Centrale - Option PC. Physique 1. 2025

Ⓘ Le chant des dunes

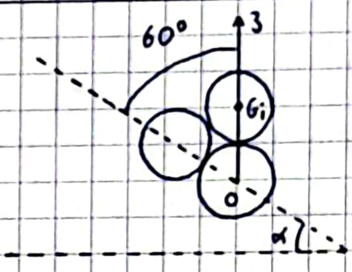
Q 22. Pour le mode fondamental : $d = \frac{\lambda_1}{2} = \frac{c_a}{2f_1}$ donc : $\boxed{f_1 = \frac{c_a}{2d}}$

En prenant les valeurs pour Al Wagan : $c_a = 2.80.200.10^{-6} = 32\ \mathrm{mm\,s^{-1}} \ll 350\ \mathrm{m\,s^{-1}}$

Le modèle n'est pas bon.

Q 23. $\boxed{E_p = mgd\cos\theta}$

Les centres des trois billes forment un triangle équilatérale ⇒ angle de 60°



Si G_i est à droite de Oz, le grain va rouler et l'équilibre ne se maintiendra pas.
Si G_i est à gauche de Oz, l'équilibre sera stable
Le cas limite correspond à G_i sur Oz.

L'angle α minimale correspond à la figure ci-contre : $\alpha + 60° = 90° \Rightarrow \alpha_{min} = 30°$

Q 24 <u>Conservation de l'énergie mécanique</u>: $E_{mi} = E_{mf}$

$\Rightarrow \frac{1}{2}mv_i^2 + mgd\cos i = \frac{1}{2}mv_f^2 + mgd\cos\theta_f$

$\Rightarrow v_f^2 = v_i^2 + 2gd(\cos\theta_i - \cos\theta_f)$

Or : $\cos\theta_i - \cos\theta_f = -2\sin\left(\frac{\theta_i - \theta_f}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_i+\theta_f}{2}\right)$

et : $\theta_i - \theta_f = -60°$ $\quad \frac{\theta_i+\theta_f}{2} = \alpha$ car la perpendiculaire à la direction d'inclinaison des billes passe par le milieu de G_iG_f

Donc : $\cos\theta_i - \cos\theta_f = -2\sin(-30°)\sin\alpha = \sin\alpha$

Finalement : $\boxed{v_f = \sqrt{v_i^2 + 2gd\sin\alpha}}$

Q 25 On a : $\boxed{v_i'^2 = (1-\varepsilon)(v_i^2 + 2gd\sin\alpha)}$

Par récurrence au cours des chocs successifs : $v_i^{n+1\,2} = \underbrace{(1-\varepsilon)}_{<1} v_i^{n\,2} + (1-\varepsilon)2gd\sin\alpha$

D'après le formulaire, cette suite tend vers la limite :

$$v_{lim}^2 = \frac{(1-\varepsilon)2gd\sin\alpha}{1-(1-\varepsilon)}$$

Donc : $\boxed{v_{lim}^2 = Kgd}$ avec $\boxed{K = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}2\sin\alpha}$

Q 26. Les chocs ont lieu avec une période $T = \frac{d}{v} = \frac{d}{\sqrt{Kgd}}$ donc : $\boxed{f = \sqrt{\frac{Kg}{d}}}$

$\Rightarrow f^2 d = Kg$ doit être constant.

Dune	Al Wagan	Dumont	Eureka	Mar de Dunas	Omega 1
$f^2 d$	1,28	1,20	1,41	1,58	1,55

f^2d est à peu près constant, compte tenu des incertitudes élevées sur d, donc les données sont compatibles avec le modèle.

On a : $\langle f^2 d\rangle = 1{,}4 = Kg$ donc : $\underline{K = 0{,}14}$

Pour le chant des plages, d sera du même ordre de grandeur, mais f est de l'ordre de 1 kHz. Donc le modèle ne sera pas valable.

II Propagation des ondes acoustiques et entraînement par l'eau

Q27. A l'équilibre ($\vec{v}' = \vec{0}$) et selon Oz, on a : $\boxed{\dfrac{dP_{st}}{dz} = -\rho g}$

L'équation de Navier-Stokes se simplifie en : $\boxed{\rho\left[\dfrac{\partial \vec{v}'}{\partial t} + (\vec{v}'\cdot\vec{\text{grad}})\,\vec{v}'\right] = -\vec{\text{grad}}\,p_1 + \eta\Delta\vec{v}'}$

Q28. Définition : $\boxed{\chi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\partial \rho}{\partial P}}$ Linéarisation : $\boxed{\underline{\rho} = \chi \rho_0 \underline{p}}$

Q29. Equation de Navier Stokes avec $\eta = 0$: $(\rho_0 + \underline{\rho})\left[\dfrac{\partial \underline{\vec{v}}'}{\partial t} + (\underline{\vec{v}}\cdot\vec{\text{grad}})\,\underline{\vec{v}}\right] = -\vec{\text{grad}}(\underline{p})$

En linéarisant : $\rho_0 \dfrac{\partial \underline{\vec{v}}'}{\partial t} = -\vec{\text{grad}}\,\underline{p}$

Puis en notation complexe : $\boxed{\rho_0 \omega\, \underline{\vec{v}}' = \vec{k}\,\underline{p}}$

Equation de conservation de la masse : $\dfrac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \text{div}\left[(\rho_0 + \underline{\rho})\underline{\vec{v}}'\right] = 0$

En linéarisant : $\dfrac{\partial \underline{\rho}}{\partial t} + \rho_0\, \text{div}\, \underline{\vec{v}}' = 0$

En notation complexe : $i\omega\,\underline{\rho} - \rho_0\, i\vec{k}\cdot\underline{\vec{v}}' = 0$ or $\underline{\rho} = \rho_0 \chi \underline{p}$

Donc : $\boxed{\vec{k}\cdot\underline{\vec{v}}' = \omega\chi\,\underline{p}}$ $\Rightarrow k^2 = \rho_0\chi\omega^2 = \dfrac{\omega^2}{c_a^2}$ $\Rightarrow c_a = \dfrac{1}{\sqrt{\rho_0\chi}} = \underline{1560\ \text{m s}^{-1}}$

Q30. On a : $|\underline{p}| = p_{ref}\, 10^{I_{dB}/20}$ A.N : $|\underline{p}| = 10^3$ Pa

D'où : $|\underline{\rho}| = \chi\rho_0|\underline{p}| = \underline{4{,}1.10^{-4}\ \text{kg m}^{-3}}$ $|\underline{\rho}| \ll \rho_0$

Puis : $|\underline{\vec{v}}'| = \dfrac{|\underline{p}|}{\rho_0 c} = \underline{6{,}4.10^{-4}\ \text{m s}^{-1}}$ $|\underline{\vec{v}}'| \ll c_a$

Q31. On a $g_0(\omega, c_a) = \dfrac{\omega^2}{c_a^2} = \omega^2\rho_0\chi$

En tenant compte du terme de viscosité, l'équation de Navier-Stokes donne maintenant :

$$i\rho_0\omega\,\underline{\vec{v}} = i\vec{k}\,\underline{p} - \vec{k}^2\eta\,\underline{\vec{v}}$$

Or : $\underline{p} = \dfrac{\vec{k}\cdot\underline{\vec{v}}'}{\omega\chi}$ donc : $i\rho_0\omega\,\underline{\vec{v}}' = i\dfrac{\vec{k}^2}{\omega\chi}\underline{\vec{v}}' - \vec{k}^2\eta\,\underline{\vec{v}}'$

$$\rho_0\omega = \frac{\vec{k}^2}{\omega\chi} + i\vec{k}^2\eta$$

$$\rho_0\chi\omega^2 = \vec{k}^2(1 + i\omega\chi\eta)$$

Donc : $\boxed{\vec{k}^2 = \dfrac{g_0(\omega, c_a)}{1 + i\omega\chi\eta}}$ $\boxed{\omega_c = \dfrac{1}{\chi\eta}}$ Si $\omega \ll \omega_c$, la viscosité est négligeable

A.N : $\omega_c = 2.10^{12}\ \text{rad s}^{-1} \rightarrow f_c = 3.10^{11}$ Hz

La viscosité ne jouera un rôle que pour des ultrasons de fréquence très élevée.

Q32. On a : $\vec{k}^2 = \dfrac{\omega^2}{c_a^2}\Big(1 + i\underbrace{\dfrac{\omega}{\omega_c}}_{\ll 1}\Big)^{-1}$ Donc : $k \simeq \dfrac{\omega}{c_a}\left(1 - \dfrac{1}{2}i\dfrac{\omega}{\omega_c}\right) = k' - ik''$

Onde atténuée en $\exp(-k''x) = \exp\left(-\dfrac{x}{\delta}\right)$ avec : $k'' = \dfrac{1}{\delta} = \dfrac{\omega^2}{2c_a\omega_c}$

L'atténuation en dB sur une longueur L est : $-20\log(e^{-k''L}) = -20\,\dfrac{\ln(e^{-k''L})}{\ln 10}$
$= \dfrac{20}{\ln 10}\,.\,k''L$

L'atténuation en dB par unité de longueur est donc : $\boxed{\beta = \dfrac{20}{\ln 10}\,k'' = \dfrac{20}{\ln 10}\cdot\dfrac{\omega^2}{2c_a\omega_c}}$

A.N. : domaine audible $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 20$ kHz : $\beta = 2{,}2.10^{-5}$ dB m^{-1} = $2{,}2.10^{-2}$ dB.km^{-1}

ultrason $f = \dfrac{\omega}{2\pi} = 100$ kHz , $\beta = 5{,}5.10^{-4}$ dB m^{-1} = $0{,}55$ dB.km^{-1}

L'atténuation mesurée (0,12 dB.km^{-1} dans le domaine audible) est plus importante
Le modèle de l'onde plane est sans doute trop simpliste.

Q33 . On peut proposer $\underline{v_0 = 5\ \text{km.h}^{-1}}$ (vitesse de la marche d'une personne)

$\text{div}(\rho\vec{v}') = \text{div}[(\rho_0+\underline{\rho})(\vec{v}_0+\underline{\vec{v}})] = \text{div}[\rho_0\vec{v}_0 + \rho_0\underline{\vec{v}} + \underline{\rho}\vec{v}_0 + \underbrace{\underline{\rho}\,\underline{\vec{v}}}_{\text{ordre 2} \Rightarrow \text{négligeable}}]$

$= \text{div}(\rho_0\underline{\vec{v}}) + \text{div}(\underline{\rho}\vec{v}_0)$

Soit : $\boxed{\text{div}(\rho\vec{v}') = \rho_0\,\text{div}\,\underline{\vec{v}} + \vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{\rho}}$

$(\vec{v}'.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}' = (\vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}})(\vec{v}_0+\underline{\vec{v}}) + (\underline{\vec{v}}.\overrightarrow{\text{grad}})(\vec{v}_0+\underline{\vec{v}})$

$= (\vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}})\underline{\vec{v}} + \underbrace{(\underline{\vec{v}}.\overrightarrow{\text{grad}})\underline{\vec{v}}}_{\text{ordre 2} \to \text{négligeable}}$

Soit : $\boxed{(\vec{v}'.\overrightarrow{\text{grad}})\vec{v}' \simeq (\vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}})\underline{\vec{v}}}$

Q34 . Equation de Navier-Stokes sans viscosité : $\rho_0\dfrac{\partial\underline{\vec{v}}}{\partial t} + \rho_0(\vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}})\underline{\vec{v}} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{p}$

En notation complexe : $i\omega\rho_0\underline{\vec{v}} + \rho_0(-i\underbrace{\vec{k}.\vec{v}_0}_{=kv_0\cos\theta})\underline{\vec{v}} = i\vec{k}.\underline{p}$

Donc : $\boxed{\rho_0\underline{\vec{v}}(\omega - kv_0\cos\theta) = \vec{k}.\underline{p}}$ (1) $\to$ $\boxed{\Omega = kv_0\cos\theta}$

Equation de conservation de la masse : $\dfrac{\partial\underline{\rho}}{\partial t} + \rho_0\,\text{div}\,\underline{\vec{v}} + \vec{v}_0.\overrightarrow{\text{grad}}\,\underline{\rho} = 0$

En notation complexe : $i\omega\underline{\rho} - \rho_0 i\vec{k}.\underline{\vec{v}} - i\underbrace{\vec{k}.\vec{v}_0}_{=kv_0\cos\theta}\underline{\rho} = 0$

$(\omega - kv_0\cos\theta)\underline{\rho} = \rho_0\vec{k}.\underline{\vec{v}}$

Or : $\underline{\rho} = \rho_0\chi\underline{p}$ donc : $\boxed{(\omega-\Omega)\chi\underline{p} = \vec{k}.\underline{\vec{v}}}$ (2)

Q35 . On a : $\underline{\vec{v}} = \dfrac{\vec{k}\underline{p}}{\rho_0(\omega-\Omega)}$ d'après (1) (2) $\Rightarrow (\omega-\Omega)\chi\underline{p} = \dfrac{\vec{k}^2\underline{p}}{\rho_0(\omega-\Omega)}$

$\Rightarrow (\omega-\Omega)^2\underbrace{\rho_0\chi}_{=1/c_a^2} = k^2$

D'où : $k = \dfrac{\omega-\Omega}{c_a}$

Puis : $c_a' = \dfrac{\omega}{k} = \dfrac{kc_a+\Omega}{k} \Rightarrow \boxed{c_a' = c_a + v_0\cos\theta}$ Loi de composition des vitesses selon la direction de propagation