

Suites - limites et continuité

DS6 - durée : 3h

La calculatrice est interdite.



Exercice 1 :

En justifiant soigneusement, déterminez les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos(1/x)} x^2$
2. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) + 3x^4 + 2 \ln(x)}{e^x - x}$
3. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$.

1. Pour tout $x \neq 0$, on a $-1 \leq \cos\left(\frac{1}{x}\right) \leq 1$ donc, par croissance de la fonction exponentielle, il vient

$$e^{-1} \leq e^{\cos(1/x)} \leq e^1$$

Comme $x^2 \geq 0$, on en déduit :

$$x^2 e^{-1} \leq x^2 e^{\cos(1/x)} \leq x^2 e^1$$

enfin, comme $\lim_{x \rightarrow 0} x^2 = 0$, on conclut par encadrement que

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{\cos(1/x)} x^2 = 0$$

2. Commençons par remarquer que $\cos(x) + 3x^4 + 2 \ln(x) = 3x^4 \left(1 + \frac{\cos x}{3x^4} + 2 \frac{\ln x}{3x^4}\right)$.

Comme $-1 \leq \cos x \leq 1$, on déduit au voisinage de $+\infty$ que $\frac{-1}{3x^4} \leq \frac{\cos x}{3x^4} \leq \frac{1}{3x^4}$ et donc par encadrement $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos x}{3x^4} = 0$.

Par croissance comparée, $2 \frac{\ln x}{3x^4} \rightarrow 0$ également et finalement $\cos(x) + 3x^4 + 2 \ln(x) = 3x^4 u(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = 1$.

Toujours par croissance comparée, on montre de la même façon que $e^x - x = e^x v(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = 1$ et par quotient il vient :

$$\frac{\cos(x) + 3x^4 + 2 \ln(x)}{e^x - x} = \frac{3x^4}{e^x} a(x) \text{ avec } \lim_{x \rightarrow +\infty} a(x) = 1.$$

Finalement, par.... euh... croissance comparée :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\cos(x) + 3x^4 + 2 \ln(x)}{e^x - x} = 0$$

3. Il suffit de changer de variable pour se ramener en 0 et tomber sur une limite usuelle :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} x \sin\left(\frac{1}{x}\right) = \lim_{X=\frac{1}{x}} \frac{\sin(X)}{X} = 1$$



Exercice 2 :

soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$ par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3+3x}{x^3+1} & \text{si } x < -1 \\ \sqrt{x^2-x+1} & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

1. Justifiez que f est continue sur $\mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
2. La fonction peut-elle être prolongée par continuité en -1 ?
3. Déterminez les limites de f en $+\infty$ et $-\infty$.
4. Étudiez les branches infinies.

1. Sur $] -\infty, -1[$, f est un quotient de fonctions continues, donc elle est continue.
Sur $] -1, +\infty[$, c'est une composition de fonction continue, et donc elle est continue également.
2. $\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = \sqrt{3}$ directement.

Pour la limite à gauche, on va factoriser : si $x < -1$, on a $f(x) = \frac{3(1+x)}{(x+1)(x^2-x+1)} = \frac{3}{x^2-x+1}$

On en déduit $\lim_{x \rightarrow -1} f(x) = \frac{3}{3} = 1$ et on ne peut donc pas prolonger f par continuité.

3. En $-\infty$, on factorise par x au numérateur et par x^3 au dénominateur pour avoir $f(x) = \frac{1}{x^2} u(x)$ avec $\lim_{x \rightarrow -\infty} u(x) = 1$, d'où $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$

En $+\infty$, on factorise de même pour x^2 pour montrer que $x^2 - x + 1 \xrightarrow{x \rightarrow +\infty} +\infty$ et donc

$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ par composition de limite.

4. En $-\infty$, la limite étant nulle, on a une asymptote horizontale d'équation $y = 0$.
En $+\infty$, remarquons déjà que

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{x} &= \frac{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})}}{x} \\ &= \frac{|x|}{x} \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \\ &= \sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} \text{ car au voisinage de } +\infty, |x| = x \end{aligned}$$

Ainsi $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = 1$

On cherche maintenant la limite de $f(x) - x$, et il s'agit d'exploiter l'expression conjuguée :

$$\begin{aligned} f(x) - x &= \frac{(\sqrt{x^2 - x + 1} - x)(\sqrt{x^2 - x + 1} + x)}{\sqrt{x^2 - x + 1} + x} \\ &= \frac{-x + 1}{\sqrt{x^2(1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2})} + x} \\ &= \frac{-x(1 - \frac{1}{x})}{x(\sqrt{1 - \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2}} + 1)} \end{aligned}$$

Ainsi, $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - x = -\frac{1}{2}$

On en déduit qu'on a une asymptote oblique d'équation $y = x - \frac{1}{2}$

Exercice 3 :

1. Soit (u_n) la suite définie par

$$\begin{cases} u_0 & \in [0, 1] \\ \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} &= \frac{1+2u_n}{3+2u_n} \end{cases}$$

- a) Déterminez une fonction f telle que $u_{n+1} = f(u_n)$. On précisera son ensemble de définition.
- b) Etudiez les variations de f sur $[0, 1]$ et le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [0, 1]$.
- c) Représentez la courbe de f sur $[0, 1]$, la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (u_n) pour des valeurs de u_0 que vous jugez intéressantes.
- d) Montrez que si $u_0 \in [\frac{1}{2}, 1]$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in [\frac{1}{2}, 1]$.
- e) Dédurre de tout ce qui précède que si $u_0 \geq \frac{1}{2}$, alors $\lim u_n = \frac{1}{2}$.
- f) Que dire du cas $u_0 \in [0, \frac{1}{2}[$?

2. Soit maintenant (w_n) définie par $w_0 = \frac{1}{4}$ et $w_{n+1} = \frac{1}{1+2w_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Déterminez une fonction g telle que $w_{n+1} = g(w_n)$ et dressez le tableau de variation de g sur l'intervalle $[0; 1]$.
 - Déterminez les points fixes de g et la position de la courbe de g par rapport à la droite d'équation $y = x$ (toujours sur $[0, 1]$)
 - Tracez sur un même graphique la courbe de g , la droite d'équation $y = x$ et les premiers termes de la suite (w_n) .
 - On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $s_n = w_{2n}$ et $t_n = w_{2n+1}$. Soit $h = g \circ g$. Montrez que ces suites vérifient les relations de récurrence : $s_{n+1} = h(s_n)$ et $t_{n+1} = h(t_n)$.
 - Vérifiez que $h = f$ (où f est la fonction de la première partie de l'exercice) et déterminez les limites des suites (s_n) et (t_n) .
 - En déduire la limite de la suite (w_n) .

1. a) En posant la fonction définie sur $\mathbb{R} \setminus \left\{ -\frac{3}{2} \right\}$ par $f(x) = \frac{1+2x}{3+2x}$, on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$.
- b) f est dérivable sur son ensemble de définition, en particulier sur $[0, 1]$ et

$$f'(x) = \frac{2(3+2x) - 2(1+2x)}{(3+2x)^2} = \frac{4}{(3+2x)^2}$$

Ainsi, f est croissante sur $[0, 1]$.

D'autre part $f(x) - x = \frac{1+2x}{3+2x} - x = \frac{1-x-2x^2}{3+2x}$, du signe sur $[0, 1]$ de $1-x-2x^2$ dont les racines sont -1 et $\frac{1}{2}$

On résume tout cela dans le tableau ci dessous :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{5}$
$f(x) - x$	+	0	-

- c) Le dessin laisse penser deux comportements différents selon les valeurs de u_0 (plus petit ou plus grand que $\frac{1}{2}$, mais une convergence toujours vers $\frac{1}{2}$.
- d) Supposons $u_0 \in [1/2; 1]$ et montrons par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

L'initialisation est validée et supposons que pour un certain $n \in \mathbb{N}$ on ait $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, alors $f(u_n) \in f\left(\left[\frac{1}{2}, 1 \right]\right) = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right]$.

Comme $\left[\frac{1}{2}, \frac{3}{5} \right] \subset \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, on $u_{n+1} \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ et par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

- e) Pour tout $x \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$, $f(x) - x \leq 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$ donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(u_n) - u_n = u_{n+1} - u_n \leq 0$. La suite (u_n) est décroissante et minorée. Elle converge donc vers une limite ℓ avec $\ell \in \left[\frac{1}{2}, 1 \right]$.

Comme en outre f est continue, $f(u_n) \rightarrow f(\ell)$ et la relation $f(u_n) = u_{n+1}$ donne par passage à la limite que $f(\ell) = \ell$. Le seul ℓ qui convient est $\frac{1}{2}$ et on a donc $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

- f) Si $u_0 \in \left[0, \frac{1}{2} \right]$, on montre de la même façon que $u_n \in \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right]$ pour tout n , et que la suite est cette fois croissante. On obtient alors à nouveau $\lim u_n = \frac{1}{2}$.

2. a) On pose $g : x \mapsto \frac{1}{1+2x}$: on a bien pour tout $n \in \mathbb{N}$, $w_{n+1} = g(w_n)$

Pour tout $x \in [0, 1]$, $x \neq \frac{-1}{2}$, donc g est dérivable avec $g'(x) = -\frac{1}{(1+2x)^2}$, et g est décroissante sur $[0; 1]$, d'où le tableau de variation :

x	0	1
$g'(x)$	-	
g	1	$\frac{1}{3}$

- b) Pour déterminer les points fixes et la position de la courbe de g , on va étudier $g(x) - x = \frac{1}{1+2x} - x = \frac{1-x-2x^2}{1+2x}$.

Les points fixes sont les racines de $1-x-2x^2$: $x_1 = -1$ et $x_2 = \frac{1}{2}$.

Ainsi, $1-x-2x^2 \geq 0$ (donc courbe au dessus) pour $x \in [-1; \frac{1}{2}]$ et $1-x-2x^2 \leq 0$ (donc courbe en dessous) pour $x \in]-\infty, -1] \cup [\frac{1}{2}, +\infty[$.

En se restreignant à l'intervalle d'étude, ça donne :

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$g'(x)$	-		-
g	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$
$g(x) - x$	+	0	-

Remarquons au passage $g([0, 1]) = [\frac{1}{3}, 1]$, ce qui va garantir que la suite (w_n) est dans $[0, 1]$, ce que l'on observera sur le dessin.

- c) Le tracé donne une spirale qui s'enroule autour du point $(1/2; 1/2)$.
d) On fait comme en TD : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$h(s_n) = g(g(w_{2n})) = g(w_{2n+1}) = w_{2n+2} = s_{n+1}.$$

De même pour t_n .

- e) On calcule simplement pour tout x tel que $g(x) \neq \frac{-1}{2}$, $h(x) = g(g(x)) = \frac{1}{1+2\frac{1}{1+2x}} = \frac{1+2x}{3+2x}$. On a donc bien $h = f$.

D'après l'étude faite dans la première partie, comme $s_0 = w_0 = \frac{1}{4} < \frac{1}{2}$, on a (s_n) croissante

et $\lim s_n = \frac{1}{2}$. De plus $t_0 = w_1 = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$ et alors (t_n) décroissante et $\lim t_n = \frac{1}{2}$.

- f) Comme $\lim w_{2n} = \lim s_n = \lim w_{2n+1} = \lim t_n = \frac{1}{2}$, on conclut par le théorème de partitionnement pair/impair que $\lim w_n = \frac{1}{2}$.

Exercice 4 :

- On définit pour tout entier $n \geq 3$ la fonction $f_n : \begin{cases} \mathbb{R}^{*+} & \longrightarrow \mathbb{R} \\ x & \longmapsto x - n \ln x \end{cases}$
 - Étudier les variations et les limites de f_n et dresser son tableau de variations.
 - En déduire que l'équation $f_n(x) = 0$ admet exactement deux solutions dans $\mathbb{R}^{*+}$. On note a_n la plus petite des solutions et u_n l'autre.
 - Montrez que : $1 \leq a_n \leq n \leq u_n$.
 - En déduire $\lim u_n$.
- Étude de la suite $(a_n)_{n \geq 3}$
 - Montrer que $f_{n+1}(a_n) \leq 0$ et que $(a_n)_{n \geq 3}$ est décroissante.
 - En déduire que $(a_n)_{n \geq 3}$ est convergente vers une limite $\ell \geq 1$.

- c) Montrez que $\frac{a_n}{n} = \ln(a_n)$ et en déduire que $\ell = 1$.
- d) Justifiez que $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = 1$ et montrer que $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n-1} = 1$.
- e) En déduire la limite de $n(a_n - 1)$ quand n tend vers $+\infty$ et proposer une approximation de a_n quand n est grand.

1. a) f_n est dérivable sur $\mathbb{R}^{*+}$, comme somme de fonctions qui le sont, avec

$$f'_n(x) = 1 - \frac{n}{x} = \frac{x-n}{x}$$

Ainsi $f'_n(x)$ est du signe de $x-n$ sur $\mathbb{R}^{*+}$, c'est à dire $f'_n(x) < 0$ pour $0 < x < n$ et $f'_n(x) > 0$ pour $x > n$.

Pour les limites, c'est une croissance comparée pour $+\infty$, et pas de F.I en 0.

D'où le tableau : $\lim_{x \rightarrow 0} f_n(x) = +\infty$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} f_n(x) = +\infty$

x	0	n	$+\infty$		
$f'_n(x)$		−	0	+	
$f_n(x)$	$+\infty$	$\searrow$	$n(1 - \ln(n))$	$\nearrow$	$+\infty$

- b) On applique le théorème de la bijection (ou le TVI + strict monotonie donc injectivité) une fois sur $]0, n]$ et une fois sur $[n, +\infty[$:

f_n est une bijection de $]0, n]$ dans $f(]0, n]) = [f_n(n); +\infty[$

Or $f_n(n) = n(1 - \ln n) < 0$, donc 0 est dans l'intervalle image, et

il existe bien un unique $a_n \in]0, n[$ tel que $f(a_n) = 0$.

De même, f_n est une bijection de $[n, +\infty[$ dans $[f_n(n); +\infty[$ et à nouveau 0 est dans l'intervalle image donc il existe bien un

unique $b_n \in [n, +\infty[$ tel que $f(b_n) = 0$.

- c) La question précédente donne $0 < a_n \leq n \leq u_n$.

Il suffit ensuite de constater que $f_n(1) = 1 > 0$. Donc comme f est décroissante, on en déduit que $1 \leq a_n$.

- d) Comme pour tout n , $u_n \geq n$, on en déduit immédiatement, par minoration, que $\lim u_n = +\infty$.

2. a) Pour tout $n \geq 3$, on a : $f_{n+1}(a_n) = a_n - (n+1)\ln(a_n) = f_n(a_n) - \ln(a_n)$.
Or, par définition, $f_n(a_n) = 0$, donc $f_{n+1}(a_n) = -\ln(a_n) \leq 0$ car $a_n \geq 1$

On a donc $f_{n+1}(a_n) \leq 0$.

De plus $f_{n+1}(a_{n+1}) = 0$ (par définition de la suite), on a donc

$$f_{n+1}(a_n) \leq f_{n+1}(a_{n+1})$$

D'autre part, f_{n+1} décroît strictement sur $[1, n+1]$, intervalle contenant a_n et a_{n+1} , donc les antécédents sont rangés en ordre inverse des images :

$$a_{n+1} \leq a_n$$

(on peut également raisonner en utilisant une bijection réciproque, en faisant attention à bien dire qu'on est dans l'intervalle $[1, n+1]$ où f_{n+1} est bijective....)

La suite $(a_n)_{n \geq 3}$ est donc décroissante

- b) $(a_n)_{n \geq 3}$ étant décroissante et minorée par 1, elle converge.

Notons ℓ sa limite. Comme $a_n \geq 1$, pour tout $n \geq 3$, on en déduit, par passage à la limite que $\ell \geq 1$.

- c) Pour tout $n \geq 3$, on a $a_n - n \ln(a_n) = 0$, donc $\frac{a_n}{n} = \ln(a_n)$.

Or $(a_n)_{n \geq 3}$ converge vers une limite ℓ , donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{a_n}{n} = 0$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} \ln(a_n) = 0$, c'est à dire $\ln(\ell) = 0$.

On en déduit que $(a_n)_{n \geq 3}$ converge vers $e^0 = 1$

d) avec un changement de variable, on se ramène à une limite usuelle :

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln(x)}{x-1} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\ln(1+h)}{h} = 1$$

(on peut aussi reconnaître directement le taux d'accroissement en $\ln$ en 1)

Or $\lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1$ donc, par composition :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1$$

e) Par définition de a_n , on a : $a_n = n \ln(a_n)$ donc $\frac{a_n - 1}{\ln(a_n)} = n \frac{a_n - 1}{a_n}$ donc

$$n(a_n - 1) = a_n \frac{a_n - 1}{\ln(a_n)}. \quad \text{Or } \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = 1 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a_n)}{a_n - 1} = 1.$$

Par conséquent :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} n(a_n - 1) = 1$$

On en déduit que, pour n grand, $n(a_n - 1) \simeq 1$, et donc $a_n \simeq 1 + \frac{1}{n}$.



Exercice 5 : bonus

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 \geq -1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} = \ln(1 + u_n)$$

1. Donnez une fonction f avec son domaine de définition telle que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = f(u_n)$ et dressez son tableau de variation.
2. Soit $g : x \mapsto f(x) - x$. Dressez le tableau de variation de g et déterminez pour tout $x \in]-1, +\infty[$ le signe de $g(x)$.
3. On suppose que $u_0 \geq 0$. Montrez que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq 0$, puis étudiez la convergence de (u_n) et donnez sa limite.
4. On se propose de montrer par l'absurde que la suite (u_n) n'est plus définie à partir d'un certain rang si $-1 < u_0 < 0$.
 - a) A quelle condition la suite (u_n) est bien définie pour tout n ?
 - b) Supposons maintenant que cette condition soit vérifiée. Montrer qu'alors la suite u_n converge, repérer l'absurdité et conclure.

1. On pose la fonction $f :]-1, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$ définie pour tout $x \in]-1, +\infty[$ par $f(x) = \ln(1+x)$. On a bien $u_{n+1} = f(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. f est dérivable sur son ensemble de définition et on a $f'(x) = 1/(1+x)$ qui est toujours positive. Ainsi, f est croissante.

x	-1	0	$+\infty$
$f'(x)$		+	
$f(x)$	$-\infty$	0	$+\infty$

2. Soit $g : x \mapsto \ln(1+x) - x$. On a $g'(x) = 1/(1+x) - 1 = \frac{-x}{1+x}$, du signe de $-x$ sur $] -1 + \infty[$, d'où le tableau de variation de g :

x	-1	0	$+\infty$
$g'(x)$		+	-
$g(x)$	$-\infty$	0	$-\infty$

Enfin, comme $g(0) = 0$, on a que le maximum de g est 0, donc $\boxed{\text{pour tout } x \in]-1, +\infty[, g(x) \leq 0.}$

3. D'après le tableau de variation de f , $[0, +\infty[$ est stable par f . Comme $u_0 \geq 0$, on montre par récurrence que pour tout n , $u_n \geq 0$. D'autre part, comme $g(x) \leq 0$ pour tout x , on a, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $g(u_n) = u_{n+1} - u_n \leq 0$, donc la suite u_n est décroissante. Elle est minorée, donc elle converge.

Enfin, comme f est continue, la limite de la suite est un point fixe de la fonction f qui n'en n'a qu'un : 0. Ainsi, $\boxed{\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.}$

4. a) La suite n'est plus définie si pour un certain n , $u_n < -1$. La condition de "bonne définition" est donc que $\boxed{\text{pour tout } n, u_n \geq -1.}$

b) Pour la même raison que la question précédente, la suite u_n est décroissante.

Raisonnons par l'absurde : si pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geq -1$, on a donc que u_n est minorée. Elle converge donc vers une limite qui est un point fixe de f . Or le seul point fixe de f est 0 et $u_0 < 0$ avec u_n décroissante : c'est absurde !

Ainsi, la suite (u_n) ne peut pas être minorée, et donc, à partir d'un certain rang, $u_n < -1$. Elle ne sera alors plus définie car on ne pourra pas calculer $u_{n+1} \dots$.