avec l'encadrement obtenu précédemment.

On trouve ensuite  $\alpha$  à l'aide de  $t_s$ ,  $\alpha = \frac{v_0^{1-\lambda}}{t_s g (1-\lambda)} = 0,01 \text{ m}^{-\frac{1}{2}} \cdot \text{s}^{\frac{1}{2}}$

8. On a trouvé précédemment  $x_f = v_0 t_s \frac{2-\lambda}{1-\lambda}$  et  $t_s = \frac{v_0^{1-\lambda}}{\alpha g (1-\lambda)}$  ainsi  $x_f = v_0^{2-\lambda} \frac{2-\lambda}{\alpha g (1-\lambda)^2}$ .

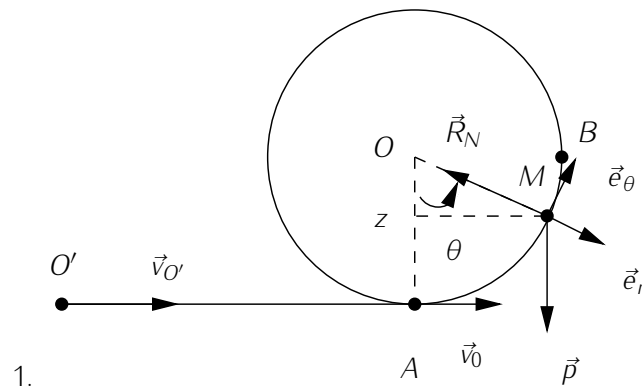
On souhaite atteindre la distance de 28 m avec une marge d'erreur de  $\Delta x = \pm 30,5$  cm. Soit une précision relative  $\frac{\Delta x}{x_f} = 1,1\%$  Or  $\frac{\Delta x}{x_f} = (2-\lambda) \frac{\Delta v_0}{v_0}$ . On obtient alors une précision relative sur la vitesse initiale de l'ordre de 0,4%.

Il suffit que le lanceur lâche la pierre  $1 \text{ cm.s}^{-1}$  trop ou pas assez vite pour qu'il rate la cible.

On comprend alors l'intérêt des deux balayeurs qui, en frottant la glace, permettent à la pierre de ralentir plus ou moins rapidement et donc d'ajuster le tir.

## FERRÉOL AU SKI

1.  $v_0 = \sqrt{2gh}$
2.  $v_0 = 7,7 \text{ m/s}$
1.  $v'_0 = 12,3 \text{ m/s}$
2.  $p_F = 153 \text{ kg.m/s}$ .  $p_C = 0$
3.  $p_{tot} = p_F + p_C = Mv_0 = Mv_F + mv'_0$  avec  $v'_0 = \frac{2M}{m+M}v_0$
4.  $4,6 \text{ m/s}$



1. Le travail du poids est  $W = mgl(\cos(\theta) - 1) < 0$ . Il s'agit bien d'un travail résistant.

2. Par application du théorème de l'énergie cinétique sur la cible entre les positions B et M, on peut écrire

$$\Delta E_c = W(\vec{p}) + W(\vec{T})$$

or  $\vec{T}$  la réaction du fil est perpendiculaire au déplacement à tout instant, son travail est nul et le travail du poids a déjà été calculé. On a ainsi

$$\Delta E_c = W = -\Delta E_{p,\text{pes}} + 0 \iff \frac{1}{2}m(v^2 - v_0^2) = -mgR(1 - \cos \theta) \Rightarrow v^2 = v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$$

et si  $v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta) \geq 0$ , alors  $v = \sqrt{v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)}$ .

3. Principe fondamental de la dynamique : dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}_g$ , la résultante des forces qui s'exercent sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement dans  $\mathcal{R}_g$ .

Et par application sur la cible, dans le système de coordonnées polaires,

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{e}_r$$

On a par ailleurs  $\vec{p} = mg \cos \theta \vec{e}_r - mg \sin \theta \vec{e}_\theta$  et  $\vec{T} = -T\vec{e}_r$ , soit :

$$m\vec{a} = \vec{p} + \vec{T} \Rightarrow -mR\dot{\theta}^2 = mg \cos \theta - T \iff T = mg \cos \theta + mR\dot{\theta}^2 \text{ par projection sur } (OM)$$

Et en utilisant  $v^2 = R^2\dot{\theta}^2 \iff \dot{\theta}^2 = \frac{v^2}{R^2} = \frac{1}{R^2}[v_0^2 - 2gR(1 - \cos \theta)]$ , on obtient

$$T = mg \cos \theta - 2mg(1 - \cos \theta) + \frac{mv_0^2}{R} \Rightarrow T = mg(3 \cos \theta - 2) + \frac{mv_0^2}{R}$$

4. La cible effectue un tour complet si elle reste toujours en contact avec le rail ( $\forall \theta; T > 0$ ) et si sa vitesse est non nulle ( $v > 0$ ) tout au long du mouvement (deux conditions).

- $T$  est minimale pour  $\theta = \pi$  et

$$\forall \theta; T > 0 \iff T(\theta = \pi) > 0 \iff mg(-3 - 2) + \frac{mv_0^2}{R} > 0 \iff v_0^2 > 5gR \Rightarrow v_0' > \sqrt{5gR}$$

- De même,  $v$  est minimale pour  $\theta = \pi$  et

$$v(\theta = \pi) > 0 \iff -2gR(1 - \cos \pi) + v_0^2 > 0 \iff v_0^2 > 4gR \Rightarrow v_0' > 2\sqrt{gR}$$

Conclusion : il faut que  $v_0 > \sqrt{5gR}$ .

5. Numériquement  $v_0' > 8,6 \text{ m/s}$ .

6. Le choc avec la cible n'est pas élastique. La cible est bien rembourrée et ça amortie le choc.