

Attention :

- Justifiez tous vos résultats, commentez les applications numériques si cela vous semble pertinent.
- Tout résultat non justifié sera systématiquement considéré comme faux.
- Soignez la présentation : faites de belles figures, encadrez les résultats, aérez votre copie.
- Les résultats non homogènes seront sanctionnés.

FILTRE POUR ACCÉLÉROMÈTRE

On se propose de réaliser un filtre pour accéléromètre. Les accéléromètres sont des composants dont le premier objectif est de mesurer l'accélération. On peut en trouver dans de nombreux appareils tels les téléphones portables ou les manettes de Wii.

Un deuxième objectif sera d'étudier un traitement analogique permettant d'obtenir la vitesse et la position à partir de la mesure du signal fourni par l'accéléromètre.

On donne ci-dessous les formes canoniques d'un certain nombre de filtres du premier et du second ordre. $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ représente la pulsation réduite et ω_0 la pulsation propre.

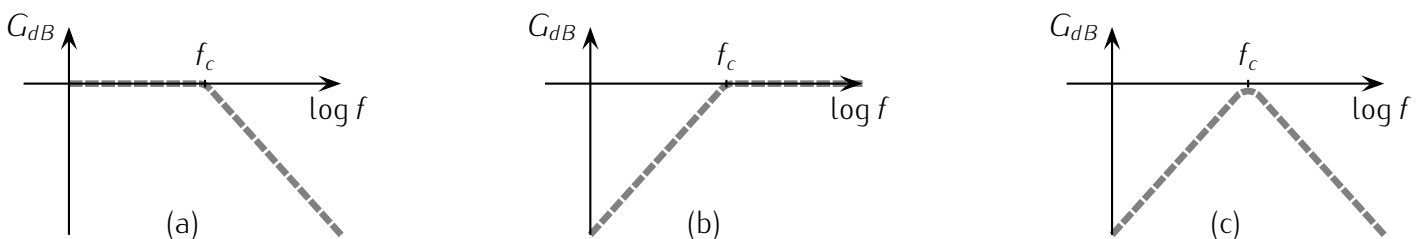
$$\begin{aligned} \underline{H}_1(jx) &= \frac{H_0}{1 + jx} & \underline{H}_2(jx) &= \frac{H_0 jx}{1 + jx} & \underline{H}_3(jx) &= \frac{H_0(1 + (jx)^2)}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \\ \underline{H}_4(jx) &= \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} & \underline{H}_5(jx) &= \frac{H_0 \frac{jx}{Q}}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} & \underline{H}_6(jx) &= \frac{H_0 (jx)^2}{1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2} \end{aligned}$$

1 Suppression de la composante continue

Les composants électroniques ont un comportement qui varie très légèrement avec la température, ce qui fait que la plupart des appareils de mesure ont une légère composante continue ou basse fréquence qui ne reflète pas nécessairement le signal que l'on cherche à étudier (l'accélération ici).

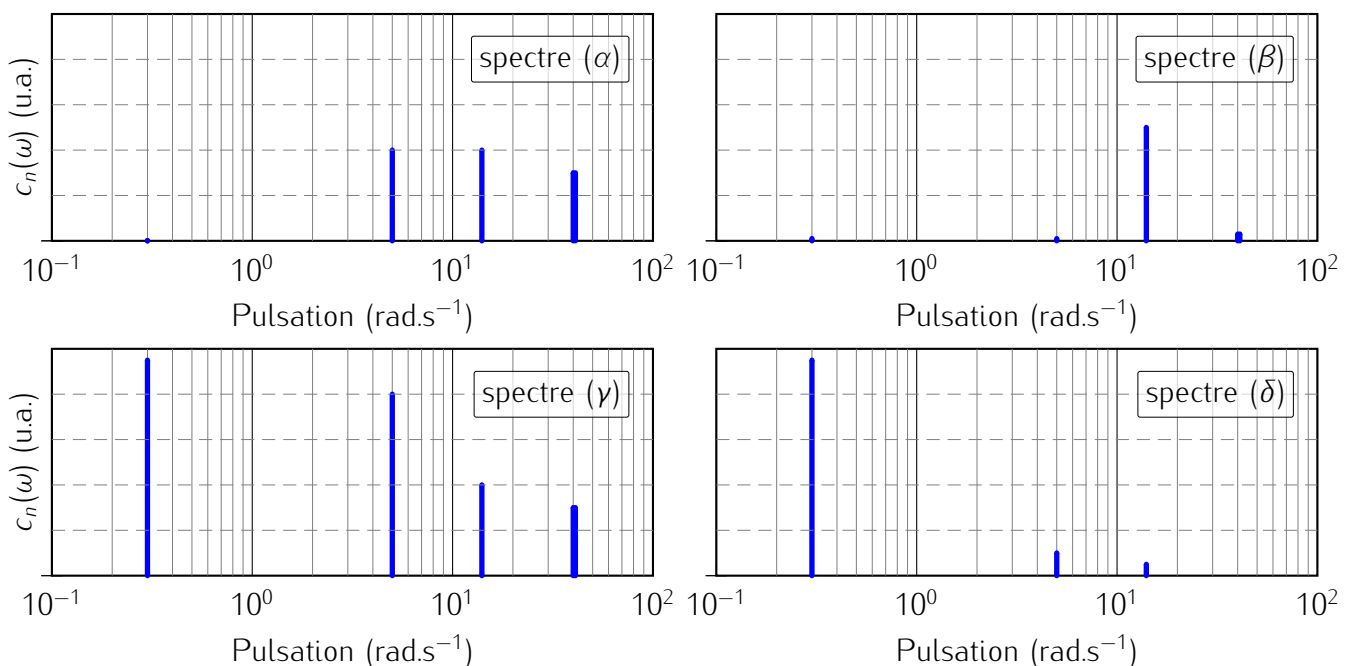
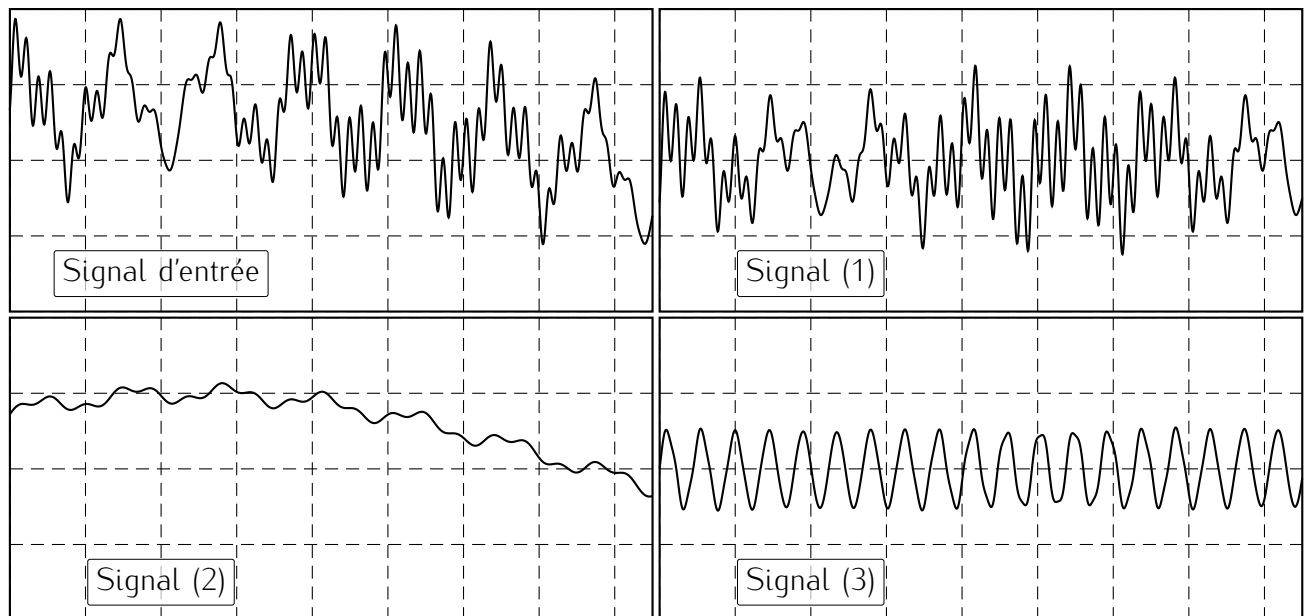
L'échelle de temps typique considérée pour ces variations indésirables est de l'ordre de 50 s au moins, soit des fréquences inférieures à 0,02 Hz.

Pour éliminer ce problème, on traite le signal en le faisant passer par un filtre de fréquence de coupure $f_c = 1$ Hz.



- Q1 1. Parmi les filtres (a), (b) et (c) proposés ci-dessus, lequel correspond le mieux à l'utilisation que l'on veut en faire ? Justifier brièvement.
- Q2 2. On considère le signal représenté ci-dessous à gauche (signal d'entrée) en entrée des filtres ainsi que les trois signaux de sorties obtenus dans le désordre.
- On donne aussi les 4 spectres correspondants à ces signaux (à nouveau dans le désordre).
- Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal (entrée, 1, 2 et 3) correspond quel spectre (α , β , γ et δ). On synthétisera les réponses dans un **tableau**.

Signal	Entrée	(1)	(2)	(3)
Spectre				
Filtre (Question suivante)	—			



- Q3 3. On considère toujours le signal signal d'entrée en entrée des filtres proposés. Indiquer, en expliquant brièvement votre choix, à quel signal de sortie (1, 2 et 3) correspond quel filtre (a, b et c). On ajoutera les réponses sur le **tableau** précédent.
- Q4 4. On reprend le filtre choisi à la première question. Déterminer l'ordre du filtre sachant que l'amplitude du signal à 0,01 Hz est atténuée d'un facteur 100 par rapport à celle d'un signal à 0,1 Hz. On pourra justifier en effectuant une étude asymptotique de la fonction de transfert suivante

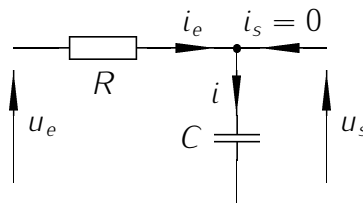
$$\underline{H}_n(j\omega) = \frac{H_0 \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{\omega}{\omega_c} \right)^n} = \frac{H_0 \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}{1 + \left(j \frac{f}{f_c} \right)^n}$$

correspondant à un filtre d'ordre n . On rappelle que pour le filtre choisi, on a $f_c = 1$ Hz.

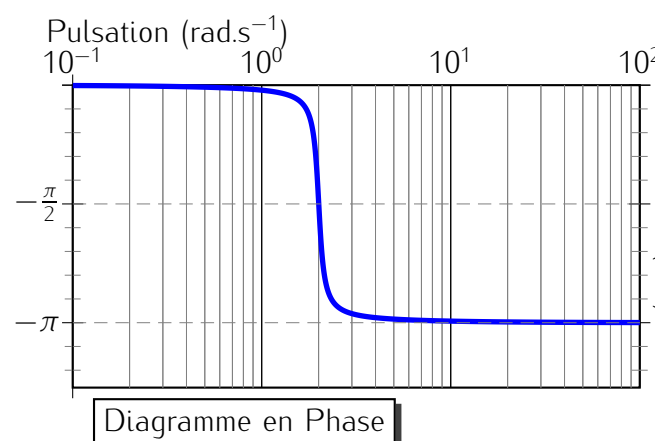
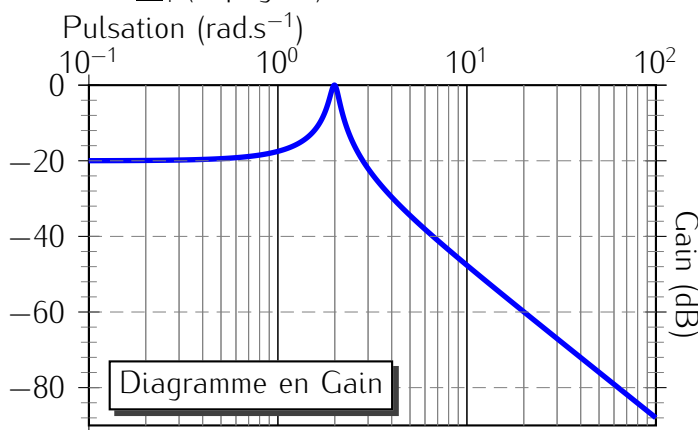
2 Mesure du déplacement effectué

La position $x(t)$ d'un objet est reliée à son accélération $a(t)$ par la relation $a(t) = \ddot{x}(t)$. On peut ainsi remonter à la position de l'objet à partir de l'étude du signal de l'accéléromètre en intégrant deux fois le signal. Dans cette partie, l'objet étudié sera pris initialement au repos en $x = 0$.

- Q5 1. Si le signal que l'on souhaite mesurer est de la forme $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, quelle serait la forme du signal $x(t)$ correspondant ?
- Q6 2. On étudie maintenant le signal mesuré $a_m(t) = \epsilon + a(t)$ où ϵ est une erreur de mesure, constante. Quelle serait la forme $x_m(t)$ du signal que l'on déduirait de cette mesure par intégration ? En déduire qu'il est particulièrement important de supprimer la composante continue d'un signal que l'on souhaite intégrer.
3. On considère un filtre RC ci-dessous.



- (a) Établir sa fonction de transfert en justifiant.
- Q7 On donnera la réponse finale sous forme canonique en posant $\omega_0 = \frac{1}{RC}$.
- Q8 (b) Quelle serait la forme de la fonction de transfert d'un filtre idéal intégrateur ?
- Q9 (c) Pourquoi peut-on qualifier ce filtre de pseudo-intégrateur ?
- Q10 (d) On souhaite expérimentalement fixer $\omega_0 = 10^3$ rad/s. Proposer (en justifiant) des valeurs de R et C « raisonnables ¹ » permettant de réaliser cela.
4. Filtre double intégrateur :
- Q11 (a) Quelle serait la fonction de transfert d'un filtre idéal intégrant deux fois (pour passer de l'accélération à la position) ?
- (b) En déduire un diagramme de Bode en amplitude et en phase (si des constantes apparaissent, vous pouvez choisir des valeurs arbitraires à condition de les préciser).
- Q12 5. On propose un filtre dont le diagramme de Bode est donné ci-dessous et dont la forme canonique est H_4 (cf page 1).



1. c'est-à-dire à l'aide de composants disponibles en TP.

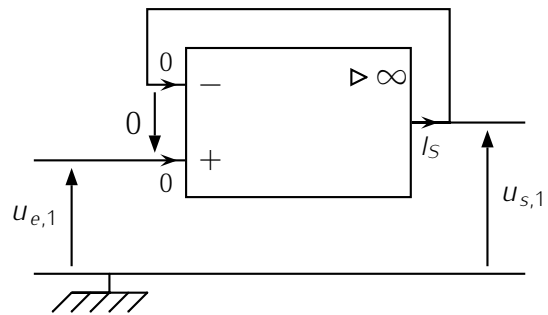
- Q13 (a) Effectuer l'étude asymptotique de la fonction de transfert pour donner l'équation des asymptotes à basse et haute fréquence pour le diagramme en gain. Vérifier explicitement l'accord avec le graphique.
- Q14 (b) Existe-t-il une gamme de fréquence où le filtre proposé a le bon comportement, c'est-à-dire une fonction de double intégrateur ? Si oui, laquelle ?
- Q15 (c) Montrer que les asymptotes se coupent en $\omega = \omega_0$ et en déduire graphiquement la valeur de ω_0 .
- Q16 (d) Déterminer graphiquement la valeur de H_0 .
- Q17 (e) Déterminer graphiquement la valeur du facteur de qualité Q . On pourra se placer en ω_0 .

3 Mise en cascade des filtres

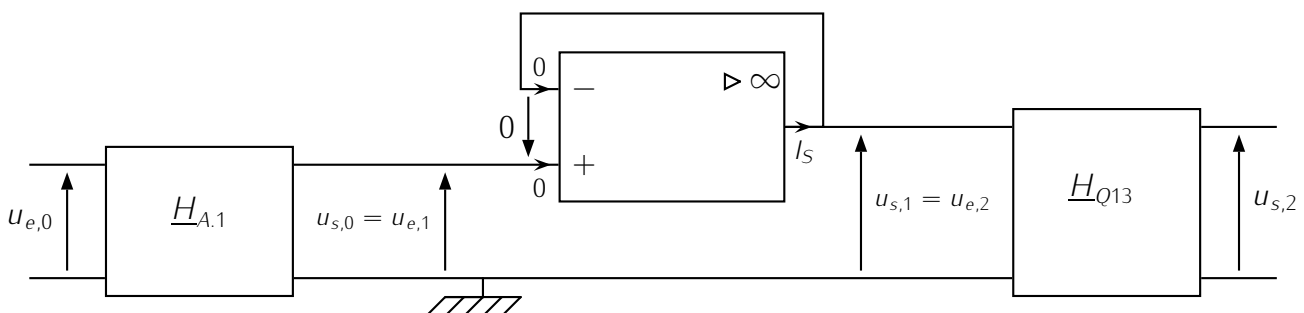
Il est possible de faire cette partie même si les parties précédentes n'ont pas été traitées correctement dans leur totalité.

On considère le montage représenté ci-contre, appelé montage suiveur. Le composant représenté par un rectangle est un amplificateur linéaire intégré (ou amplificateur opérationnel) qui possède les propriétés suivantes :

- les courants I_- et I_+ entrant dans les bornes $-$ et $+$ sont nuls ;
- les potentiels V_- et V_+ des bornes $-$ et $+$ sont égaux, c'est-à-dire que la tension $\varepsilon = V_+ - V_-$ est nulle ;
- le courant de sortie I_S est inconnu et s'adapte pour que les conditions précédentes soient vérifiées.



- Q18 1. Établir la fonction de transfert $\underline{H}_s = \frac{\underline{u}_{s,1}}{\underline{u}_{e,1}}$ de ce montage et vérifier qu'elle est indépendante de la fréquence. On pourra éventuellement raisonner sur les potentiels. Justifier l'appellation de montage suiveur.
- Q19 2. En se rappelant des propriétés sur les courants d'entrée et de sortie de l'amplificateur opérationnel, quel est l'intérêt de ce montage suiveur ?
3. On met maintenant le filtre trouvé à la question (A.1) de fonction de transfert $\underline{H}_{A,1}$, le montage suiveur, et le filtre présenté à la question Q13 de fonction de transfert $\underline{H}_{Q13}$ en cascade tel que présenté ci-dessous.
- Q20 Déterminer alors la fonction de transfert du montage complet : $\underline{H}_{tot} = \frac{\underline{u}_{s,2}}{\underline{u}_{e,0}}$ en fonction de $\underline{H}_{A,1}$ et $\underline{H}_{Q13}$. Justifier votre réponse.



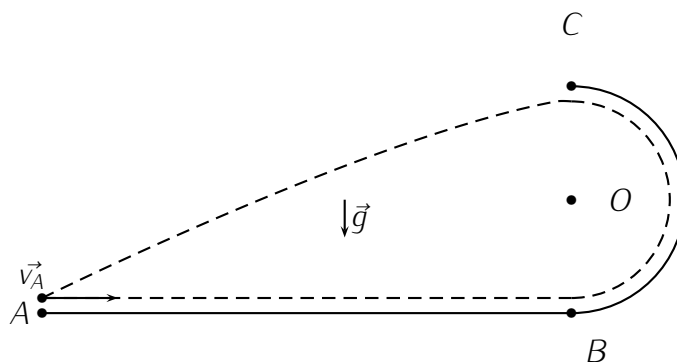
- Q21 4. Les diagrammes de Bode en gain étant connus pour les filtres $H_{A,1}$ et H_{Q13} , comment peut-on en déduire graphiquement le diagramme de Bode en gain du montage complet ?
Compte tenu de vos réponses aux questions précédentes, tracer l'allure de ce diagramme (des points seront accordés si la méthode est correcte, même si les questions précédentes sont fausses).

QUESTIONS EXPÉRIMENTALES

- Q22 1. Vous observez en mode XY les deux signaux $u_e = E \cos(\omega t)$ et $u_s = S \cos(\omega t + \varphi)$. Que voyez-vous à l'écran si $\varphi = 0$? si φ est quelconque ?
- Q23 2. Comment est alimenté un ALI ?
- Q24 3. Souhaitez tracer le diagramme de Bode d'un filtre. Quelles mesures effectuez-vous ? Que calculez-vous ? Comment doivent être répartis les points de mesure ?
- Q25 4. Expliquez comment vous mesurez un déphasage entre deux tensions synchrones. *On s'appuiera sur un schéma, on détaillera les mesures à effectuer et les calculs pour conclure.*

LANCER DE BALLE

Le petit Philippe, qui fait ses premiers pas, montre déjà une précocité évidente pour les sciences. Il se saisit d'une balle, qu'il a reçue en cadeau à Noël, et la lance avec la main au niveau du point A , en direction du point B , avec une vitesse horizontale v_A . À partir du point B , la balle suit le guide circulaire vertical BC de rayon $R = OB = OC$. Le mouvement se fait sans frottement, y compris après le point C lorsque la balle a quitté le guide circulaire et se trouve dans l'air. Il observe que, suivant la vitesse avec laquelle il lance sa balle en direction de B , celle-ci retombe sur l'axe horizontal à gauche de A , ou à droite de A et même quelquefois exactement au point A de départ ! Il cherche les conditions à réunir pour que sa balle retombe à chaque fois en A ce qui lui permettra de rejouer un grand nombre de fois avec sa balle sans avoir à se déplacer sur l'axe Ax pour la récupérer... mais il se doute que les calculs risquent d'être un peu difficiles pour lui. Dans tout le problème, la balle sera assimilée à un point matériel M .



- Q26 1. Le tachymètre LASER qu'il a également reçu pour Noël et qui lui donne la norme V de la vitesse lorsque la balle atteint l'axe Ax (après être passée par les points B et C) donne un résultat qu'il trouve surprenant. Que vaut cette norme V de la vitesse, en fonction des paramètres de l'expérience ? Justifiez.

- Q27 2. Intrigué par ce résultat, il se lance dans le calcul de la norme v_C de la vitesse en C . Que trouve-t-il pour v_C , en fonction de v_A et d'autres paramètres ?
3. Il constate qu'en lançant la balle moins fort depuis le point A , celle-ci arrive en C avec une vitesse plus faible et se demande (question Q1) s'il est possible de lancer la balle en A avec une vitesse telle que la balle arrive en C avec une vitesse nulle. Son prof de physique lui suggère, pour répondre à sa question Q1, de calculer la norme R_N de la réaction $\vec{R}_N$ exercée par le guide circulaire sur la balle, en un point M du guide repéré par $(\vec{OB}, \vec{OM}) = \theta$. Il le guide un peu dans ses calculs...
- Q28 (a) Quelle est, en fonction de v_A , g , R et θ , l'expression du carré de la norme $v(M)$ de la vitesse de la balle en un point M du guide circulaire ?
- Q29 (b) Quelle est, en fonction de m , v_A , g , R et θ , l'expression au point M de R_N ?
- Q30 (c) Philippe vient de trouver la réponse à sa question (Q1), et vous ? Justifiez.
- Q31 (d) Il reprend ses calculs et trouve la vitesse minimale $v_{A,min}$ que doit avoir la vitesse de sa balle en A pour qu'elle atteigne le point C . Que trouve-t-il, en fonction de g et R , pour $v_{A,min}$?
4. Cherchant toujours à déterminer les conditions expérimentales pour que la balle retombe exactement en A lorsqu'elle touche l'axe Ax il calcule pour cela les équations horaires $x(t)$ et $y(t)$ de la balle après qu'elle a quitté le guide en C . Il a pris comme origine du repère le point B pour établir ses deux équations horaires et comme origine des temps l'instant de passage en C .
- Q32 (a) Que trouve-t-il pour ces deux équations horaires ? Il a utilisé les paramètres t , g , R et v_C (vitesse de la balle en C).
- Q33 (b) Quelle est l'équation de la trajectoire de la balle après C ?
- Q34 (c) Quelles sont les composantes v_x et v_y de la vitesse à l'instant t ? Il a utilisé certains des paramètres t , g , R et v_C .
- Q35 (d) Quel est l'angle β fait, à l'instant t , par le vecteur vitesse $\vec{v}$ avec l'axe Ax lorsque la balle touche l'axe Ax ? Il a utilisé certains des paramètres t , g , R et v_C .
- Q36 (e) Si on note T_3 la durée mise par la balle, depuis le point C , pour atteindre l'axe Ax , relier $v_x(T_3)$, $v_y(T_3)$ et v_A .
5. Philippe, qui a également reçu en cadeau un chronomètre LASER pour Noël, décide de s'en servir pour mesurer la durée des trois phases AB puis BC puis CA . Il aimerait comparer les valeurs qu'il obtient avec les prévisions théoriques obtenues par les longs calculs qu'il s'apprête à effectuer.
- Q37 (a) Quelle est, en fonction de $d = AB$, g et R , la durée littérale T_1 de la première phase AB dans le cas où $v_A = 6gR$?
- Q38 (b) Quelle est, en fonction de g et R , la durée littérale T_3 de la troisième phase CA dans le cas où $v_A = 6gR$?
- Q39 (c) Que vaut alors, en fonction de R , l'expression littérale de $d = AB$ qui permettra à la balle de retomber en A ?
- Q40 (d) Exprimer alors, en fonction de g et R , la durée T_1 .
- Q41 (e) Comparer les durées des phases 1 et 2. Commenter.
6. La (douloureuse) seconde phase BC
- Q42 (a) Il a établi, pour la seconde phase, la relation entre $\dot{\theta}^2$, $\cos \theta$, g et R . Qu'a-t-il trouvé ? $\dot{\theta}$ représente la vitesse angulaire du point M repéré par l'angle θ sur le guide circulaire.
- (b) Il sait, depuis la naissance, que
- $$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = 0,762$$
- Q43 et peut donc en déduire, en fonction de g et R , la durée T_2 de la seconde phase. Quelle expression de T_2 a-t-il obtenue ?

- Q44 (c) Il en déduit l'expression littérale, en fonction de g et de R , de la durée totale T du jeu vérifiant $T = T_1 + T_2 + T_3$. Que vaut T littéralement ?
- (d) Application numérique : $R = 1$ m et $g = 10$ m.s⁻². Il peut enfin calculer numériquement T et comparer à la valeur qu'il obtient avec son chronomètre (1,50 s avec une incertitude type de 0.07 s). Est-ce que la modélisation est compatible avec l'expérience de Philippe ? On répondra en calculant un écart-normalisé, ou z-score.
- Q45

Cette remarque est pertinente pour plusieurs questions, je la mets donc au début du problème. Lorsque l'on vous demande une étude asymptotique, il ne suffit pas de regarder les limites, mais il faut étudier les asymptotes et en particulier leur pente. Ainsi $H \rightarrow 0$ ne correspond pas à une étude asymptotique, alors que $H \simeq -60 \log(\omega/\omega_0)$ si $\omega \gg \omega_0$ si. On a plus d'information dans le second cas car on sait « comment » (c'est-à-dire à quelle vitesse) on tend vers 0.

FILTRE POUR ACCÉLÉROMÈTRE

A. Suppression de la composante continue

Q1 1. L'énoncé nous indique que l'on souhaite éliminer la composante continue et les basses fréquences : il nous faut donc utiliser un filtre passe-haut. Il s'agit donc du filtre (b).

2. En terme de spectre, le signal d'entrée est forcément le plus « riche » en harmonique puisqu'un filtre linéaire ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences²

Ainsi le signal d'entrée correspond au spectre (γ).

Le signal (1) ressemble énormément au signal d'entrée, mais sans la variation à basse fréquence (pente légèrement descendante dans le signal d'entrée), ainsi le signal (1) correspond au spectre (α) où les composantes basse fréquence ont été atténuées, en particulier la composante à 0,3 rad/s.

Le signal (3) est quasiment sinusoïdal, il correspond donc au spectre (β) qui ne contient presque qu'un seul sinus.

Le signal (2) par contre ne contient presque qu'une composante basse fréquence (lentes variations auxquelles se superposent des petites oscillations), il correspond donc au spectre (δ) dans lequel la composante basse fréquence domine largement.

Q2 on en déduit la deuxième ligne tableau de correspondance suivant :

Signal	Entrée	(1)	(2)	(3)
Spectre	(γ)	(α)	(δ)	(β)
Filtre	–	(b)	(a)	(c)

3. Puisque le signal (1) correspond au signal d'entrée sans la basse fréquence, alors il correspond à la sortie du filtre (b), qui laisse passer les hautes fréquences et atténue les basses fréquences.

De même, le signal (2) correspond au signal d'entrée où les hautes fréquence ont été atténuées par rapport aux basses, il est donc obtenue en sortie du filtre (a).

Le signal (3) quant à lui est quasiment sinusoïdal : un seul pic a été sélectionné et le filtre est de type passe-bande : c'est le (c).

Q3 Voir plus haut pour le tableau.

4. La fonction de transfert est de la forme
$$\frac{H_0 \left(j \frac{f}{f_c}\right)^n}{1 + \left(j \frac{f}{f_c}\right)^n} \simeq \frac{H_0 \left(j \frac{f}{f_c}\right)^n}{1} \quad \text{si } f \ll f_c$$

On en déduit que le gain est de la forme $G(f) = |H_0| \left(\frac{f}{f_c}\right)^n$. On veut de plus $G(f_1 = 0,01 \text{ Hz}) =$

Q4 $G(f_2 = 0,1 \text{ Hz} = 10f_1)/100 \Leftrightarrow |H_0| \left(\frac{f_1}{f_c}\right)^n = \frac{|H_0|}{100} \left(\frac{10f_1}{f_c}\right)^n \Leftrightarrow 10^n = 100 \Rightarrow \boxed{n = 2}$.

². Attention toutefois, un filtre ne peut pas faire apparaître de nouvelles fréquences mais il peut amplifier des fréquences existantes.

Attention, atténué d'un facteur 100 en une décade ne veut pas du tout dire 100 dB/décade ! Repassez par la définition de G_{dB} pour ne pas dire de bêtises. À cause du logarithme fois vingt, un facteur dix correspond à 20 dB/décade, un facteur cent à 40 dB/décade etc...

B. Mesure du déplacement effectué

- Q5 1. Si le signal que l'on souhaite mesurer est de la forme $a(t) = a_0 \cos(\omega t)$, alors la forme du signal $x(t)$ correspondant est $x(t) = \frac{a_0}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + 0t + 0$, soit un signal sinusoïdal.

Attention à la constante d'intégration : $x(0) = 0$ n'implique pas toujours que la constante d'intégration est nulle. Ici $\cos(0) = 1$ donc il faut une constante d'intégration pour que $x(t=0) = 0$. Ce point n'a pas été pénalisé dans la notation car ce n'était pas le but de la question, mais faites y attention c'est parfois important.

- Q6 2. Si le signal mesuré est $a_m(t) = \epsilon + a(t)$ alors $x_m(t) = \frac{a_0}{\omega^2}(1 - \cos(\omega t)) + \epsilon \frac{t^2}{2}$, ainsi on a l'impression que l'objet se déplace sous l'effet d'une accélération constante. L'erreur commise augmente rapidement au cours du temps.

Il est donc important de supprimer le bruit basse fréquence (ici ϵ) avant d'intégrer, ce qui peut-être problématique si le signal recherché est lui aussi basse-fréquence.

3. (a) En utilisant un pont diviseur de tension car $i_s = 0$, on en déduit $\frac{u_s}{u_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} =$

Q7 $\frac{1}{1 + jx}$ où $x = \frac{\omega}{\omega_0} = RC\omega \Rightarrow \omega_0 = \frac{1}{RC}$.

N'oubliez pas de lire toute la question : il était demandé de mettre sous forme canonique, et donc d'en déduire ω_0 (qui vous servira pour la suite d'ailleurs).

- Q8 (b) Un filtre idéal intégrateur aurait une fonction de transfert de la forme $A/j\omega$ avec A une constante positive ou négative ($1/j\omega$ ne serait pas homogène puisque u_s/u_e est sans dimension.).

- Q9 (c) Ce filtre peut-être qualifié de pseudo-intégrateur car sa fonction de transfert en haute fréquence est équivalente à celle d'un filtre intégrateur : si $x \gg 1$ alors $\frac{1}{1+jx} \simeq \frac{1}{jx} = \frac{\omega_0}{j\omega}$. Par contre, ce n'est pas un vrai intégrateur car ce comportement n'est pas valable à basses fréquences.

Faites l'équivalent et ne vous contentez pas de dire « cela a presque la même forme ». Vous avez vu en TP et en TP d'informatique que cela ne marche avec des filtres réels que dans une certaine gamme de fréquence. C'est ce que l'on retrouve ici.

- (d) On souhaite expérimentalement fixer $\omega_0 = 10^3$ rad/s, soit $RC = 10^{-3}$ s

Les composants accessibles en TP varient essentiellement dans la gamme $R \in [1 \Omega, 1 \text{ M}\Omega]$ (mais il vaut mieux se limiter à $R \in [100 \Omega, 100 \text{ k}\Omega]$ pour limiter les problèmes liés aux impédances d'entrée de l'oscilloscope et de sortie du générateur) et $C \in [0,1 \text{ nF}, 10 \mu\text{F}]$.

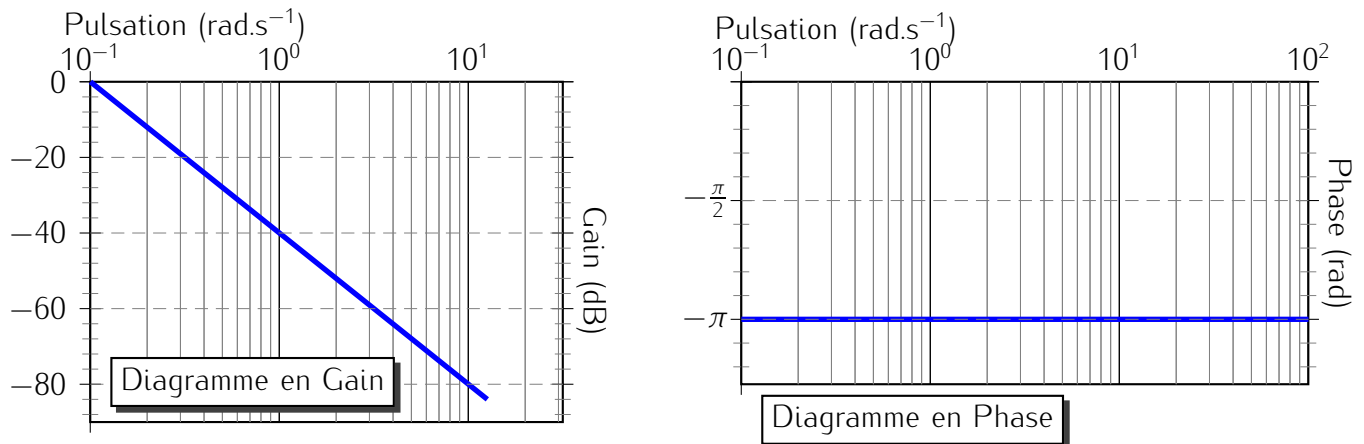
- Q10 Les valeurs $R = 10 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,1 \mu\text{F}$ peuvent donc correspondre à ce "cachier des charges".

Si vous prenez des valeurs "fantaisistes" telles 0,01 Ω ou 0,1 F, vous donnez l'impression de ne jamais avoir fait de TP de physique.

4. Filtre double intégrateur :

- Q11 (a) Pour un filtre idéal intégrant deux fois il faut donc avoir une fonction de transfert qui divise par $(j\omega)^2$ soit une fonction de transfert de la forme $\frac{A}{(j\omega)^2}$.
- Q12 (b) $G_{dB} = 20 \log(A) - 40 \log(\omega)$, d'où une pente de -40 dB/décade pour le diagramme en gain.
 $\varphi = 0$ ou $\pm\pi$ selon si A est négatif (0) ou positif ($\pm\pi$).

D'où les diagrammes suivant en choisissant $A = 0,1 \text{ (rad/s)}^2$:



Tracez les diagramme correspondant réellement à votre fonction de transfert : il n'y a ici aucune asymptote horizontale sur le diagramme en gain, et aucune variation de la phase.

5. (a) $G = |H_4(jx)| = \frac{H_0}{1 + \frac{x^2}{Q^2} + (jx)^2} = \frac{H_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$. (H_0 positif vu que la phase est 0 en basse fréquence)

Q13 Étude asymptotique :

- pour $x \ll 1$: $G \simeq H_0$ d'où $G_{dB} = 20 \log H_0$. On a donc une constante, représentée par une droite horizontale, ce qui correspond au diagramme pour $\omega < 4$ rad/s environ.
- pour $x \gg 1$: $G \simeq H_0/x^2$ d'où $G_{dB} = 20 \log H_0 - 40 \log x$. On a donc une droite de pente -40 dB/décade, ce est cohérent avec le graphique vu qu'entre $\omega = 10^1$ rad/s et 10^2 rad/s on passe de -48 à -88 dB environ. On peut aussi regarder que l'on passe de -40 à -80 dB entre 6,5 et 65 rad/s ce qui donne bien aussi une pente de -40 dB/décade.

Montrez que vous avez fait les mesures sur le graphique pour vérifier l'accord pour la pente en indiquant les points considérés lors de votre mesure. Simplement dire « cela correspond » ne suffit pas puisqu'il était demandé de vérifier explicitement.

- Q14 (b) Pour $\omega > 4$ rad/s, la courbe en gain a bien -40 dB/décade et correspond donc au comportement nécessaire pour un intégrateur. De même la courbe en phase donne une phase de $-\pi$ ce qui est cohérent avec le comportement double-intégrateur. Ainsi le comportement est le bon pour les pulsations suffisamment élevées, ce qui correspond aux fréquences suffisamment élevées vu que $f = \frac{\omega}{2\pi}$. Donc pour $f \in [0,7 \text{ Hz}, +\infty[$ environ, le comportement du filtre est celui d'un double intégrateur.

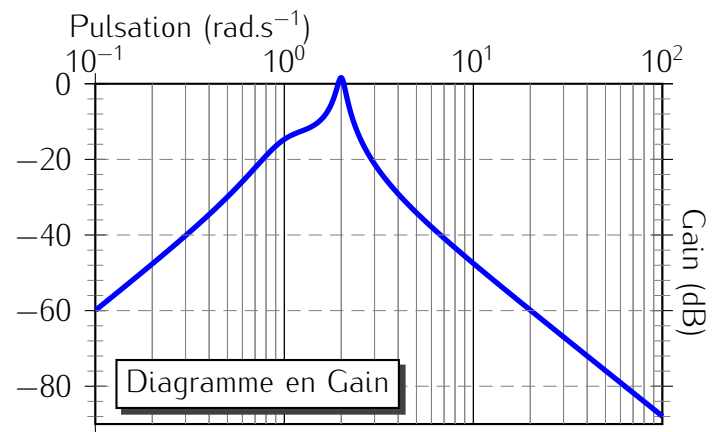
N'oubliez pas de vérifier la phase aussi.

- Q15 (c) Pour cette question, tout le travail a été fait lors de l'étude asymptotique : la première asymptote a pour équation $G_{dB,1} = 20 \log H_0$ et la deuxième $G_{dB,2} = 20 \log H_0 - 40 \log x$. Il y a donc intersection lorsque $G_{dB,1} = G_{dB,2}$ soit $20 \log H_0 = 20 \log H_0 - 40 \log x \Rightarrow x = 1$. On a donc bien intersection des asymptotes en $\boxed{\omega = \omega_0}$. Graphiquement, on lit $\boxed{\omega_0 = 2 \text{ rad/s}}$.
- Q16 (d) Pour trouver H_0 , on utilise le comportement basse fréquence : $20 \log H_0 = -20$ d'où $\boxed{H_0 = 0,1}$ (le signe s'obtient à partir de la phase, nulle, il s'agit donc d'un réel positif).
- Q17 (e) En en $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = \frac{H_0}{1-j\frac{1}{Q}} = QH_0 \Rightarrow G = 20 \log H_0 + 20 \log Q$. Par lecture graphique $G_{dB}(\omega = \omega_0) = 0 \Rightarrow G = H_0 Q = 1$ d'où $\boxed{Q = 10}$.

C. Mise en cascade des filtres

Cette partie fait intervenir un composant que vous ne connaissiez pas. Toutefois vous êtes censés savoir vous débrouiller à partir du moment où l'on vous donne les « règles » de fonctionnement comme cela était fait ici. Ce composant est assez fréquent dans les filtres.

- Q18 1. Le plus simple est selon moi de raisonner sur les potentiels : tout les points reliés par un fil sont au même potentiel électrique. La tension d'entrée vaut $u_{e,1} = V_+ - 0$, la tension de sortie vaut $u_{s,1} = V_- - 0$, or d'après l'énoncé $V_+ = V_-$, d'où $u_{s,1} = u_{e,1}$ et donc $\boxed{H_s = 1}$. La réponse est donc bien indépendante de la fréquence puisqu' ω n'apparaît pas dans l'expression.
Le montage s'appelle donc suiveur car la tension en sortie est exactement la même que celle en entrée.
- Q19 2. Ce montage est au premier abord surprenant puisqu'il a à première vue le même comportement qu'un simple fil entre l'entrée et la sortie. Toutefois son intérêt réside dans l'isolation entre la source et la charge. En effet, le courant d'entrée est nul, ainsi le montage précédent le suiveur ne délivre jamais de courant et sa fonction de transfert est donc la même qu'en sortie ouverte. De même l'amplificateur adapte son courant (dans la limite de ses capacités) pour maintenir la bonne tension de sortie : il se comporte donc comme un montage d'impédance de sortie nulle (la tension ne varie pas en fonction du courant) : il s'agit donc d'un montage qui permet d'isoler les filtres. Si les impédances d'entrée ne sont pas très grandes devant les impédances de sorties, on peut rajouter un suiveur qui permet de réaliser cette condition qui permet de faciliter l'étude du montage complet.
- Q20 3. Puisque le suiveur a une impédance d'entrée infinie et une impédance de sortie nulle, on peut simplement faire le produit des fonctions de transfert, ce qui n'aurait a priori pas été le cas si on avait mis directement $\underline{H}_{A,1}$ et $\underline{H}_{B,5}$ en cascade.
La fonction de transfert $\underline{H}_{tot}$ vaut donc $\underline{H}_{tot} = \frac{u_{s,2}}{u_{e,0}} = \frac{u_{s,2}}{u_{e,2}} \frac{u_{s,1}}{u_{e,1}} \frac{u_{s,0}}{u_{e,0}} \Rightarrow \boxed{\underline{H}_{tot} = \underline{H}_{A,1} \times 1 \times \underline{H}_{B,5}}$.
- Q21 4. Nous avons vu à la question précédente que $\underline{H}_{tot} \underline{H}_{A,1} \times 1 \times \underline{H}_{B,5} \Rightarrow G_{dB,tot} = G_{dB,A,1} + 0 + G_{dB,B,5}$: d'après les propriétés du logarithme. Il suffit donc de sommer les fonction de transfert. On obtient l'allure du diagramme ci-dessous :



QUESTIONS EXPÉRIMENTALES

- Q22 1. On observe une ellipse si φ est quelconque et un segment de droite si $\varphi = 0$.
- Q23 2. Un ALI est alimenté par une alimentation continue symétrique $+15V$ et $-15V$.
- Q24 3. On mesure les amplitudes crête-à-crête des signaux d'entrée et de sortie ainsi que leur décalage temporel. On calcule ensuite le gain, puis le gain en décibel, ainsi que le déphasage. On répartit les points de mesure de façon à avoir 3 ou 4 mesures par décade bien répartis en échelle logarithmique (100 Hz, 200 Hz, 300 Hz, 500 Hz, puis 1000 Hz)
- Q25 4. $\varphi = -\frac{\Delta t}{T}$

LANCER DE BALLE

- Q26 1. On étudie la balle assimilée à un point matériel dans le référentiel local galiléen. Elle est soumise à son poids et à l'action du support. Le poids est une force conservative et l'action du support ne travaille pas, ainsi l'évolution est conservative. D'après le théorème de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = E_c(\text{final}) - E_c(\text{initial}) = W_{A \rightarrow A}(\vec{P}) = 0$$

donc $V = v_A$.

- Q27 2. On applique à nouveau le théorème de l'énergie cinétique, entre A et C.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2mgR$$

, soit $v_C = \sqrt{v_A^2 - 4mgR}$.

- Q28 3. (a) Encore une fois, on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M repéré par l'angle θ .

$$\Delta E_c = -mgR(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2$$

. Soit, $v_M^2 = v_A^2 - 2gR(1 - \cos \theta)$.

- Q29 (b) Cette fois-ci, on applique la seconde loi de Newton lorsque la balle est dans la partie circulaire.

$$\vec{P} + \vec{R}_N = m\vec{a}$$

. Soit, en projection sur $\vec{e}_r$:

$$-R_N + mg \cos \theta = -m \frac{v_M^2}{R}$$

. Ainsi :

$$R_N = m \left(3g \cos \theta - 2g + \frac{v_A^2}{R} \right)$$

Q30 (c) Si la balle arrivait en C avec une vitesse nulle, on aurait $v_A = 2\sqrt{gR}$ et donc $R_N = mg(2 + 3 \cos(\theta))$. Au point C , $\theta = \pi$ e donc $R_N = -mg$! Ce n'est pas possible, R_N ne peut pas être négative. Il existe donc un angle θ pour lequel R_N s'annule et la bille qui le rail.

Q31 (d) La vitesse minimale en A pour atteindre le point C est celle qui annule R_N en C et pas avant. Soit :

$$R_N(\pi) = m \left(-3g + 2g + \frac{v_{A,min}^2}{R} \right) = 0$$

ce qui donne $v_{A,min} = \sqrt{5gR}$.

Q32 4. (a) À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage en A on aura, avec une origine du repère en B :

$$y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$$

$$x(t) = -v_C t$$

Il s'agit d'une simple chute libre, on peut se permettre d'aller rapidement et de donner directement la réponse.

Q33 (b) On exprime t en fonction de x et on substitue dans y pour trouver

$$y(x) = -\frac{g}{2v_C^2}x^2 + 2R$$

(c)

$$v_x = -v_C$$

Q34 et $v_y = -gt$

Q35 (d) On a $\tan \beta = \frac{v_y}{-v_C} = \frac{gt}{v_C}$.

Q36 (e) L'énergie mécanique de la balle se conserve, et comme l'énergie potentielle en A est la même lorsque Philippe lance la balle que lorsqu'elle retombe, alors $E_C(A, \text{début}) = E_C(A, \text{fin})$ soit $v_A^2 = v_x(T_3)^2 + v_y(T_3)^2$.

Q37 5. (a) La balle possède un mouvement rectiligne uniforme entre A et B donc $x(t) = v_A t$, la bille arrive en B à la date T_1 telle que $x(T_1) = d$, soit

$$T_1 = \frac{d}{6\sqrt{gR}}$$

Q38 (b) La balle atteint le point C avec une vitesse v_C vérifiant $\frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -2mgR$ donc $v_C = 4\sqrt{2}\sqrt{gR}$. À partir du point C et jusqu'à l'atterrissage $y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + 2R$, la balle touche donc le sol à l'instant T_3 tel que $y(T_3) = 0$ soit $T_3 = 2\sqrt{\frac{R}{g}}$.

(c) L'équation horaire en $x(t)$ permet de trouver d :

$$x(T_3) = -d = -v_C T_3$$

donc

$$d = 8\sqrt{2}R$$

Q39

(d) On peut donc trouver une nouvelle expression pour T_1 :

$$T_1 = \frac{4}{3}\sqrt{2}\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Q40

On trouve donc $T_3 > T_1$, ce résultat est prévisible car la balle parcourt la même distance en x dans les deux cas, mais avec $v_C < v_A$.

6. La (douloureuse) seconde phase BC

Q41

(a) Pour changer... on applique le théorème de l'énergie cinétique entre A et un point M sur le guide circulaire.

$$\frac{1}{2}mv_M^2 - \frac{1}{2}mv_A^2 = -mg(1 - \cos \theta) = \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \frac{1}{2}m36gR$$

soit

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(17 + \cos \theta)$$

Q42

(b) On sépare les variables :

$$\frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} dt$$

On cherche le temps T_2 pour aller de B en C , θ doit donc varier entre 0 et π . On intègre terme à terme :

$$\int_0^\pi \frac{d\theta}{\sqrt{17 + \cos \theta}} = \sqrt{\frac{2g}{R}} T_2$$

$$, \text{ ainsi } T_2 = 0,54\sqrt{\frac{R}{g}}$$

Q43

(c) Finalement $T = T_1 + T_2 + T_3 = \sqrt{\frac{R}{g}} \left(\frac{4}{3}\sqrt{2} + 0,54 + 2 \right) = 4,42\sqrt{\frac{R}{g}}$.

Q44

(d) L'application numérique donne $T = 1,40\text{s}$. L'écart normalisé avec la mesure donne

$$EN = \frac{|T - T_{mes}|}{u(T)} = \frac{0,1}{0,07} = 1,4 < 3$$

on peut considérer que la modélisation est conforme à l'expérience.