

DM 10 - suite implicite - continuité

2025-2026



Exercice 1 :

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction f_n par $f_n(x) = \frac{x-n}{x+n} - e^{-x}$.

1.
 - a) Déterminez l'ensemble de définition de f_n en fonction de n et justifiez qu'elle est continue sur cet ensemble de définition.
 - b) Peut-on prolonger f_n par continuité afin d'en faire une fonction continue sur $\mathbb{R}$? Justifiez soigneusement votre réponse.
 - c) Étudiez les limites en $+\infty$ et $-\infty$.
 - d) Y-a-t-il des asymptotes en $+\infty$ et $-\infty$?
 2. On restreint f_n à l'intervalle $[0, +\infty[$.
 - a) Donnez le tableau de variation de f_n sur cet intervalle et montrez qu'il existe un unique réel $u_n \in \mathbb{R}_+^*$ tel que $f_n(u_n) = 0$.
 - b) Montrez que pour tout n , $n < u_n$. En déduire $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n$.
 - c) Calculez $f\left(n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)\right)$ et en déduire que $u_n \leq n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)$.
 - d) Montrez que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$. Comment pourrait-on interpréter cette limite?
1. a) La fonction f_n est définie si et seulement si $x+n \neq 0$, d'où le domaine de définition de f_n : $D_{f_n} = \mathbb{R} \setminus \{-n\}$. Enfin, f_n est continue sur cet ensemble par somme et quotient d'applications continues.
- b) Le problème se pose en $-n$. On a $\lim_{x \rightarrow -n^+} \frac{x-n}{x+n} = -\infty$ (forme $\frac{-2n}{0^+}$) : c'est une limite infinie, donc aucun prolongement possible...
- c) En factorisant dans la fraction rationnelle, on a immédiatement $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$ car $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-x} = 0$.
De même, en $-\infty$, on obtient $\lim_{x \rightarrow -\infty} f_n(x) = -\infty$ car on a $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} = +\infty$.
- d) Comme $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$, on a une asymptote horizontale d'équation $y = 1$ en $+\infty$.
De plus, $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{f(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x-n}{x(x-n)} - \frac{e^{-x}}{x} = +\infty$ car $\frac{x-n}{x(x-n)} \sim \frac{1}{x} \rightarrow 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{e^{-x}}{x} = \lim_{X \rightarrow +\infty} \frac{e^X}{-X} = -\infty$ par croissance comparée.
On a donc une branche parabolique de direction asymptotique l'axe des ordonnées.
2. a) Pour $x \geq 0$, on calcule $f'_n(x)$ et on trouve $f'_n(x) = \frac{2n}{(x+n)^2} + e^{-x}$, donc $f'_n(x) > 0$ sur $[0, +\infty[$. La fonction f est donc strictement croissante et continue. D'après le théorème de la bijection, elle définit donc une bijection de $[0, +\infty[$ sur $f([0, +\infty[)$. Comme on a $f_n(0) = -1 - e^{-0} = -2$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = 1$, f est une bijection de $[0, +\infty[$ dans $[-2, 1[$ et donc il existe un unique u_n tel que $f(u_n) = 0$.
- b) $f(n) = 0 - e^{-n} < 0$ et f est strictement croissante, donc $u_n > n$. Ainsi, par minoration $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = +\infty$.
- c) C'est le même principe : on calcule $f\left(n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)\right)$ et regarde son signe. On a :

$$\begin{aligned} f\left(n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)\right) &= \frac{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} - 1 \right)}{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} + 1 \right)} - e^{-n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)} = \frac{1+e^{-n} - 1 + e^{-n}}{1+e^{-n} + 1 - e^{-n}} - e^{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)} \\ &= e^{-n} - e^{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)} \end{aligned}$$

Or, $\left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right) > 1$, donc $-ne^{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)} < -n$. La fonction $x \mapsto e^{-x}$ étant strictement décroissante, on a donc $e^{-n} - e^{n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)} > 0$.

De même que pour la question 3b, on obtient : $u_n < n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)$.

- d) On a $n < u_n < n \left(\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}} \right)$, donc $1 < \frac{u_n}{n} < \frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}$. Par le théorème d'encadrement, on a donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{u_n}{n} = 1$, autrement dit $\boxed{u_n \text{ est très proche de } n \text{ pour } n \text{ grand.}}$



Exercice 2 :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1, 1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2+3}+3x & \text{si } x < -1 \\ \frac{x^3+x^2-3x-3}{1-x^2} & \text{si } x > -1 \text{ et } x \neq 1 \end{cases}$$

1. Déterminez les limites en $+\infty$ et $-\infty$ de f .
2. Étudiez les branches infinies en $+\infty$ et $-\infty$ (branche parabolique? asymptote oblique?)
3. f peut-elle être prolongée par continuité en -1 ?
4. Que dire de la situation en 1? (prolongeable par continuité? continuité à droite ou à gauche? interprétation graphique?)

1. En $+\infty$, en factorisant par x^3 au numérateur et x^2 au dénominateur, on arrive à

$$f(x) = \frac{x^3}{-x^2} a(x) = -x a(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 1 \text{ donc } \boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty}$$

En $-\infty$: pour $x < 0$, on a

$$\begin{aligned} f(x) &= |x| \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 3x \\ &= -x \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} + 3x \\ &= x \left(3 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \right) \end{aligned}$$

donc par produit de limite $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -\infty}$

2. En $+\infty$, la même factorisation que pour la première question donne : $\frac{f(x)}{x} = \frac{x^3}{-x^2} a(x) = -a(x)$

avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 1$, donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = -1$.

D'autre part, $f(x) + x = \frac{x^3 + x^2 - 3x - 3 + x(1 - x^2)}{1 - x^2} = \frac{x^2 - 2x - 3}{1 - x^2} = \frac{x^2(1 - \frac{2}{x} - \frac{3}{x^2})}{-x^2(1 - \frac{1}{x^2})}$ donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -1$.

Ainsi, $\boxed{\mathcal{C}_f \text{ admet en } +\infty \text{ une asymptote d'équation } y = -x - 1.}$

En $-\infty$, $\frac{f(x)}{x} = 3 - \sqrt{1 + \frac{3}{x^2}} \rightarrow 2$

De plus $f(x) - 2x = \sqrt{x^2+3} + x = \frac{3}{\sqrt{x^2+3} - x}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - 2x = 0$ (forme " $\frac{3}{+\infty}$ ")

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ admet en $-\infty$ une $\boxed{\text{asymptote oblique d'équation } y = 2x.}$

3. Factorisons $f(x)$ pour $x > -1$: $f(x) = \frac{(x+1)(x^2-3)}{(1+x)(1-x)} = \frac{x^2-3}{1-x}$.

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \frac{-2}{2} = -1$. D'autre part $\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -1$:

$\boxed{f \text{ est prolongeable par continuité en posant } f(-1) = -1}$

4. En partant de la forme simplifiée dans la question précédente, on a immédiatement $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = +\infty$: la $\boxed{\text{fonction ne peut pas être prolongée par continuité}}$. On ne peut pas non plus obtenir de continuité à droite. De même à gauche, on obtient $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = -\infty$, rendant impossible une continuité à gauche.

Graphiquement, la courbe de f admet une $\boxed{\text{asymptote verticale d'équation } x = 1.}$