

CCMP Physique 2 PC-PSI 2023 et Centrale PSI 2015

I. Etude de la planche à voile

I.A. Navigation par vent arrière

1 Le nombre de molécules d'air entrant en collision avec la voile pendant τ est donné par :

$$N = \frac{\rho_a S (v_v - v_p) \tau}{m}$$

2 Puisque les molécules cèdent intégralement leur quantité de mouvement à la voile, la variation de quantité de mouvement d'une molécule lors d'un choc vaut :

$$\Delta \vec{p}_{\text{moléc}} = -m(v_v - v_p)\hat{e}_x$$

On applique le théorème de la résultante cinétique à la molécule dans le référentiel de la planche, supposé galiléen : $\frac{\Delta \vec{p}_{\text{moléc}}}{\tau} = \vec{f}_{\text{voile} \rightarrow \text{molec}}$, d'où $\frac{-m(v_v - v_p)\hat{e}_x}{\tau} = \vec{f}_{\text{voile} \rightarrow \text{molec}}$.

Puis, avec le principe des actions réciproques, que le choc dure un temps τ , la force subie par la voile du fait

d'une collision est donc donnée par : $\vec{f} = \vec{f}_{\text{molec} \rightarrow \text{voile}} = \frac{m(v_v - v_p)\hat{e}_x}{\tau}$

3 Puisque N molécules transfèrent leur quantité de mouvement à la voile pendant le temps de collision τ , on en déduit que la force propulsive vaut : $\vec{F} = N\vec{f} = \rho_a S (v_v - v_p)^2 \hat{e}_x$

4 On peut découper le triangle isocèle en deux triangles rectangles identiques. Par conséquent :

$$S = 2 \times \frac{a \sin(\alpha/2) \times a \cos(\alpha/2)}{2} = \frac{a^2 \sin \alpha}{2}$$

Avec le dessin ci-contre, $a = a_1 + a_2$ avec $a_1 = b \cos \theta$ et $a_2 = c \cos \alpha$

Donc $a = b \cos \theta + c \cos \alpha$

De plus, $h = c \sin \alpha = b \sin \theta$,

donc $a = b \cos \theta + b \frac{\sin \theta}{\sin \alpha} \cos \alpha$,

puis $b = \frac{a \sin \alpha}{\sin \alpha \cos \theta + \sin \theta \cos \alpha} = \frac{a \sin \alpha}{\sin(\alpha + \theta)}$

Ici encore, le triangle gris peut se décomposer en deux triangles rectangles, d'où :

$$S' = \frac{hb \cos \theta}{2} + \frac{hc \cos \alpha}{2} = \frac{h}{2} a, \quad \text{d'où} \quad S' = \frac{b \sin \theta}{2} a =$$

$$\frac{a^2 \sin \alpha \sin \theta}{2 \sin(\alpha + \theta)}.$$

L'angle θ_d est défini par $S' = S/2$. Par conséquent : $\frac{\sin \theta_d}{\sin(\alpha + \theta_d)} = \frac{1}{2}$

c'est-à-dire $2 \sin \theta_d = \sin \theta_d \cos \alpha + \cos \theta_d \sin \alpha$, d'où $\tan \theta_d (2 - 2 \cos \alpha) = \sin \alpha$

ce qui donne bien : $\tan \theta_d = \frac{\sin \alpha}{2 - \cos \alpha}$

Numériquement, on trouve : $\tan \theta_d = \frac{\sqrt{3}/2}{2 - 1/2} = \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1/2}{\sqrt{3}/2}$.

On en déduit que $\theta_d = 30^\circ$

5 La vitesse du vent apparent est donnée par :

$$\vec{v}_{va} = \vec{v}_v - \vec{v}_p = (v_v - v_p)\hat{e}_x$$

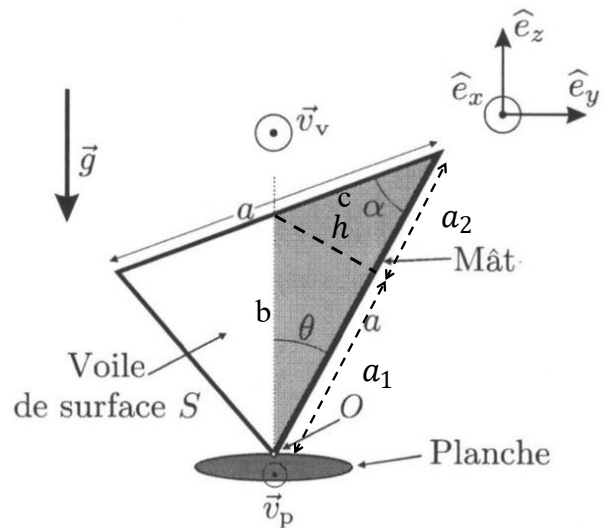
6 Lorsque la planche se déplace à vitesse constante, d'après la première loi de Newton dans le référentiel terrestre, pour la planche : $\vec{F}_{\text{pro}} + \vec{F}_{\text{rés}} = \vec{0}$

On en déduit : $\frac{1}{2} \rho_e C_p S_p v_p^2 = \frac{1}{2} \rho_a C_v S (v_v - v_p)^2$

Par conséquent : $(v_p - v_v)^2 - \sigma^2 v_p^2 = ((1 - \sigma)v_p - v_v)((1 + \sigma)v_p - v_v) = 0$

On obtient donc deux racines : $v_p^\pm = \frac{v_v}{1 \pm \sigma}$

Même si l'on ne dispose d'aucune donnée numérique sur les surfaces et les coefficients C_v et C_p , le rapport ρ_e/ρ_a des masses volumiques, de l'ordre de 1000 impose certainement $\sigma > 1$. Or, la vitesse



de la planche est nécessairement dans le même sens que la vitesse du vent. Par conséquent, seule la

solution suivante est acceptable : $v_p = \frac{v_v}{1+\sigma}$.

Puisque $\sigma > 0$, on en déduit bien que $v_p < v_v$;

En vent arrière, la planche ne peut aller plus vite que le vent.

I.B. Navigation « au près »

7 La norme au carré de la vitesse du vent apparent s'écrit :

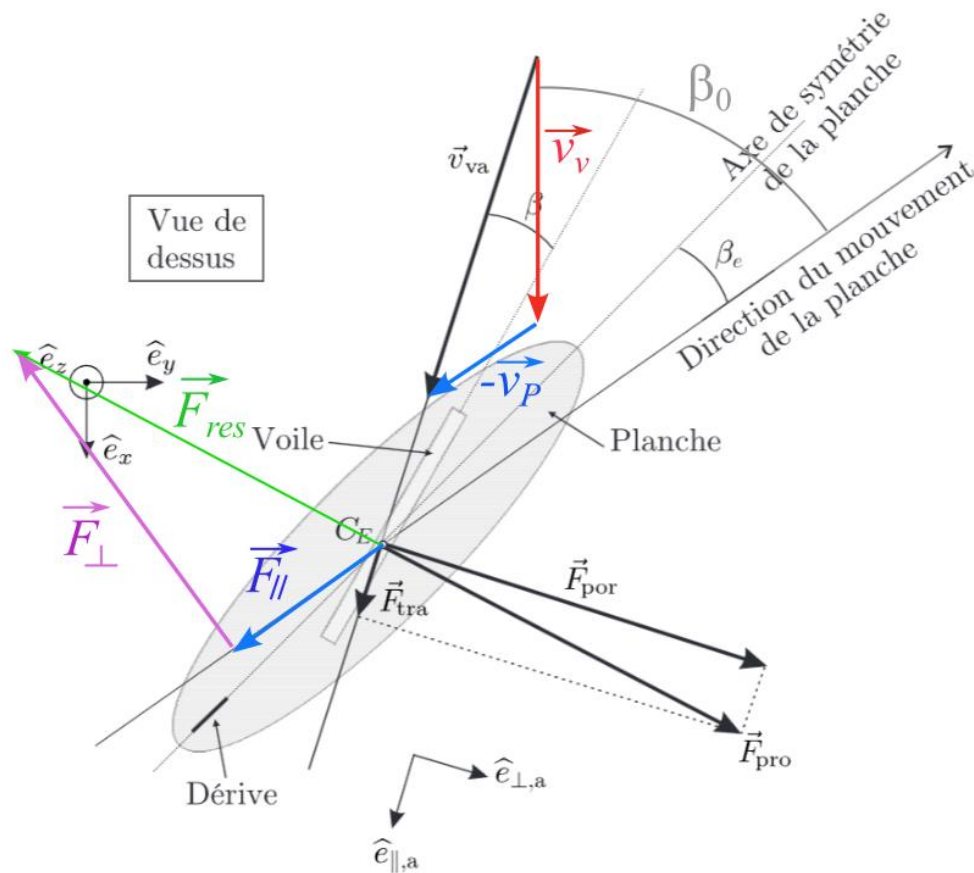
$$v_{va}^2 = \|\vec{v}_v - \vec{v}_p\|^2 = v_v^2 + v_p^2 - 2\vec{v}_v \cdot \vec{v}_p \text{ donc } v_{va} = \sqrt{v_v^2 + v_p^2 + 2v_v v_p \underbrace{\cos \beta_0}_{>0}} > v_v$$

Par conséquent, on a bien $v_{va} > v_v$

8 La planche est en mouvement rectiligne et uniforme. Par conséquent (principe d'inertie) :

$$\vec{F}_{pro} + \vec{F}_{rés} = \vec{0}$$

On en déduit : $\|\vec{F}_{pro}\| = \|\vec{F}_{rés}\|$



9 On a complété la figure précédente pour faire apparaître les composantes $\vec{F}_\perp$ et $\vec{F}_\parallel$ de $\vec{F}_{rés}$.

Si $\beta_e = 0$, $\vec{F}_{rés}$ est parallèle à $\vec{v}_p$ puisque $C_{p,\perp} = 0$.

La force $\vec{F}_{rés}$ ne peut donc compenser la force propulsive. Le mouvement rectiligne et uniforme est donc impossible.

10 En prenant le carré de l'équation $\|\vec{F}_{pro}\| = \|\vec{F}_{rés}\|$, on obtient facilement :

$$\frac{1}{4} \rho_a^2 S^2 (C_{v,\perp}^2 + C_{v,\parallel}^2) v_{va}^4 = \frac{1}{4} \rho_e^2 S_p^2 (C_{p,\perp}^2 + C_{p,\parallel}^2) v_p^4$$

$$\text{soit : } v_{va}^2 = \left(\frac{\rho_e S_p}{\rho_a S} \sqrt{\frac{C_{p,\perp}^2 + C_{p,\parallel}^2}{C_{v,\perp}^2 + C_{v,\parallel}^2}} \right) v_p^2$$

$$\text{Or, } v_{va}^2 = v_v^2 + v_p^2 + 2v_v v_p \cos \beta_0. \text{ Par conséquent : } v_v^2 + v_p^2 + 2v_v v_p \cos \beta_0 = \sigma_1 v_p^2$$

avec :
$$\sigma_1 = \frac{\rho_e S_p}{\rho_a S} \sqrt{\frac{C_{p,\perp}^2 + C_{p,\parallel}^2}{C_{v,\perp}^2 + C_{v,\parallel}^2}}$$

11 Si $0 < \beta_0 < \pi/2$, $\cos \beta_0 > 0$.

Dans l'équation obtenue à la question précédente, le membre de gauche est supérieur à v_p^2 .

Par conséquent, on a bien $\sigma_1 > 1$.

12 Posons $X = v_p/v_v$. On peut récrire l'équation de la question 10 sous la forme :

$$X^2 - \left(\frac{2 \cos \beta_0}{\sigma_1 - 1} \right) X = \frac{1}{\sigma_1 - 1}$$

L'unique racine réelle positive de cette équation s'écrit :

$$X = \frac{\cos \beta_0}{\sigma_1 - 1} + \sqrt{\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2 \beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2}}$$

La vitesse de la planche est supérieure à celle du vent si $X > 1$. Cette condition donne :

$$\sqrt{\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2 \beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2}} > 1 - \frac{\cos \beta_0}{\sigma_1 - 1}$$

D'où :

$$\frac{1}{\sigma_1 - 1} + \frac{\cos^2 \beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2} > 1 + \frac{\cos^2 \beta_0}{(\sigma_1 - 1)^2} - \frac{2 \cos \beta_0}{\sigma_1 - 1}$$

Par conséquent :

$$\sigma_1 - 1 < 1 + 2 \cos \beta_0$$

Ce qui donne bien : $\cos \beta_0 > \frac{\sigma_1 - 2}{2}$

13 L'expression de X trouvée à la question 12 montre que X est une fonction décroissante de σ_1 . On a donc intérêt à choisir σ_1 aussi petit que possible. Compte tenu de Q11, il faut néanmoins que $\sigma_1 > 1$.

II. Physique des vagues

II.A. Les équations de la vague linéaire

14 La masse contenue dans le volume fixe (volume de contrôle) $d\tau = dx dy dz$ s'écrit :

$$\delta m = \rho(x, z, t) dx dy dz$$

Sa variation pendant le temps dt s'écrit donc :

$$d(\delta m) = \frac{\partial \rho}{\partial t} dx dy dz dt$$

La masse sortant de ce volume pendant dt vaut :

$$\begin{aligned} \delta m_s &= \rho u_x(x + dx, z, t) dy dz dt - \rho u_x(x, z, t) dy dz dt + \rho u_z(x, z + dz, t) dx dy dt - \rho u_z(x, z, t) dx dy dt \\ &= \left(\frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} \right) dx dy dz dt \end{aligned}$$

La conservation de la masse s'écrit : $d(\delta m) = -\delta m_s$

On en déduit :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u_x)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho u_z)}{\partial z} = 0$$

15 On peut récrire cette équation sous la forme :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u_x \frac{\partial \rho}{\partial x} + u_z \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) = 0$$

Or, pour un fluide incompressible, ρ est une constante.

On en déduit bien : $\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$, c'est-à-dire $\text{div } \vec{u} = 0$.

16 Puisque $\text{div } \vec{u} = 0$ et $\vec{u} = \overrightarrow{\text{grad}} \phi$, il vient bien $\Delta \phi = 0$.

17 L'équation d'Euler (6) peut s'écrire, à l'aide du potentiel des vitesses ϕ , et en supposant le potentiel des vitesses au moins de classe C^2 (et en utilisant le théorème de Schwarz) :

$$\rho \left(\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right) + \frac{1}{2} \vec{\nabla} (\vec{u} \cdot \vec{u}) \right) = -\rho \vec{\nabla} (gz) - \vec{\nabla} p$$

Le fluide étant supposé incompressible, la masse volumique est une constante. On peut donc écrire :

$$\vec{\nabla} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} \right) = \vec{0}$$

La quantité dont on prend le gradient est donc uniforme et ne dépend éventuellement que du temps.

Par conséquent, on a bien : $\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = f(t)$

Pour un écoulement stationnaire, l'équation précédente s'écrit : $\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \text{cste}$

On reconnaît le théorème de Bernoulli.

- 18** La composante verticale de la vitesse d'une particule de fluide (en n'importe quel point de l'écoulement) est donnée par :

$$u_z = \frac{\partial \phi}{\partial z}$$

Pour une particule de fluide située en un point de la surface libre, cette composante est aussi donnée par la dérivée particulaire de la cote verticale $\eta(x, t)$ de la particule de fluide (qui ne dépend que de x et pas de z) :

$$u_z(x, z = \eta(x, t), t) = \left[\frac{D\eta}{Dt} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + u_x \frac{\partial \eta}{\partial x} \right] = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

Par conséquent, on trouve bien :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=\eta} = \frac{\partial \eta}{\partial t} + \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_{z=\eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$

- 19** En tout point de la surface libre, la pression est imposée par l'atmosphère :

$$p(x, z = \eta(x, t), t) = p_0$$

Or, nous avons montré à la question 17 que :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} + gz + \frac{p}{\rho} = \frac{p_0}{\rho}$$

Par conséquent, en un point de la surface libre :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} + \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2} \right)_{z=\eta} + g\eta(x, t) = 0$$

On trouve bien $\eta(x, t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t} \right)_{z=\eta} - \left(\frac{\vec{u} \cdot \vec{u}}{2g} \right)_{z=\eta}$

- 20** On injecte la solution $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$ dans l'équation de Laplace :

$$\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} Z(z) + X(x, t) \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$$

En divisant cette équation par $\phi(x, z, t) = X(x, t)Z(z)$, on obtient :

$$\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2}$$

Les deux membres de cette équation dépendent de variables indépendantes entre elles : ils sont donc constants. On peut donc poser : $\frac{1}{X(x, t)} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Z(z)} \frac{d^2 Z}{dz^2} = -\mu$

Par conséquent, on obtient bien :

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X(x, t) \\ \frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z(z) \end{cases}$$

- 21** Exploitions la condition aux limites $\left(\frac{\partial \phi}{\partial z} \right)_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t}$. Celle-ci s'écrit :

$$X(x, t) \left(\frac{dZ}{dz} \right)_{z=0} = \frac{\partial \eta}{\partial t} = A\omega \sin(kx - \omega t)$$

Or, $\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0}$ est nécessairement une constante. On peut donc bien identifier :

$$\begin{cases} X(x, t) = \sin(kx - \omega t) \\ \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = A\omega \end{cases}$$

22 La condition aux limites au fond du réservoir s'écrit :

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)_{z=-H} = X(x, t) \left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0$$

Par conséquent :

$$\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0$$

D'autre part, $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \sin(kx - \omega t) = -k^2 X(x, t) = -\mu X(x, t)$.

Par conséquent : $\mu = k^2$

La fonction $Z(z)$ vérifie donc l'équation : $\frac{d^2 Z}{dz^2} - k^2 Z(z) = 0$

La solution s'écrit sous la forme : $Z(z) = ae^{kz} + be^{-kz}$

Il reste à exprimer a et b en exploitant les conditions aux limites :

- En $z = 0$: $\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=0} = A\omega = k(a - b)$
- En $z = -H$: $\left(\frac{dZ}{dz}\right)_{z=-H} = 0 = k(ae^{-kH} + be^{kH})$ Donc : $a = b e^{2kH}$

Conclusion : $A\omega = kb(e^{2kH} - 1)$, d'où $b = \frac{A\omega}{k(e^{2kH} - 1)}$ et $a = \frac{A\omega e^{2kH}}{k(e^{2kH} - 1)}$

Ou encore : $b = \frac{A\omega e^{-kH}}{2k \sinh(kH)}$ et $a = \frac{A\omega e^{kH}}{2k \sinh(kH)}$.

Il vient : $Z(z) = \frac{A\omega}{2k \sinh(kH)} (e^{k(z+H)} + e^{-k(z+H)})$.

On trouve bien bien $Z(z) = \zeta \frac{\cosh(k(z+H))}{\sinh(kH)}$ avec $\boxed{\zeta = \frac{A\omega}{k}}$

23 L'autre condition aux limites en $z = 0$ donne :

$$\eta(x, t) = A \cos(kx - \omega t) = -\frac{1}{g} \left(\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)_{z=0} = -\frac{1}{g} (-\omega \cos(kx - \omega t)) Z(0)$$

soit : $A = \frac{\omega}{g k \tanh(kH)}$. On obtient donc la relation de dispersion : $\boxed{\omega^2 = gk \tanh(kH)}$

24 Par définition, la vitesse de phase est donnée par $v_\phi = \omega/k$. Par conséquent :

$$v_\phi = \sqrt{\frac{g \tanh(kH)}{k}}$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$ i.e. $H \ll \lambda$: $\tanh(kH) \sim kH$ donc $\boxed{v_\phi \approx \sqrt{gH}}$

En eau peu profonde, v_ϕ est une constante, indépendante ω et/ou k : il n'y a pas dispersion.

- $kH \gg 1$ i.e. $H \gg \lambda$: $\tanh(kH) \approx 1$ donc $\boxed{v_\phi \approx \sqrt{\frac{g}{k}}} \approx \frac{g}{\omega}$

En eau profonde, v_ϕ dépend très fortement de ω et/ou k : la propagation des vagues est au contraire dispersive. Les vagues de grande longueur d'onde (k faible) se propagent plus vite.

25 Différentions la relation de dispersion quadratique :

$$2\omega d\omega = g[\tanh(kH) + kH(1 - \tanh^2(kH))] dk$$

On en déduit, à l'aide de la relation de dispersion :

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{g}{2\omega} \left(\frac{\omega^2}{gk} + kH(1 - \tanh^2(kH)) \right) = \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{k^2 H g}{\omega^2} (1 - \tanh^2(kH)) \right)$$

$$\text{D'où } v_g = \frac{\omega}{2k} \left(1 + kH \left(\frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH) \right) \right)$$

$$\text{Or, } \frac{1}{\tanh(kH)} - \tanh(kH) = \frac{\cosh^2(kH) - \sinh^2(kH)}{\cosh(kH) \sinh(kH)} = \frac{2}{\sinh(2kH)}, \text{ donc } v_g = \frac{\omega}{2k} \left(1 + \frac{2kH}{\sinh(2kH)} \right)$$

$$\text{Par conséquent, on trouve bien } v_g = \frac{v_\phi}{n} \left(1 + \frac{n k H}{\sinh(2kH)} \right) \text{ avec } \boxed{n = 2}.$$

Examinons les deux limites :

- $kH \ll 1$ i.e. $H \ll \lambda$: $\sinh(2kH) \sim 2kH$ donc $\boxed{v_g \approx v_\phi \approx \sqrt{gH}}$

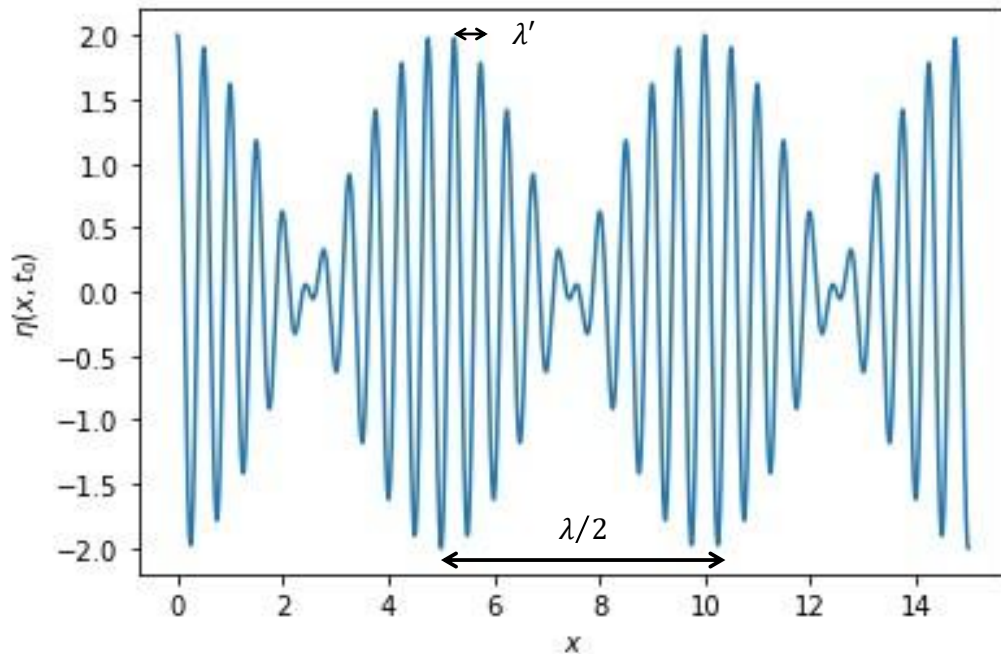
C'est cohérent avec l'absence de dispersion.

- $kH \gg 1$ i.e. $H \gg \lambda$: $\sinh(2kH) \sim \exp(2kH)/2$ donc $\boxed{v_g \approx \frac{v_\phi}{2} \approx \frac{1}{2} \sqrt{\frac{g}{k}} \approx \frac{g}{2\omega}}$

26 La vague résultante s'écrit, de manière évidente :

$$\eta(x, t) = 2A \cos\left(\left(\frac{k_1 - k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}\right)t\right) \cos\left(\left(\frac{k_1 + k_2}{2}\right)x - \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}\right)t\right)$$

$$\text{Par conséquent : } \boxed{k = \left| \frac{k_1 - k_2}{2} \right|} \quad \boxed{\omega = \left| \frac{\omega_1 - \omega_2}{2} \right|} \quad \boxed{k' = \frac{k_1 + k_2}{2}} \quad \boxed{\omega' = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}}.$$



III Étude d'une batterie

III.A - le choix du lithium

III.A.1)

${}^7_3\text{Li}$ est composé :

- d'un nuage électronique de $Z=3$ électrons ;
- d'un noyau atomique formé de $A = 7$ nucléons : $Z=3$ protons et $A-Z= 4$ neutrons .

III.A.2)

Configuration électronique($Z = 3$) : $1s^2 2s^1$

III.A.3)

- $N = 2$: le lithium se situe sur la seconde ligne du tableau périodique ;
 - Ns^1 : le lithium se situe sur la première colonne du tableau périodique.
- Il s'agit donc d'un alcalin.

III.A.4)

L'électronégativité croît de la gauche vers la droite du tableau périodique, donc le lithium est très peu électronégatif.

III.A.5)

Li, de structure électronique $1s^2 2s^1$ peut prendre facilement la structure du gaz rare précédent (l'hélium) en perdant un électron pour donner Li^+ ce qui justifie son caractère réducteur.

III.A.6)

La maille élémentaire du lithium comporte :

- un atome à chacun des 8 sommets de la maille, partagé entre 8 mailles voisines, soit $8 \times 1/8 = 1$ atome en propre ;
- un atome au centre de la maille appartenant en propre à la maille.

Soit au total 2 atomes par maille.

L'atome au centre de la maille a pour plus proches voisins les 8 atomes situés à chacun des sommets de la maille, et un atome à l'un des sommets de la maille a pour plus proches voisins les atomes occupant les centres des 8 mailles entre lesquelles il est partagé,

soit une coordinence de 8 : $C = 8$

Les atomes plus proches voisins sont tangents, donc le rayon atomique R vérifie, en considérant les atomes situés sur une grande diagonale de la maille, $4R = a\sqrt{3}$; $R = a\frac{\sqrt{3}}{4}$ Le volume occupé par les deux atomes contenus en propre dans la maille a pour expression $V_a = 2\frac{4}{3}\pi R^3 = \frac{8\pi}{3}\frac{3\sqrt{3}}{4 \times 16}a^3 = \frac{\sqrt{3}\pi}{8}a^3$ Le volume total de la maille vaut $V_m = a^3$, donc la compacité vaut :

$$C = \frac{V_a}{V_m} = \frac{\sqrt{3}\pi}{8} = 0,68 = 68\% . \text{ Il ne s'agit pas d'une structure compacte}$$

III.A.7)

La maille élémentaire de volume a^3 contient 2 atomes $\rho = \frac{m}{V} = \frac{2M(\text{Li})}{N_a a^3} = 54 \times 10^1 \text{ kg m}^{-3}$

III.A.8)

D'après ce qui précède l'intérêt du lithium provient de son pouvoir réducteur élevé (potentiel standard faible), et de sa masse molaire faible pour un solide : il peut donc être utilisé dans des réactions électrochimiques de tension associée élevée, avec une masse nécessaire pour un nombre d'électrons mis en jeu identique plus faible que dans le cas d'autres composés : on obtient ainsi une énergie massique élevée.

III.B - Accumulateur Li-ion

III.B.1) l'électrode négative

a) Réduction de Li^+ : $\text{Li}^+ + \text{e}^- = \text{Li}$ insertion $\text{Li} + \text{C}_6 = \text{LiC}_6$ demi-réaction bilan de la charge (combinaison des deux réactions précédentes) $\text{Li}^+ + \text{C}_6 + \text{e}^- = \text{LiC}_6$.

b) Chaque atome de lithium peut libérer un électron de charge $|q_e|$, d'où la capacité de l'électrode de graphite lithié : $q_{\max} = \frac{N_A |q_e|}{6M(\text{C}) + M(\text{Li})}$.

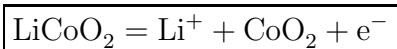
III.B.2) l'électrode positive

a)

- Pour CoO_2 , espèce neutre, $no(\text{Co}) + 2no(\text{O}) = no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = q = 0$ $no(\text{Co}) = +\text{IV}$;
- pour LiCoO_2 , $(+\text{I}) + no(\text{Co}) + 2(-\text{II}) = 0$ $no(\text{Co}) = +\text{III}$.

Dans le couple ($\text{CoO}_2/\text{LiCoO}_2$) du cobalt, le nombre d'oxydation du cobalt est plus élevé dans CoO_2 (+IV) que dans LiCoO_2 (+III), donc l'oxydant est CoO_2 , le réducteur LiCoO_2 .

b) Lors de la charge, il y a oxydation du cobalt, donc augmentation de son nombre d'oxydation, tandis que les nombres d'oxydation des autres espèces sont inchangés. En particulier le lithium reste au nombre d'oxydation +I, donc sous la forme Li^+ La demi-réaction associée s'écrit



III.B.3)

Lors de la charge, les deux demi-réactions sont celles écrites précédemment :

$\text{Li}^+ + \text{C}_6 + \text{e}^- = \text{LiC}_6$ et $\text{LiCoO}_2 = \text{Li}^+ + \text{CoO}_2 + \text{e}^-$, d'où l'équation-bilan complète :

$\text{LiCoO}_2 + \text{C}_6 = \text{CoO}_2 + \text{LiC}_6$, dans laquelle un électron est échangé.

Lors de la décharge la réaction est inversée $\text{CoO}_2 + \text{LiC}_6 = \text{LiCoO}_2 + \text{C}_6$.

III.B.4)

a) La batterie fournit une puissance $P = 328 \text{ kW}$ pendant $\Delta t = 45 \text{ min}$, soit une énergie $W = 328 \times \frac{3}{4} =$ 246 kWh .

b) La batterie de masse $m = 1500 \text{ kg}$ doit fournir $P = 328 \text{ kW}$ soit une puissance massique

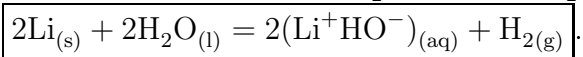
$$p_m = \frac{P}{m} = 219 \text{ W kg}^{-1}.$$

c) La batterie doit délivrer W , soit une énergie massique $E_m = \frac{W}{m} = 164 \text{ W h kg}^{-1}$.

d) La figure 5 représente la puissance massique en fonction de l'énergie massique. D'après les calculs qui précèdent, seuls les accumulateurs Li-ion haute énergie (Li-ion High energy) possèdent une énergie massique suffisante ($E_m \approx 170 \text{ W h kg}^{-1}$). On vérifie également que la puissance massique nécessaire (219 W kg^{-1}) est située dans la plage disponible pour ce type d'accumulateurs, comprise entre 10 et 1000 W h kg^{-1} .

III.C - le choix de l'électrolyte

a) Les demi-réactions d'oxydation du lithium et de réduction de l'eau (*a priori* à pH neutre) s'écrivent $\text{Li} = \text{Li}^+ + \text{e}^-$; $2\text{H}_2\text{O} + 2\text{e}^- = \text{H}_2 + 2\text{HO}^-$ soit la réaction



b) D'après les données de l'énoncé $\Delta_r H^0 = -446 \text{ kJ mol}^{-1} < 0$ La réaction est bien fortement exothermique.

c) La réaction se produit avec formation de gaz, donc qualitativement $\Delta_r S^0 > 0$. On en déduit $\Delta_r G^0 = \Delta_r H^0 - T\Delta_r S^0 < 0$, et finalement $K^0 \gg 1$:

la réaction du lithium avec l'eau est spontanée, et très exothermique. Il faut donc utiliser d'un électrolyte non aqueux pour éviter la réaction parasite du lithium avec l'eau.