

$$\forall n \in \mathbb{N}, (n+2)W_{n+2} = (n+1)W_n$$

Problème

Q1. La famille $(\frac{1}{n^2})_{n \in \mathbb{N}^*}$ est sommable d'après le théorème de Riemann. Donc par sommation par paquets (séparation des termes d'indices pairs et impairs) :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{+\infty} &= \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{(2n)^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \\ &= \frac{1}{4} \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

donc : $\frac{3}{4} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$, donc

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie I

Q2. Les fonctions $\sin$ et $t \mapsto t^{n+1}$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, donc leur composée $f : x \mapsto (\sin x)^{n+1}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = (n+1) \cos x (\sin x)^n.$$

Par intégration par parties avec :

$$\begin{cases} f(x) = (\sin x)^{n+1} & g(x) = -\cos x \\ f'(x) = (n+1) \cos x (\sin x)^n & g'(x) = \sin x \end{cases}$$

$$\begin{aligned} W_{n+2} &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^{n+1} \sin x \, dx \\ &= \left[-\cos x (\sin x)^{n+1} \right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}} (n+1) (\sin x)^n \cos^2(x) \, dx \\ &= (n+1) \int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin x)^n (1 - (\sin x)^2) \, dx \\ &= (n+1)(W_n - W_{n+2}) \end{aligned}$$

donc :

Ainsi, $\forall n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} W_{2n+1} &= \frac{2n}{2n+1} \times W_{2n-1} \\ &= \frac{\prod_{k=1}^n (2k)}{\prod_{k=1}^n (2k+1)} \times W_1 \quad (\text{par récurrence}) \end{aligned}$$

Or

$$\prod_{k=1}^n (2k) = 2^n \prod_{k=1}^n k = 2^n n!$$

et

$$(2n+1)! = \left(\prod_{k=1}^n (2k) \right) \times \left(\prod_{k=0}^n (2k+1) \right) = 2^n n! \times \left(\prod_{k=0}^n (2k+1) \right)$$

donc :

$$\prod_{k=0}^n (2k+1) = \frac{(2n+1)!}{2^n n!}$$

de plus :

$$W_1 = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx = 1$$

Donc

$$\forall n \in \mathbb{N}, W_{2n+1} = \frac{2^{2n} (n!)^2}{(2n+1)!}.$$

le résultat étant donné dans l'énoncé, il est aussi rapide de faire la démonstration par récurrence. C'est sans doute ce qui était attendu.

Q3. Par développement en série entière usuel, pour tout $t \in]-1; 1[$,

$$\begin{aligned} (1+t)^{-\frac{1}{2}} &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-\frac{1}{2})(-\frac{1}{2}-1) \dots (-\frac{1}{2}-n+1)}{n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{1 \times 3 \times \dots \times (2n-1)}{2^n n!} t^n \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^n n! \prod_{k=1}^n (2k)} t^n \end{aligned}$$

$$= \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^n$$

et pour tout $x \in]-1; 1[$, $-x^2 \in]-1; 1[$ donc :

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = (1 + (-x^2))^{-\frac{1}{2}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} t^{2n}.$$

D'après le théorème d'intégration terme à terme des séries entières sur leur intervalle ouvert de convergence, $\forall x \in]-1; 1[$

$$\begin{aligned} \operatorname{Arcsin} x &= \operatorname{Arcsin} 0 + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1} \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1} \end{aligned}$$

Donc :

$$\forall x \in]-1; 1[, \operatorname{Arcsin} x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}.$$

Q4. Soit $x \in [0; \frac{\pi}{2}[$, donc $t = \sin x \in [0; 1[\subset]-1; 1[$

donc : $\operatorname{Arcsin} t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} t^{2n+1}.$

De plus $x \in]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$, donc $\operatorname{Arcsin} t = \operatorname{Arcsin} \sin x = x$, donc :

$$\forall x \in [0; \frac{\pi}{2}[, x = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}.$$

Q5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, f_n est une fonction continue et positive sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ et la série $\sum f_n$ converge simplement sur $[0; \frac{\pi}{2}[$ vers la fonction $x \mapsto x$ (qui est continue sur $[0; \frac{\pi}{2}]$).

Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme positif (dans $[0; +\infty]$) :

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right) dx \\ = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx \right) \end{aligned}$$

Q6. D'après la question **Q4**,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} \right) dx \\ = \int_0^{\frac{\pi}{2}} x dx \\ = \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{2} \right)^2 \end{aligned}$$

et d'après la question **Q2**, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} (\sin x)^{2n+1} dx \\ = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2(2n+1)} W_{2n+1} \\ = \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Donc, d'après la question **Q5**,

$$\frac{\pi^2}{8} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Ainsi, d'après la question **Q1**,

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Partie II

Q7. Soit $x \in]-1; 1[$, donc $|x^2| < 1$ et par développable en série entière usuel,

$$\begin{aligned} \frac{1}{x^2 - 1} &= -\frac{1}{1 - x^2} \\ &= -\sum_{n=0}^{+\infty} (x^2)^n \end{aligned}$$

Donc

$$\forall x \in]-1; 1[, \frac{1}{x^2 - 1} = \sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n}.$$

Et

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \ln x \right) dx,$$

or pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f_n : x \mapsto -x^{2n} \ln x$ est une fonction continue et positive sur $]0; 1[$ et la série de fonctions $\sum f_n$ converge simplement sur $]0; 1[$ vers la fonction $x \mapsto \frac{\ln x}{x^2 - 1}$ (qui est continue sur $]0; 1[$). Donc d'après le théorème d'intégration terme à terme positif, dans $[0; +\infty[$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx &= \int_0^1 \left(\sum_{n=0}^{+\infty} -x^{2n} \ln x \right) dx \\ &= \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\int_0^1 -x^{2n} \ln x dx \right) \end{aligned}$$

Or, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par intégration par parties avec

$$\begin{cases} f(x) = \ln x & g(x) = \frac{-x^{2n+1}}{2n+1} \\ f'(x) = \frac{1}{x} & g'(x) = -x^{2n} \end{cases}$$

et $x^{2n+1} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 1} 0$ et par croissances comparées, $x^{2n+1} \ln x \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0$,

$$\begin{aligned} \int_0^1 -x^{2n} \ln x dx &= 0 + \int_0^1 \frac{x^{2n}}{2n+1} dx \\ &= \frac{1}{(2n+1)^2} \end{aligned}$$

Donc

$$\int_0^1 \frac{\ln x}{x^2 - 1} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}.$$

Q8. Soit la fonction

$$\begin{aligned} g : [0; +\infty[^2 &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (x, t) &\longmapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2} \end{aligned}$$

- $\forall t \in [0; +\infty[, g(., t) : x \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$,
- $(\forall x \in [0; +\infty[, g(x, .) : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$,
- **domination** : $\forall x \in [0; +\infty[, \forall t \in [0; +\infty[$,

$$|g(x, t)| \leq \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$$

Or la fonction $\varphi : t \mapsto \frac{\pi}{2} \times \frac{1}{1+t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\varphi(t) \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^2}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^2}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$; donc $\varphi \in L^1([0; +\infty[)$.

Donc, d'après le théorème de continuité des intégrales à paramètres,

La fonction f est bien définie et continue sur l'intervalle $[0; +\infty[$.

Q9. Avec les notations de la question précédente,

- $\forall x \in [0; +\infty[, g(x, .) : t \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est intégrable sur $[0; +\infty[$ d'après la question **Q8**,
- $\forall t \in [0; +\infty[, g(., t) : x \mapsto \frac{\text{Arctan}(xt)}{1+t^2}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$, et pour tout $x \in]0; 1[$, $\frac{\partial g}{\partial x}(x, t) = \frac{1}{1+t^2} \times \frac{t}{1+(xt)^2}$
- $(\forall x \in [0; +\infty[, \frac{\partial g}{\partial x}(x, .) : t \mapsto \frac{1}{1+t^2} \times \frac{t}{1+(xt)^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$,
- **domination** : $\forall a \in]0; 1[, \forall x \in [0; a], \forall t \in [0; +\infty[$,

$$\left| \frac{\partial g}{\partial x}(x, t) \right| \leq \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{1+a^2 t^2}$$

Or la fonction $\psi : t \mapsto \frac{t}{1+t^2} \times \frac{1}{1+a^2 t^2}$ est continue sur $[0; +\infty[$ et $\psi(t) \underset{x \rightarrow +\infty}{\sim} \frac{1}{a^2 t^3} \underset{t \rightarrow +\infty}{=} O\left(\frac{1}{t^3}\right)$ et $t \mapsto \frac{1}{t^3}$ est une fonction de Riemann intégrable en $+\infty$; donc $\varphi \in L^1([0; +\infty[)$.

Donc, d'après le théorème de Leibniz,

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $]0; 1[$ et $\forall x \in]0; 1[, f'(x) = \int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)(1+x^2 t^2)} dt$.

Q10. Pour tout $x \in]0; 1[$ et tout $t \in [0; +\infty[$,

$$\frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} = \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)}$$

Donc, pour tout $x \in]0; 1[$,

$$\begin{aligned} (1-x^2)f'(x) &= \int_0^{+\infty} \frac{(1-x^2)t}{(1+t^2)(1+t^2 x^2)} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{t}{1+t^2} - \frac{x^2 t}{1+t^2 x^2} dt \\ &= \frac{1}{2} [\ln(1+t^2) - \ln(1+t^2 x^2)]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left[\ln\left(\frac{1+t^2}{1+t^2 x^2}\right) \right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \left(\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) - \ln 1 \right) \end{aligned}$$

$$= \ln x$$

Donc

$$\boxed{\forall x \in]0; 1[, f'(x) = \frac{\ln x}{x^2 - 1}.$$

Q11.

$$\begin{aligned} f(1) &= \int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan} t}{1 + t^2} dt \\ &= \int_0^{+\infty} \operatorname{Arctan} t \times \operatorname{Arctan}' t dt \\ &= \frac{1}{2} [(\operatorname{Arctan} t)^2]_0^{+\infty} \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{\pi^2}{4} \end{aligned}$$

Donc :

$$\boxed{f(1) = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus, $f \in \mathcal{C}^1([0; 1])$, donc $\forall x \in]0; 1[$

$$\int_x^1 f'(t) dt = f(1) - f(x)$$

et f est continue en 0, donc

$$\int_0^1 f'(t) dt = f(1) - f(0) = \frac{\pi^2}{8} - \int_0^{+\infty} 0 dt = \frac{\pi^2}{8}.$$

De plus, d'après la question **Q7**,

$$\int_0^1 f'(t) dt = \int_0^1 \frac{\ln t}{t^2 - 1} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}$$

Donc : $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$ et d'après la question **Q1**,

$$\boxed{\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$