

DL n° 5.

À rendre le lundi 9 mars.

Problème : polynômes de Tchébychev

Dans tout le problème, n désigne un entier naturel strictement positif. Si P est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, la fonction polynomiale associée à P sera également notée $P(x)$.

Partie 1

1. En utilisant la formule de Moivre, démontrer qu'il existe un polynôme T_n vérifiant :

$$\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos \theta) = \cos(n\theta). \quad (1)$$

Montrez que ce polynôme est unique.

Même question pour Q_n vérifiant : $\forall \theta \in \mathbb{R}, \quad \sin(\theta)Q_n(\cos \theta) = \sin(n\theta)$.

Les T_n sont appelés *polynômes de Tchébychev de première espèce*. Les Q_n sont ceux de seconde espèce.

2. Préciser le degré de T_n ainsi que ses racines complexes, avec leur ordre de multiplicité. Mêmes questions pour Q_n .
3. En utilisant des formules de trigonométrie bien choisies, montrer qu'on a les égalités polynomiales suivantes :

$$T_{n+1} = 2XT_n - T_{n-1}, \quad Q_{n+1} = 2XQ_n - Q_{n-1} \quad \text{et} \quad (1 - X^2)Q_n^2 + T_n^2 = 1.$$

4. En dérivant la relation (1), montrer que $T'_n = nQ_n$. Exprimer $(X^2 - 1)Q'_n$ en fonction de T_n et Q_n .
5. (a) En déduire les variations de T_n . Donner l'allure du graphe de T_n pour $1 \leq n \leq 3$ sur une même figure.
(b) Calculer la plus grande valeur M_n de $|T_n(x)|$ pour $x \in [-1; 1]$.
(c) Déterminer le nombre de solutions de $|T_n(x)| = M_n$ sur $\mathbb{R}$.
6. (a) Montrer que $(X^2 - 1)T''_n + XT'_n = n^2T_n$.
(b) Etudier la parité de T_n .
(c) En déduire

$$T_n = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} a_k X^{n-2k}.$$

Quelle relation vérifient a_k et a_{k-1} ?

- (d) En utilisant l'expression de T_n obtenue à la première question, montrer que $a_0 = 2^{n-1}$.
- (e) Montrer que

$$a_k = (-1)^k 2^{n-2k-1} \frac{n}{n-k} \binom{n-k}{k}.$$

La première question assure que les a_k sont des entiers.

7. Exprimer Q_n .

Partie 2

1. Soit E_n l'ensemble des polynômes unitaires de degré n . On note $f(P)$ la borne supérieure de l'ensemble $\{|P(x)|, x \in [-1; 1]\}$. On cherche les polynômes rendant f minimum.
 - (a) Déterminer $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que λT_n soit élément de E_n .
 - (b) Soit $X = \{x \in [-1; 1] \mid |\lambda T_n(x)| = f(\lambda T_n)\}$. Justifier que X est fini et déterminer le cardinal de X .
 - (c) Soient $x \in X$ et P un polynôme de E_n vérifiant $f(P) < f(\lambda T_n)$. Déterminer le signe de $(P - \lambda T_n)(x)$. En déduire une contradiction.
 - (d) Conclure.
2. On cherche les polynômes unitaires de degré n vérifiant : si α est la borne supérieure de l'ensemble $\{|P(x)|, x \in [-1; 1]\}$, alors $|P(x)| = \alpha$ admet $n + 1$ racines distinctes dans $[-1; 1]$. Soit P un tel polynôme.
 - (a) Montrer que $|P(1)| = \alpha$ et $|P(-1)| = \alpha$, et que si $P'(x) = 0$ avec $x \in]-1, 1[$, alors $|P(x)| = \alpha$.
 - (b) Soit $Q = P^2 - \alpha^2$. Montrer que 1 et -1 sont racines de Q et que les racines de P' de $]-1, 1[$ sont toutes racines de Q d'ordre au moins 2.
 - (c) En déduire que

$$Q = \frac{1}{n^2}(X^2 - 1)P'^2.$$

- (d) Montrer que si $x \in]-1, 1[$, alors

$$\frac{P'(x)}{\sqrt{\alpha^2 - P^2(x)}} = \pm \frac{n}{\sqrt{1 - x^2}}$$

si $|P(x)| \neq \alpha$.

- (e) On définit une fonction y sur $\mathbb{R}$ par $y(t) = \arccos\left(\frac{P(\cos t)}{\alpha}\right)$. Montrez que sur un intervalle tel que $\cos(t)$ ne contienne aucune racine de $|P(\cos(t))| = \alpha$, y' est constante.
- (f) Calculer P .