

# Équations différentielles linéaires

Dans ce chapitre,  $I$  désigne un intervalle de  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{K}$  désigne  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$  et  $E$  un  $\mathbb{K}$ -espace vectoriel normé de dimension finie.

On identifie  $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{K})$  et  $\mathbb{K}^n$ .

## I Équations différentielles linéaires d'ordre 1

### I. A Généralités

**Notation :** Dans ce chapitre, si  $u$  est un endomorphisme de  $E$  et  $x \in E$ , alors  $u(x)$  sera noté  $u \cdot x$ .

#### Définition 1.1

On appelle **équation différentielle linéaire d'ordre 1 normalisée** toute équation de la forme :

$$(\mathcal{E}) \quad x' = a(t) \cdot x + b(t), \quad t \in I,$$

où  $a$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et  $b$  est une application continue de  $I$  dans  $E$ .

Les solutions de  $(\mathcal{E})$  sont les fonctions  $\varphi$  dérivable de  $I$  dans  $E$  telle que :

$$\forall t \in I, \varphi'(t) = a(t) \cdot \varphi(t) + b(t).$$

L'**équation homogène associée** à  $(\mathcal{E})$  est :

$$(\mathcal{E}_0) \quad x'(t) = a(t) \cdot x(t).$$

**Remarques 1.2 :** • On retrouve bien les équations différentielles linéaires scalaires d'ordre 1 si  $E = \mathbb{K}$ .

- Les applications  $a$  et  $b$  sont supposées continues et  $(u, x) \mapsto u \cdot x$  est bilinéaire en dimension finie donc continue, donc toute solution de  $(\mathcal{E})$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  sur  $I$ .

#### Forme matricielle : système différentiel linéaire

Si l'on munit l'espace vectoriel  $E$  d'une base  $\mathcal{B}$ , alors l'équation différentielle :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

se traduit matriciellement par :

$$X' = A(t)X + B(t)$$

où, pour tout  $t \in I$ ,  $A(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a(t))$ ,  $B(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(b(t))$ .

En effet,  $\varphi : I \longrightarrow E$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si et seulement si :

$$\forall t \in I, \quad X'(t) = A(t)X(t) + B(t)$$

où  $\forall t \in I, X(t) = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(\varphi(t))$ .

Un tel système s'écrit :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}(t)x_1 + \cdots + a_{1,n}(t)x_n + b_1(t) \\ \vdots \\ x'_n = a_{n,1}(t)x_1 + \cdots + a_{n,n}(t)x_n + b_n(t) \end{cases}$$

**Exemple 1.3 :**

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} x' = 2tx + y + \cos(t) \\ y' = 3e^t x - \sin(t)y + 2\sin(t) \end{cases}$$

#### Proposition 1.4 (principe de superposition)

Si  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  sont respectivement solutions des équations :

$$x' = a(t) \cdot x + b_1(t) \quad \text{et} \quad x' = a(t) \cdot x + b_2(t),$$

et  $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{K}$ , alors  $\lambda_1\varphi_1 + \lambda_2\varphi_2$  est solution de :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t)$$

avec :  $b = \lambda_1 b_1 + \lambda_2 b_2$ .

#### Définition 1.5

On appelle **problème de Cauchy** pour l'équation différentielle linéaire

$(\mathcal{E}) : x' = a(t) \cdot x + b(t)$  sur  $I$ , la conjonction de cette équation et d'une **condition initiale** :  $x(t_0) = x_0$  avec  $t_0 \in I$  et  $x_0 \in E$ .

#### Proposition 1.6 (forme intégrale d'un problème de Cauchy)

Soit  $(t_0, x_0) \in I \times E$ . Une application  $\varphi : I \longrightarrow E$  est une solution du problème de Cauchy :

$$(\mathcal{E}) : x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0$$

si et seulement si elle est continue et vérifie :

$$\forall t \in I, \quad \varphi(t) = x_0 + \int_{t_0}^t (a(s) \cdot \varphi(s) + b(s)) \, ds.$$

## I. B Théorème de Cauchy linéaire

### Théorème 1.7 (Cauchy linéaire)

Pour tout  $(t_0, x_0) \in I \times E$ , il existe une unique solution  $\varphi$  du problème de Cauchy :

$$x' = a(t) \cdot x + b(t) \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

**Exemple 1.8 :** Montrer qu'une solution non nulle d'une équation différentielle linéaire homogène :  $x' = a(t) \cdot x$  ne s'annule pas.

### Corollaire 1.9

Soit  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  des applications continues. Pour tout  $(t_0, X_0) \in I \times \mathbb{K}^n$ , le problème de Cauchy :

$$X' = A(t)X + B(t) \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0$$

admet une unique solution.

**Remarque 1.10 :** Cela correspond à un système de  $n$  équations différentielles linéaires scalaires avec une condition initiale pour chaque inconnue.

## I. C Espace des solutions

### Théorème 1.11

Soit  $(\mathcal{E}_0) : x' = a(t) \cdot x$  une équation différentielle linéaire homogène. Alors  $\mathcal{S}_0$  l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{E}_0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{F}(I, E)$  et pour tout  $t_0 \in I$ , l'application :

$$\begin{aligned} \Phi : \mathcal{S}_0 &\longrightarrow E \\ \varphi &\longmapsto \varphi(t_0) \end{aligned}$$

est un isomorphisme.

### Corollaire 1.12

Avec les notations du théorème précédent,

$$\dim \mathcal{S}_0 = \dim E.$$

### Proposition 1.13

Soit  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  une famille de  $n = \dim E$  solutions de  $(\mathcal{E}_0) : x' = a(t) \cdot x$ , les assertions suivantes sont équivalentes :

- $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$  ;
- $\exists t_0 \in I \mid (\varphi_1(t_0), \dots, \varphi_n(t_0))$  est une base de  $E$  ;
- $\forall t \in I \mid (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))$  est une base de  $E$ .

**Exemple 1.14 :** reprise de l'exemple 1.3 :

$$\begin{cases} x' = y \\ y' = x \end{cases}$$

### Théorème 1.15

L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $x' = a(t) \cdot x + b(t)$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{F}(I, E)$  de direction  $\mathcal{S}_0$  l'espace des solutions de l'équation homogène associée.

**Remarque 1.16 :** Si  $\varphi$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ , alors  $\mathcal{S} = \varphi + \mathcal{S}_0$ .

## II Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

### II. A Exponentielle d'un endomorphisme, d'une matrice

#### Définition 2.1

- Soit  $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , la série  $\sum \frac{M^k}{k!}$  converge absolument, on note  $e^M$  ou  $\exp(M)$  sa limite.
- Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ , la série  $\sum \frac{a^k}{k!}$  converge absolument, on note  $e^a$  ou  $\exp(a)$  sa limite.

#### Proposition 2.2

Soit  $D = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$  une matrice diagonale.

Alors :

$$e^D = \text{diag}(e^{d_1}, \dots, e^{d_n}).$$

**Exemples 2.3 :**

$$\forall t \in \mathbb{R}, e^{tI_n} = \text{---} \quad \text{en particulier : } e^0 = \text{---}.$$

#### Proposition 2.4

Soit  $N \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  une matrice nilpotente.

Alors :

$$e^N = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{N^k}{k!}$$

**Proposition 2.5**

Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et  $P \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$ . Si  $B = P^{-1}AP$ , alors :

$$e^B = P^{-1}e^A P.$$

**Remarque 2.6 :** En particulier, si  $A$  est diagonalisable :  $A = PDP^{-1}$ , alors :  
 $e^A = Pe^D P^{-1}$  où  $e^D$  est diagonale.

**Proposition 2.7**

Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ . Si les valeurs propres de  $A$ , comptées avec multiplicité, sont :  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ , alors celles de  $e^A$  sont  $e^{\lambda_1}, \dots, e^{\lambda_n}$ .

**Attention :** Ce résultat est faux pour le spectre réel d'une matrice réelle.

**Contre exemple 2.8 :**  $A = \begin{pmatrix} 0 & \pi \\ -\pi & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ .

**Remarque 2.9 :** Si  $Y$  est un vecteur propre de  $A$  pour la valeur propre  $\lambda$ , alors c'est un vecteur propre de  $e^A$  pour la valeur propre  $e^\lambda$ .

**Proposition 2.10**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$  et  $\mathcal{B}$  une base de  $E$ .  
 Si  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$ , alors  $e^A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(e^a)$ .

**Théorème 2.11**

- L'application  $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E) & \longrightarrow & \mathcal{L}(E) \\ a & \longmapsto & e^a \end{array}$  est continue.
- L'application  $\exp : \begin{array}{ccc} \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \\ A & \longmapsto & e^A \end{array}$  est continue.

**Théorème 2.12**

- Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ , l'application  $\varphi : t \mapsto e^{ta}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{L}(E)$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = a \circ e^{ta} = e^{ta} \circ a.$$

- Soit  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , l'application  $\varphi : t \mapsto e^{tA}$  est de classe  $\mathcal{C}^1$  de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  et

$$\forall t \in \mathbb{R}, \varphi'(t) = A \times e^{tA} = e^{tA} \times A.$$

**Théorème 2.13**

- Soit  $a$  et  $b$  des endomorphismes de  $E$  qui commutent, alors :

$$e^{a+b} = e^a \circ e^b = e^b \circ e^a.$$

- Soit  $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$  qui commutent, alors :

$$e^{A+B} = e^A \times e^B = e^B \times e^A.$$

## II. B Systèmes différentiels linéaires homogènes à coefficients constants

On s'intéresse dans cette partie à une équation différentielle de la forme :

$$(\mathcal{E}_0) : \quad x' = a \cdot x$$

où  $a \in \mathcal{L}(E)$ .

C'est à dire à une équation différentielle linéaire homogène  $x' = a(t) \cdot x$  où la fonction  $a : I \rightarrow \mathcal{L}(E)$  est constante et on identifie alors  $a$  à cette constante dans  $\mathcal{L}(E)$ .

**Versión matricielle :** si  $\mathcal{B}$  est une base de  $E$  et  $A = \text{Mat}_{\mathcal{B}}(a)$ , alors l'équation  $(\mathcal{E}_0)$  se traduit matriciellement par :

$$X' = A \times X$$

c'est à dire :

$$\begin{cases} x'_1 = a_{1,1}x_1 + \dots + a_{1,n}x_n \\ \vdots \\ x'_n = a_{n,1}x_1 + \dots + a_{n,n}x_n \end{cases}$$

**Théorème 2.14**

Soit  $a \in \mathcal{L}(E)$ ,  $x_0 \in E$  et  $t_0 \in \mathbb{R}$ . L'application

$$\begin{array}{ccc} \varphi & : & \mathbb{R} \longrightarrow E \\ t & \longmapsto & e^{(t-t_0)a} \cdot x_0 \end{array}$$

est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$x' = a \cdot x \quad \text{et} \quad x(t_0) = x_0.$$

**Remarque 2.15 :** De même,  $\varphi : t \mapsto e^{(t-t_0)A} X_0$  est l'unique solution du problème de Cauchy :

$$X' = A \times X \quad \text{et} \quad X(t_0) = X_0.$$

## II. C Résolution pratique

On s'intéresse à une équation homogène de la forme :

$$X' = A \times X$$

avec  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ , dont les solutions sont les fonctions  $t \mapsto e^{tA}V$  avec  $V \in \mathbb{K}^n$ .

Pour les calculs explicites, on se limite aux deux cas suivants :  $A$  diagonalisable ou  $\dim(E) \leq 3$ .

### 1) Cas général

#### Méthode 2.16 (par changement de variable)

1. On diagonalise  $D = P^{-1}AP$  ou trigonalise  $T = P^{-1}AP$  avec  $T$  triangulaire supérieure (la plus simple possible).
2. On pose  $Y = P^{-1}X$ , donc  $X$  solution de  $X' = AX$  si et seulement si  $Y$  est solution de  $Y' = DY$  ou  $Y' = TY$  : système triangulaire que l'on résout ligne par ligne en remontant.
3. On obtient les solutions à l'aide de  $X = PY$ .

**Remarque 2.17 :** On n'a pas besoin de calculer  $P^{-1}$ .

#### Méthode 2.18 (par calcul de l'exponentielle)

1. On diagonalise  $D = P^{-1}AP$  ou trigonalise  $T = P^{-1}AP$  avec  $T$  triangulaire supérieure décomposable sous la forme  $T = D + N$  avec  $D$  diagonale et  $N$  nilpotente qui commutent.
2. On calcule  $e^{tA} = Pe^{tT}P^{-1}$ .
3. On en déduit l'ensemble des solutions.

**Exemple 2.19 :**

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

**Exemple 2.20 :**

$$\begin{cases} x' = 4x + y - 3z \\ y' = 2x + y - 2z \\ z' = 4x + y - 3z \end{cases}$$

### 2) Cas où $A$ est diagonalisable

#### Proposition 2.21 (hors programme)

Soit  $A$  une matrice diagonalisable. Soit  $(V_1, \dots, V_n)$  une base de vecteurs propres de  $A$  et  $\lambda_1, \dots, \lambda_n$  les valeurs propres associées. Alors, en notant pour tout  $k \in \llbracket 1; n \rrbracket$  :

$$\begin{aligned} \varphi_k &: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{K}^n \\ t &\longmapsto e^{\lambda_k t} V_k \end{aligned}$$

la famille  $(\varphi_1, \dots, \varphi_n)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$ .

**Remarque 2.22 :** En utilisant ce résultat, on obtient l'ensemble des solutions de  $(\mathcal{S}_0)$  à partir des valeurs propres et des vecteurs propres (c'est à dire de la matrice de passage  $P$ ), mais on n'a pas besoin de calculer l'inverse de cette matrice de passage.

**Exemple 2.23 :**

$$\begin{cases} x' = x + 3y \\ y' = 3x + y \end{cases}$$

### 3) Cas où $A$ est $\mathbb{C}$ diagonalisable

Si  $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$  est  $\mathbb{C}$  diagonalisable, mais pas  $\mathbb{R}$  diagonalisable, alors pour toute valeur propre  $\lambda$  non réelle,  $\bar{\lambda}$  est valeur propre avec la même multiplicité et pour tout  $V$  vecteur propre associé à  $\lambda$ ,  $\bar{V}$  est un vecteur propre associé à  $\bar{\lambda}$ .

De plus si  $\varphi : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}^n$ , alors

$$\text{Vect}(\varphi, \bar{\varphi}) = \text{Vect}(\text{Re } \varphi, \text{Im } \varphi),$$

car  $\varphi = \text{Re } \varphi + i \text{Im } \varphi$ ,  $\bar{\varphi} = \text{Re } \varphi - i \text{Im } \varphi$

et  $\text{Re } \varphi = \frac{\varphi + \bar{\varphi}}{2}$ ,  $\text{Im } \varphi = \frac{\varphi - \bar{\varphi}}{2i}$ .

Donc, à partir d'une base de solutions complexes, on peut obtenir une base de solutions réelles.

**Exemple 2.24 :**

$$\begin{cases} x' = x - y \\ y' = x + y \end{cases}$$

### 4) Cas où $A$ est trigonalisable avec une seule valeur propre

Si  $A$  est trigonalisable et a une unique valeur propre  $\lambda$ , alors  $A = \lambda I_n + N$  avec  $N$  nilpotente. On peut alors facilement calculer  $e^{tA}$ .

**Exemple 2.25 :**

$$\begin{cases} x' = 3x + y - z \\ y' = 2y \\ z' = x + y + z \end{cases}$$

### III Équations scalaires d'ordre $n$

#### Définition 3.1

On appelle **équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  normalisée** une équation de la forme :

$$(\mathcal{E}) : x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t)$$

où  $(a_k)_{k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket}$  est une famille de  $n$  applications continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$  et  $b$  est une application continue de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

Une **solution** de cette équation est une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$ ,  $n$  fois dérivable telle que :

$$\forall t \in I, \quad \varphi^{(n)}(t) + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)\varphi^{(k)}(t) = b(t).$$

L'équation homogène associée à  $(\mathcal{E})$  est :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = 0.$$

**Remarque 3.2 :** Toute solution de  $(\mathcal{E})$  est nécessairement de classe  $\mathcal{C}^n$  sur  $I$ .

On considère  $(\mathcal{E})$  une équation différentielle linéaire scalaire d'ordre  $n$  et les applications  $A : I \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ ,  $B : I \rightarrow \mathbb{K}^n$  définies par

$$A : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & \dots & -a_{n-1}(t) \end{pmatrix} \quad (0) \quad \text{et} \quad B : t \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}$$

**Remarque 3.3 :** Pour tout  $t$ , la matrice  $A(t)$  est la transposée de la matrice compagnon du polynôme  $P = X^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)X^k$ .

#### Proposition 3.4

Une application  $\varphi : I \rightarrow \mathbb{K}$  est solution de l'équation différentielle  $(\mathcal{E})$  si et seulement si l'application  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  est solution du système différentiel :

$$X' = A(t)X + B(t).$$

De plus, toute solution  $\Phi$  de  $X' = A(t)X + B(t)$  est de la forme  $\Phi : t \mapsto \begin{pmatrix} \varphi(t) \\ \vdots \\ \varphi^{(n-1)}(t) \end{pmatrix}$  avec  $\varphi$  solution de  $(\mathcal{E})$ .

#### Théorème 3.5 (Théorème de Cauchy linéaire)

Pour tout  $t_0 \in I$  et tout  $(x_0, \dots, x_{n-1}) \in \mathbb{K}^n$ , il existe une unique solution du **problème de Cauchy linéaire scalaire d'ordre  $n$**  :

$$x^{(n)} + \sum_{k=0}^{n-1} a_k(t)x^{(k)} = b(t) \quad \text{et} \quad \forall k \in \llbracket 0; n-1 \rrbracket, x^{(k)}(t_0) = x_k.$$

#### Proposition 3.6

L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  et pour tout  $t_0 \in I$ , l'application

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_0 &\longrightarrow \mathbb{K}^n \\ \varphi &\longmapsto (\varphi(t_0), \varphi'(t_0), \dots, \varphi^{(n-1)}(t_0)) \end{aligned}$$

est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

#### Proposition 3.7

- L'ensemble  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation différentielle linéaire d'ordre  $n$  normalisée et homogène  $(\mathcal{E}_0)$  est un sous-espace vectoriel de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  de dimension  $n$ .
- L'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de l'équation  $(\mathcal{E})$  est un sous-espace affine de  $\mathcal{C}^n(I, \mathbb{K})$  de direction  $\mathcal{S}_0$ .

**Exemple 3.8 :** Résolution d'une équation différentielle linéaire homogène d'ordre 2 à coefficients constants.

## IV Équations scalaires d'ordre 2

On considère une équation linéaire scalaire normalisée du second ordre :

$$(\mathcal{E}) \quad x'' + a_1(t)x' + a_0(t)x = b(t),$$

où  $a_0, a_1$  et  $b$  sont des fonctions continues de  $I$  dans  $\mathbb{K}$ .

On sait que :

- l'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{E}_0)$  associée à  $(\mathcal{E})$  est de dimension 2 ;
- si  $\varphi_p$  est une solution de  $(\mathcal{E})$ , alors l'ensemble  $\mathcal{S}$  des solutions de  $(\mathcal{E})$  est le sous-espace affine :

$$\mathcal{S} = \varphi_p + \mathcal{S}_0.$$

- d'après le théorème de Cauchy linéaire, pour tout  $t_0 \in I$  et  $(x_0, x_1) \in \mathbb{K}^2$ , le problème de Cauchy :

$$x'' + a_1x'(t) + a_0x(t) = b(t) \text{ et } x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1$$

admet une unique solution.

### IV. A Wronskien

#### Définition 4.1

Soit  $\varphi_1, \varphi_2$  deux solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{E}_0)$ . On appelle **wronskien** du couple de solutions  $(\varphi_1, \varphi_2)$  l'application :

$$W_{\varphi_1, \varphi_2} : I \longrightarrow \mathbb{K} \\ t \longmapsto \det \begin{pmatrix} \varphi_1(t) & \varphi_2(t) \\ \varphi_1'(t) & \varphi_2'(t) \end{pmatrix}.$$

#### Proposition 4.2

Le wronskien d'un couple  $(\varphi_1, \varphi_2) \in \mathcal{S}_0^2$  est solution sur  $I$  de l'équation différentielle linéaire homogène d'ordre 1 :

$$x' + a_1(t)x = 0.$$

**Exemple 4.3 :** pour une équation  $x'' + q(t)x = 0$ , le wronskien d'un couple de solutions est constant.

#### Théorème 4.4

Soit  $\varphi_1$  et  $\varphi_2$  des solutions de  $(\mathcal{E}_0)$  et  $W$  le wronskien du couple  $(\varphi_1, \varphi_2)$ . Les assertions suivantes sont équivalentes :

- $(\varphi_1, \varphi_2)$  est une base de  $\mathcal{S}_0$  ;
- $\exists t \in I \mid W(t) \neq 0$  ;
- $\forall t \in I, W(t) \neq 0$ .

### IV. B Méthodes de résolution d'une équation homogène

#### Méthode 4.5

On cherche des solutions évidentes.

#### Méthode 4.6

Rechercher une solution polynomiale, on commence par raisonner sur le degré.

**Exemple 4.7 :** Déterminer les solutions polynomiales de l'équation :

$$(t^2 + 2t - 1)x'' + (t^2 - 3)x' - (2t + 2)x = 0.$$

#### Méthode 4.8 (solutions développables en séries entières)

1. On considère  $\varphi$  une fonction développable en série entière sur  $] -R ; R[$  avec  $R > 0$  et exprime le membre de gauche de l'équation sous la forme d'un développement en série entière ;
2. L'unicité du développement en série entière permet de traduire (par équivalence) l'équation en une condition sur les coefficients ;
3. On vérifie si les coefficients obtenus correspondent à une série entière de rayon de convergence non nul (c'est la condition que l'on a supposé au départ pour  $\varphi$ ).
4. On peut éventuellement reconnaître un développement en série entière usuel.

**Exemple 4.9 :**

$$x'' + tx' + x = 0$$

#### Méthode 4.10 (on connaît une solution qui ne s'annule pas sur $I$ )

Soit  $f$  une solution de l'équation homogène qui ne s'annule pas sur  $I$ . On cherche une solution sous la forme  $\lambda f$  avec  $\lambda \in \mathcal{C}^2(I)$ .

La fonction  $\lambda f$  est solution de  $\mathcal{E}$  si et seulement si  $\lambda'$  est solution d'une équation d'ordre 1.

**Exemple 4.11 :** Sur  $]0 ; +\infty[$  :

$$x'' + \frac{x'}{t} - \frac{x}{t^2} = 0$$

## IV. C Méthode de variation des constantes

Supposons connue  $(\varphi_1, \varphi_2)$  une base de l'espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions de l'équation homogène  $(\mathcal{E}_0)$ . La méthode de variation des constantes consiste à chercher une solution de  $(\mathcal{E})$  sous la forme :

$$\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2 \text{ avec } \lambda_1, \lambda_2 \text{ dérivables sur } I.$$

$$\text{tels que } \lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 = 0$$

Donc :

$$\varphi'' + a_1 \varphi' + a_0 \varphi = \lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2'.$$

Ainsi,  $\varphi = \lambda_1 \varphi_1 + \lambda_2 \varphi_2$  est solution de  $(\mathcal{E})$  si :

$$\begin{cases} \lambda_1' \varphi_1 + \lambda_2' \varphi_2 = 0 \\ \lambda_1' \varphi_1' + \lambda_2' \varphi_2' = b. \end{cases}$$

Le déterminant de ce système est le wronskien, il ne s'annule pas car  $(\varphi_1, \varphi_2)$  est supposé être une base de  $\mathcal{S}_0$ . Cela permet ainsi de déterminer  $\lambda_1'$  et  $\lambda_2'$ . En primitivant on en déduit **une** solution de  $(\mathcal{E})$ .

**Exemple 4.12 :** résoudre sur  $]0; +\infty[$  :

$$x'' + \frac{1}{t}x' - \frac{1}{t^2}x = 3 - \frac{1}{t^2}.$$

## V Équations non normalisées

Étant donné une équation différentielle linéaire scalaire de la forme :

$$a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = b(t),$$

si la fonction  $a_n$  ne s'annule pas sur l'intervalle  $I$  de résolution, alors en divisant par  $a_n(t)$ , on se ramène à une équation normalisée.

### Méthode 5.1

Pour résoudre une équation différentielle de la forme  $a_n(t)x^{(n)} + \dots + a_0(t)x = b(t)$  lorsque  $a_n$  s'annule sur  $I$  :

- on résout l'équation sur tout sous intervalle de  $I$  où  $a_n$  ne s'annule pas ;
- On effectue un raccordement par analyse-synthèse :
  - prolongement par continuité aux points de raccordement ;
  - vérification de la dérivabilité en ces points ;
  - vérification de l'équation différentielle.

**Attention :** • la dimension du sous-espace  $\mathcal{S}_0$  des solutions n'est pas nécessairement l'ordre de l'équation.

- le problème de Cauchy n'a pas nécessairement une unique solution.

**Exemples 5.2 :** 1.  $tx' - x = 0$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

2.  $tx' - 2x = 0$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

3.  $tx' + 2x = \frac{t^2}{1+t^2}$  sur  $I = \mathbb{R}$ .

4.  $2t^2x'' - 5tx' + 5x = 0$  sur  $\mathbb{R}$

on cherchera des solutions sous la forme  $t \mapsto t^\alpha$  sur  $]0; +\infty[$ .