

Correction du devoir surveillé n ° 7

I Gravitomagnétisme : théorie et application**I Une théorie du gravitomagnétisme**

I.1. Pour une charge ponctuelle q placée en O ,

$$\vec{E}(M) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r, \quad r = OM.$$

Par analogie, pour une masse ponctuelle m en O ,

$$\vec{g}(M) = -\frac{Gm}{r^2} \vec{u}_r$$

(le signe $-$ traduit le caractère attractif de l'interaction gravitationnelle).

I.2. En électrostatique,

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho_e}{\epsilon_0}.$$

Par analogie, le champ gravitationnel vérifie

$$\operatorname{div} \vec{g} = \frac{\rho}{\epsilon_g}$$

avec ρ la masse volumique. Pour identifier ϵ_g , on compare au théorème de Gauss gravitationnel. Pour une sphère de rayon r centrée sur une masse m ,

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -4\pi Gm.$$

Or, en intégrant l'équation locale,

$$\oiint \vec{g} \cdot d\vec{S} = -\frac{1}{\epsilon_g} \iiint \rho \, d\tau = -\frac{m}{\epsilon_g}.$$

Donc

$$\epsilon_g = -\frac{1}{4\pi G}.$$

I.3. L'équation

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{g} = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}$$

montre que

$$\dim(\overrightarrow{\operatorname{rot}} \vec{g}) = \frac{\dim(g)}{L} = \frac{LT^{-2}}{L} = T^{-2}.$$

Donc

$$\dim \left(\frac{\partial \vec{h}}{\partial t} \right) = T^{-2} \implies \dim (\vec{h}) = T^{-1}.$$

Ainsi

$$\boxed{\dim (\vec{h}) = T^{-1}.}$$

I.4. On prend la divergence de l'équation d'Ampère gravitationnelle :

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{h}) = 0 = \mu_g \left(\operatorname{div} \vec{j} + \varepsilon_g \frac{\partial \operatorname{div} \vec{g}}{\partial t} \right).$$

Comme $\operatorname{div} \vec{g} = \rho / \varepsilon_g$,

$$\operatorname{div} \vec{j} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

I.5. Dans le vide, $\rho = 0$ et $\vec{j} = 0$, donc

$$\operatorname{div}(\vec{g}) = 0, \quad \operatorname{rot}(\vec{g}) = -\frac{\partial \vec{h}}{\partial t}, \quad \operatorname{rot}(\vec{h}) = \mu_g \varepsilon_g \frac{\partial \vec{g}}{\partial t}.$$

On prend le rotationnel de l'équation de Faraday :

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot}(\vec{g})) = -\frac{\partial \operatorname{rot}(\vec{h})}{\partial t}.$$

Avec l'identité $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$ et $\operatorname{div} \vec{g} = 0$,

$$-\Delta \vec{g} = -\mu_g \varepsilon_g \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\Delta \vec{g} - \mu_g \varepsilon_g \frac{\partial^2 \vec{g}}{\partial t^2} = 0}$$

(et de même pour \vec{h}). La célérité vaut donc

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\mu_g \varepsilon_g}}.}$$

Comme $\varepsilon_g = -1/(4\pi G)$,

$$\boxed{\mu_g = \frac{1}{\varepsilon_g c^2} = -\frac{4\pi G}{c^2}.}$$

I.6. Pour une masse m plongée dans un champ gravitationnel seul,

$$\vec{F}_g = m \vec{g}.$$

Par analogie avec la force de Lorentz $q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$, on propose

$$\boxed{\vec{F} = m \left(\vec{g} + \vec{v} \wedge \vec{h} \right).}$$

I.7. On considère un fil de masse linéique λ , porté par l'axe Oz , immobile.

Symétries et invariances :

- invariance par translation suivant Oz ;
- invariance par rotation autour de Oz ;
- symétrie par tout plan contenant l'axe.

Le champ est donc radial, indépendant de z et de θ :

$$\vec{g}(r) = g(r) \vec{u}_r.$$

On applique Gauss sur un cylindre de rayon r et de longueur L :

$$\Phi = g(r) (2\pi r L) = \frac{\lambda L}{\varepsilon_g}.$$

D'où

$$\vec{g}(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_g r} \vec{u}_r = -\frac{2G\lambda}{r} \vec{u}_r.$$

I.8. Le champ créé par le premier fil au niveau du second, distant de d , vaut

$$\vec{g}_1 = -\frac{2G\lambda}{d} \vec{u}_r.$$

La force par unité de longueur exercée sur le second fil est donc

$$\lambda \vec{g}_1 = -\frac{2G\lambda^2}{d} \vec{u}_r.$$

Elle est **attractive**.

I.9. Le fil se déplace à vitesse constante $\vec{v} = v \vec{u}_z$, parallèlement à lui-même. Par analogie avec le champ magnétique d'un fil rectiligne infini,

$$\vec{h}(r) = h(r) \vec{u}_\theta.$$

Sur un cercle de rayon r centré sur l'axe, orienté dans le sens des θ croissants

$$\oint \vec{h} \cdot d\vec{l} = h(r) 2\pi r = \mu_g I_g = \mu_g \lambda v.$$

Donc

$$\vec{h}(r) = \frac{\mu_g \lambda v}{2\pi r} \vec{u}_\theta = -\frac{2G\lambda v}{c^2 r} \vec{u}_\theta.$$

I.10. Pour le second fil (de vitesse $\vec{v} = v \vec{u}_z$), la force linéique gravitomagnétique vaut

$$\frac{\vec{F}_h}{L} = \lambda \vec{v} \wedge \vec{h}_1.$$

Comme $\vec{u}_z \wedge -\vec{u}_\theta = \vec{u}_r$, cette force fuit l'autre fil : elle est donc **répulsive**. En norme,

$$\frac{F_h}{L} = \lambda v h_1(d) = \lambda v \frac{\mu_g \lambda v}{2\pi d} = \frac{2G\lambda^2 v^2}{d c^2}.$$

Ainsi

$$\boxed{\frac{F_h/L}{F_g/L} = \frac{v^2}{c^2}}.$$

Les effets gravitomagnétiques sont donc négligeables aux vitesses ordinaires ($v \ll c$).

Si l'on inverse le sens de déplacement d'un des fils, $\vec{v} \mapsto -\vec{v}$, alors \vec{F}_h change de signe : la force gravitomagnétique devient **attractive**.

I.11. Pour une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I ,

$$\boxed{\vec{M} = I \pi R^2 \vec{n}}$$

où \vec{n} est la normale orientée par la règle de la main droite.

I.12. Considérons une spire de masse totale m et de rayon R tournant à pulsation angulaire ω autour de son axe. Toute la masse effectue une révolution en période $T = 2\pi/\omega$, donc le courant de masse vaut

$$I_m = \frac{m}{T} = \frac{m\omega}{2\pi}.$$

Par analogie,

$$\vec{M}_g = I_m \pi R^2 \vec{n} = \frac{m\omega R^2}{2} \vec{n}.$$

Or le moment cinétique d'une couronne circulaire vaut

$$\vec{\sigma} = mR^2\omega \vec{n}.$$

Donc

$$\boxed{\vec{M}_g = \frac{1}{2} \vec{\sigma}}.$$

La constante de proportionnalité générale est donc

$$\boxed{\vec{M}_g = \gamma_g \vec{\sigma}, \quad \gamma_g = \frac{1}{2}}.$$

I.13. Pour un dipôle magnétique dans un champ magnétique uniforme,

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B}.$$

Par analogie,

$$\vec{\Gamma} = \vec{M}_g \wedge \vec{h} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \wedge \vec{h}.$$

Or la dynamique du solide impose

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Gamma} = \frac{1}{2} \vec{\sigma} \wedge \vec{h}.$$

On peut aussi écrire

$$\frac{d\vec{\sigma}}{dt} = \vec{\Omega}_p \wedge \vec{\sigma} \quad \text{avec} \quad \boxed{\vec{\Omega}_p = -\frac{1}{2} \vec{h}}.$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ précesse autour de la direction de \vec{h} , à norme constante et à angle constant avec \vec{h} .

II Effet gravitomagnétique sur un satellite dû à sa révolution

II.1. Pour un satellite à altitude a , le rayon orbital vaut

$$R = R_{\oplus} + a.$$

L'équilibre radial donne

$$\frac{mv^2}{R} = \frac{GM_{\oplus}m}{R^2} \implies v = \sqrt{\frac{GM_{\oplus}}{R_{\oplus} + a}}.$$

Comme $g = GM_{\oplus}/R_{\oplus}^2$,

$$v = \sqrt{\frac{gR_{\oplus}^2}{R_{\oplus} + a}}.$$

À basse altitude $a \ll R_{\oplus}$,

$$v \simeq \sqrt{gR_{\oplus}}.$$

Numériquement,

$$\sqrt{gR_{\oplus}} \simeq \sqrt{9.8 \times 6.4 \times 10^6} \simeq 7,9.10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}.$$

La période vaut alors

$$T = \frac{2\pi R_{\oplus}}{v} \simeq 5,1.10^3 \text{ s} \simeq 85 \text{ min.}$$

II.2. Pour une spire circulaire de rayon R parcourue par un courant I ,

$$\vec{B}(O) = \frac{\mu_0 I}{2R} \vec{n}$$

avec \vec{n} la normale donnée par la règle de la main droite.

II.3. Dans le référentiel barycentrique du satellite, la Terre (supposée ponctuelle) tourne autour du satellite comme une masse M_{\oplus} parcourant une orbite circulaire de rayon $R = vT/(2\pi)$ et de période T . Le courant de masse équivalent vaut

$$I_m = \frac{M_{\oplus}}{T}.$$

Par analogie avec la spire circulaire,

$$\vec{h} = \frac{\mu_g I_m}{2R} \vec{e}_z.$$

Or $R = vT/(2\pi)$, donc

$$h = \frac{\mu_g M_{\oplus}}{2RT} = \frac{\mu_g M_{\oplus} \pi}{vT^2}.$$

En utilisant $\mu_g = -4\pi G/c^2$ puis $GM_{\oplus} = v^2 R = v^3 T/(2\pi)$,

$$\vec{h} = -\frac{2\pi GM_{\oplus}}{c^2 RT} \vec{e}_z = -\frac{v^3}{c^2 R} \vec{e}_z = -\frac{2\pi v^2}{c^2 T} \vec{e}_z.$$

II.4. D'après I.13,

$$\omega_1 = \frac{h}{2}.$$

Ainsi

$$\omega_1 = \frac{\pi v^2}{c^2 T}.$$

Le vecteur $\vec{\sigma}$ précesse autour de la normale au plan orbital à la vitesse angulaire ω_1 .

II.5. L'angle tourné en une année vaut

$$\Delta\theta = \omega_1 \times (1 \text{ an}).$$

À basse altitude, avec $v \simeq 7,9 \cdot 10^3 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$, $T \simeq 5,1 \cdot 10^3 \text{ s}$,

$$\omega_1 \simeq 4,3 \cdot 10^{-13} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Donc sur un an ($3,2 \cdot 10^7 \text{ s}$),

$$\Delta\theta \simeq 1,4 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{an}^{-1}.$$

Cette valeur est du même ordre de grandeur que la mesure annoncée pour *Gravity Probe B*,

$$3,2 \cdot 10^{-5} \text{ rad}\cdot\text{an}^{-1},$$

mais inférieure d'un facteur voisin de 2. C'est cohérent avec le fait que le modèle gravito-magnétique newtonien par analogie ne restitue que l'ordre de grandeur, et non la valeur exacte donnée par la relativité générale.

II Modélisation d'un faisceau laser

I Modèle de l'onde plane

I.1. En l'absence de charges et de courants,

$$\text{div } \vec{E} = 0, \quad \text{div } \vec{B} = 0, \quad \text{rot } (\vec{E}) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad \text{rot } (\vec{B}) = \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}.$$

I.2. En prenant le rotationnel de Faraday et en utilisant Maxwell-Ampère,

$$\Delta \vec{E} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta \vec{B} - \mu_0 \varepsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

Comme $c^2 = 1/(\mu_0 \varepsilon_0)$,

$$\Delta \vec{E} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} = \vec{0}, \quad \Delta \vec{B} - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} = \vec{0}.$$

I.3.

(a) L'équation d'onde impose

$$-k^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \boxed{\omega = ck \quad (k > 0)}.$$

Avec Faraday,

$$\text{rot}(\vec{E}) = ikE_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} \vec{u}_y = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = i\omega \vec{B}.$$

Donc

$$\boxed{\vec{B}(M, t) = \frac{k}{\omega} E_0 \exp\{i(kz - \omega t)\} \vec{u}_y = \frac{E_0}{c} \exp\{i(kz - \omega t)\} \vec{u}_y.}$$

(b) Le vecteur de Poynting instantané est

$$\boxed{\vec{\Pi}(t) = \frac{1}{\mu_0} \vec{E}(t) \wedge \vec{B}(t).}$$

Pour une onde sinusoïdale, la moyenne temporelle vaut

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \text{Re}(\vec{E} \wedge \vec{B}^*).$$

Ici,

$$\boxed{\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2 \vec{u}_z.}$$

(c) Pour une surface S perpendiculaire à Oz ,

$$P = \iint_S \langle \vec{\Pi} \rangle \cdot d\vec{S} = \|\langle \vec{\Pi} \rangle\| S.$$

La densité de puissance est donc

$$\boxed{J_L = \frac{P}{S} = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c E_0^2.}$$

(d) On donne

$$J_L = 4,0 \cdot 10^4 \text{ W} \cdot \text{cm}^{-2} = 4,0 \cdot 10^8 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2}.$$

Donc

$$E_0 = \sqrt{\frac{2J_L}{\varepsilon_0 c}} \simeq 5,5 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.$$

Ainsi

$$\boxed{E_0 \simeq 5,5 \cdot 10^5 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}.}$$

II Modèle du faisceau gaussien

II.1.

(a) On calcule d'abord

$$\left| \frac{iz_0}{z + iz_0} \right|^2 = \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2}.$$

De plus,

$$\left| \exp\left(-ik \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right) \right|^2 = \exp\left(-2 \operatorname{Im}\left(k \frac{r^2}{2(z + iz_0)}\right)\right).$$

Or

$$\frac{1}{z + iz_0} = \frac{z - iz_0}{z^2 + z_0^2},$$

si bien que

$$|E(r, z)|^2 = E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2} \exp\left(-\frac{kz_0}{z^2 + z_0^2} r^2\right).$$

On veut l'écrire sous la forme

$$|E(r, z)|^2 = A^2(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right).$$

On identifie :

$$A^2(z) = E_0^2 \frac{z_0^2}{z^2 + z_0^2}, \quad \frac{2}{w^2(z)} = \frac{kz_0}{z^2 + z_0^2}.$$

Donc

$$A(z) = E_0 \frac{z_0}{\sqrt{z^2 + z_0^2}}$$

et

$$w^2(z) = \frac{2(z^2 + z_0^2)}{kz_0} = \frac{\lambda}{\pi z_0} (z^2 + z_0^2).$$

En posant

$$w_0^2 = \frac{\lambda z_0}{\pi}, \quad w(z) = w_0 \sqrt{1 + \frac{z^2}{z_0^2}}$$

on retrouve bien la forme demandée, et

$$A(z)w(z) = E_0 w_0.$$

(b) $A(z)$ est paire, maximale en $z = 0$ avec $A(0) = E_0$, et décroît comme $1/|z|$ pour $|z| \gg z_0$.

$w(z)$ est paire, minimale en $z = 0$ avec $w(0) = w_0$, et croît comme $|z|/z_0$ pour $|z| \gg z_0$.

(c) Pour $z = 0$,

$$|E(r, 0)| = E_0 \exp\left(-\frac{r^2}{w_0^2}\right).$$

Pour z fixé,

$$|E(r, z)| = A(z) \exp\left(-\frac{r^2}{w^2(z)}\right).$$

Le profil transverse est donc gaussien. $w(z)$ caractérise la largeur du faisceau à l'abscisse z ; w_0 est le *col* (waist) du faisceau.

II.2.

- (a) Dire que l'amplitude complexe varie peu à l'échelle de la longueur d'onde revient à écrire

$$\left| \frac{\partial E}{\partial r} \right| \ll \frac{|E|}{\lambda} < k|E|, \quad \left| \frac{\partial E}{\partial z} \right| \ll \frac{|E|}{\lambda} < k|E|.$$

Cela signifie que les variations spatiales de l'enveloppe ont lieu sur des longueurs très grandes devant λ .

- (b) En négligeant les dérivées de l'enveloppe devant celles de la phase, on retrouve localement la relation d'onde plane :

$$\vec{B}(M, t) \simeq \frac{E(r, z)}{c} \exp(i(kz - \omega t)) \vec{u}_y.$$

II.3.

- (a) Comme précédemment,

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \operatorname{Re} (\vec{E} \wedge \vec{B}^*) = \frac{|E(r, z)|^2}{2\mu_0 c} \vec{u}_z.$$

Donc

$$\langle \vec{\Pi} \rangle = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c |E(r, z)|^2 \vec{u}_z$$

et la densité de puissance vaut

$$J(r, z) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c A^2(z) \exp\left(-\frac{2r^2}{w^2(z)}\right).$$

- (b) La valeur maximale en un plan z donné est

$$J_{\max}(z) = \frac{1}{2} \varepsilon_0 c A^2(z).$$

On définit $R(z)$ par

$$J(R(z), z) = \frac{J_{\max}(z)}{e^2}.$$

Donc

$$\exp\left(-\frac{2R^2(z)}{w^2(z)}\right) = e^{-2} \implies R(z) = w(z).$$

- (c) Pour $z \gg z_0$,

$$w(z) \sim w_0 \frac{|z|}{z_0}.$$

Le rayon croît donc linéairement avec z : le faisceau a asymptotiquement la forme d'un cône de demi-angle β tel que

$$\tan \beta \simeq \beta = \frac{w(z)}{z} \sim \frac{w_0}{z_0}.$$

Ainsi

$$\beta \simeq \frac{w_0}{z_0}.$$

Comme $w_0^2 = \lambda z_0 / \pi$,

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \quad \beta \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0}.$$

(d) **Laser YAG-Nd :**

$$w_0 = 0,50 \text{ mm} = 5,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}, \quad \lambda = 1,06 \text{ } \mu\text{m} = 1,06 \cdot 10^{-6} \text{ m}.$$

Alors

$$z_0 = \frac{\pi w_0^2}{\lambda} \simeq 7,4 \cdot 10^{-1} \text{ m}.$$

Et

$$\beta \simeq \frac{\lambda}{\pi w_0} \simeq 6,8 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \simeq 3,9 \cdot 10^{-2} \text{ }^\circ.$$

Laser CO₂ : Même w_0 , mais $\lambda = 10,6 \text{ } \mu\text{m}$.

$$z_0 \simeq 7,4 \cdot 10^{-2} \text{ m},$$

$$\beta \simeq 6,8 \cdot 10^{-3} \text{ rad} \simeq 3,9 \cdot 10^{-1} \text{ }^\circ.$$

Conclusion : à même col w_0 , un laser CO₂ diverge environ 10 fois plus qu'un laser YAG, car sa longueur d'onde est 10 fois plus grande.

III Suivi médical d'un spationaute : freinage par induction

Test d'effort et dosage de l'acide lactique

A CEVIS, le vélo de l'ISS MP* uniquement

Q.12. Pour un solénoïde infini, par invariance par translation parallèlement à Oz , le champ ne dépend que de x et de y . Par ailleurs tout plan orthogonal à Oz est un plan de symétrie de la distribution de courant. On en déduit que le champ est dirigé selon l'axe :

$$\vec{B}(M) = B(x, y) \vec{u}_z.$$

À l'intérieur et à l'extérieur du solénoïde il n'y a pas de courant. L'équation locale de Maxwell-Ampère se traduit par $\text{rot}(\vec{B}) = \vec{0}$, ce qui donne alors $\frac{\partial B}{\partial y} = 0$ et $\frac{\partial B}{\partial x} = 0$. Le champ est donc uniforme à l'intérieur à l'extérieur !.

On procède ensuite comme en cours avec le solénoïde de section circulaire avec un contour d'Ampère rectangulaire avec un côté parallèle à l'axe de longueur ℓ , comportant une portion intérieure et une grande portion extérieure (où le champ est nul),

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = B_0 \ell = \mu_0(n\ell)I.$$

D'où

$$\vec{B}_{\text{int}} = \mu_0 n I \vec{u}_z = \mu_0 \frac{N}{L} I \vec{u}_z.$$

Ainsi

$$B_0 = \mu_0 n I = \mu_0 \frac{N}{L} I.$$

- Q.13. La spire carrée de côté a se déplace à vitesse $v_0 \vec{u}_x$. Pendant l'entrée, une largeur $x(t) = v_0 t$ de la spire se trouve dans la zone où le champ existe. L'aire soumise au champ vaut

$$S(t) = a x(t) = a v_0 t \quad (0 < t < a/v_0).$$

On oriente la spire dans le sens du courant, ce qui fait que son vecteur normal est dans le sens de \vec{u}_z . Le flux est ainsi positif et vaut donc

$$\Phi(t) = B_0 S(t) = B_0 a v_0 t.$$

La f.é.m. induite vaut d'après la loi de Faraday :

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B_0 a v_0.$$

En négligeant l'auto-induction,

$$i = \frac{e_{\text{ind}}}{R} = -\frac{B_0 a v_0}{R}.$$

Ici on a donc $i < 0$ ce qui est cohérent avec la loi de Lenz (la force de Laplace sur le brin supérieur est dirigée vers le bas, en sens opposé au vecteur vitesse ; ou alors le champ magnétique supplémentaire dû à ce courant est selon $-\vec{u}_z$, ce qui tend à diminuer le flux qui est en train d'augmenter).

- Q.14. Seul le côté avant de la spire, plongé dans le champ, subit une résultante non compensée. La force de Laplace sur un brin de longueur a vaut

$$\vec{F} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} v_0 \vec{u}_x.$$

Elle est opposée au mouvement : c'est une force de freinage (comme anticipé précédemment).

- Q.15. L'abscisse de la base de la spire est $-a + v_0 t$. Pendant la sortie la surface traversée par du flux vaut alors $a \times (a - (-a + v_0 t)) = a(2a - v_0 t)$. le flux décroît :

$$\Phi(t) = B_0 S(t) = B_0 a(2a - v_0 t).$$

La f.é.m et le courant induit change change de signe :

$$e_{\text{ind}} = -\frac{d\Phi}{dt} = B_0 a v_0. i = \frac{e_{\text{ind}}}{R} = \frac{B_0 a v_0}{R}.$$

La force de Laplace s'exerce cette fois uniquement sur le brin inférieur. On obtient la même expression que précédemment c'est encore (et c'est normal) une force de freinage :

$$\vec{F} = -\frac{B_0^2 a^2}{R} v_0 \vec{u}_x.$$

Q.16. Si les spires successives sont séparées d'une distance a , alors lorsqu'une spire achève son entrée dans la zone de champ, la suivante commence à y entrer. On obtient ainsi une action de freinage quasi continue, avec un nombre de spires actives à peu près constant, ce qui régularise le couple résistant.

Q.17. Pour une spire active,

$$P_1 = Ri^2 = R \left(\frac{B_0 a v_0}{R} \right)^2 = \frac{B_0^2 a^2 v_0^2}{R}.$$

Cette puissance varie comme

$$P \propto v_0^2.$$

Q.18. Plus le sportif pédale vite, plus la puissance résistante à fournir augmente... C'est normal (mais ce serait la même chose si la puissance était proportionnelle à la vitesse...). L'intérêt pour le sportif est peut-être qu'il atteigne plus facilement des résistances élevées...

B) Acide lactique dans le sang

Q.19. Le sang est modélisé par la solution tampon du couple



de concentration totale

$$C_t = [\text{H}_2\text{CO}_3] + [\text{HCO}_3^-] = C_{t,0} = 2,75 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1},$$

et de pH habituel 7,4.

D'après la relation :

$$\text{pH} = pK_{a1} + \log \left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \right).$$

Ainsi,

$$7,4 = 6,4 + \log \left(\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} \right),$$

d'où

$$\frac{[\text{HCO}_3^-]}{[\text{H}_2\text{CO}_3]} = 10.$$

Posons

$$[\text{H}_2\text{CO}_3] = x \quad \text{et} \quad [\text{HCO}_3^-] = 10x.$$

Comme

$$x + 10x = 2,75 \times 10^{-2},$$

on obtient

$$11x = 2,75 \times 10^{-2}, \quad x = 2,5 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Finalement,

$$[\text{H}_2\text{CO}_3] = 2,50 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}, \quad [\text{HCO}_3^-] = 2,50 \cdot 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Q.20. On considère les couples acido-basiques :

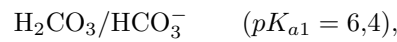
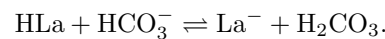


Diagramme de prédominance. Pour un couple acide/base, l'acide prédomine si $\text{pH} < pK_a$ et la base si $\text{pH} > pK_a$.

Ainsi :

- pour $\text{pH} < 3,9$, HLa prédomine sur La^- ;
- pour $3,9 < \text{pH} < 6,4$, La^- et H_2CO_3 sont les espèces prédominantes ;
- pour $\text{pH} > 6,4$, La^- et HCO_3^- prédominent.

L'acide lactique réagit avec l'ion hydrogénocarbonate selon :

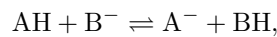


Il s'agit bien de la réaction acide-base attendue : l'acide le plus fort HLa cède un proton à la base HCO_3^- .

La constante d'équilibre associée vaut

$$K = \frac{[\text{La}^-][\text{H}_2\text{CO}_3]}{[\text{HLa}][\text{HCO}_3^-]}.$$

Pour une réaction du type



on a

$$K = 10^{pK_a(\text{BH}) - pK_a(\text{AH})}.$$

Donc ici :

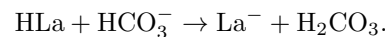
$$K = 10^{6,4 - 3,9} = 10^{2,5} \simeq 3,2 \times 10^2.$$

La réaction est donc très favorisée dans le sens direct. L'hypothèse de quasi-totalité paraît donc raisonnable *a priori*, même si K n'est pas gigantesque au sens strict.

Q.21. On introduit dans le sang une concentration initiale en acide lactique

$$C'_0 = 2,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

On suppose la réaction précédente quasi-totale :



Avant réaction :

$$[\text{H}_2\text{CO}_3]_i = 2,50 \times 10^{-3}, \quad [\text{HCO}_3^-]_i = 2,50 \times 10^{-2}, \quad [\text{HLa}]_i = 2,0 \times 10^{-3}.$$

L'ion HCO_3^- est en large excès, donc HLa est limitant.

Après réaction supposée totale :

$$[\text{HLa}]_f \simeq 0,$$

$$[\text{HCO}_3^-]_f = 2,50 \times 10^{-2} - 2,0 \times 10^{-3} = 2,30 \cdot 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1},$$

$$[\text{H}_2\text{CO}_3]_f = 2,50 \times 10^{-3} + 2,0 \times 10^{-3} = 4,50 \cdot 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}.$$

Le nouveau pH est alors donné par :

$$\text{pH} = 6,4 + \log\left(\frac{2,30 \times 10^{-2}}{4,50 \times 10^{-3}}\right).$$

Or

$$\frac{2,30 \times 10^{-2}}{4,50 \times 10^{-3}} \simeq 5,11,$$

donc

$$\text{pH} \simeq 6,4 + \log(5,11) \simeq 6,4 + 0,71 = 7,11.$$

Ainsi,

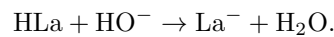
$$\boxed{\text{pH} \simeq 7,1.}$$

Validité a posteriori de l'hypothèse de quasi-totalité. La constante vaut $K \simeq 3,2 \times 10^2$, donc la transformation est bien très avancée. L'hypothèse est donc acceptable *a posteriori* pour une estimation du pH.

Commentaire. On trouve un pH inférieur à la zone physiologique viable [7,3 ; 7,5]. L'effort intense conduit donc à une acidification significative du sang, ce qui justifie l'existence d'un mécanisme régulateur lié à la respiration.

C) Titrage de l'acide lactique

Q.23. La solution titrante est une solution de soude, qui apporte les ions hydroxyde HO^- . La réaction de titrage est la neutralisation de l'acide lactique :



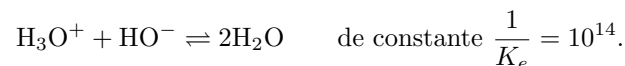
La constante associée à cette réaction vaut

$$K = \frac{[\text{La}^-]}{[\text{HLa}][\text{HO}^-]} \times \frac{1}{a(\text{H}_2\text{O})}.$$

On peut l'obtenir en combinant :



et



On en déduit

$$K = \frac{K_a}{K_e} = 10^{14-pK_a}.$$

Avec $pK_a = 3,9$,

$$K = 10^{14-3,9} = 10^{10,1} \simeq 1,3 \times 10^{10}.$$

La réaction de titrage est donc pratiquement totale : ce titrage par la soude est bien adapté.

Schéma de montage attendu :

- une burette graduée contenant la solution titrante de soude S_1 ;
- un bécher (ou erlenmeyer) contenant le volume $V = 50,0$ mL de solution S à titrer ;
- une agitation (agitateur magnétique ou agitation manuelle) ;
- une électrode de pH plongée dans le bécher, reliée à un pH-mètre.

Q.24. D'après la courbe fournie, par la méthode des tangentes, le volume à l'équivalence est voisin de

$$V_E \simeq 10,5 \text{ mL.}$$

À l'équivalence, les quantités de matière vérifient

$$n(\text{HO}^-)_{\text{versée}} = n(\text{HLa})_{\text{initiale dans } S}.$$

Donc

$$C_1 V_E = C V,$$

où

$$C_1 = 1,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}, \quad V_E = 10,5 \text{ mL}, \quad V = 50,0 \text{ mL.}$$

Ainsi,

$$C = \frac{C_1 V_E}{V} = \frac{1,00 \times 10^{-3} \times 10,5}{50,0} = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Donc la concentration dans la solution diluée S est

$$\boxed{C = 2,1 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.}$$

Le sang initial a été dilué de $V_0 = 5,0$ mL à $V = 50,0$ mL, soit un facteur 10. La concentration dans le sang vaut donc

$$C_0 = 10 C = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.$$

Ainsi,

$$\boxed{C_0 = 2,1 \cdot 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}.}$$

Pour comparer à la valeur seuil de $200 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, on calcule la concentration massique correspondante. La masse molaire de l'acide lactique $\text{C}_3\text{H}_6\text{O}_3$ vaut

$$M = 3 \times 12,0 + 6 \times 1,0 + 3 \times 16,0 = 90 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}.$$

Donc

$$\gamma = C_0 M = 2,1 \times 10^{-3} \times 90 = 1,8 \cdot 10^{-1} \text{ g} \cdot \text{L}^{-1} = 189 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}.$$

On obtient donc une concentration massique de $189 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$, inférieure à la limite recommandée de $200 \text{ mg} \cdot \text{L}^{-1}$.

Le patient n'est donc **pas encore** en acidose lactique, même s'il s'en approche.

Q.25. On choisit un indicateur coloré dont la zone de virage contient le pH à l'équivalence.

Ici, on titre un acide faible par une base forte, donc le pH à l'équivalence est **supérieur à 7**. D'après la courbe, on lit un pH d'équivalence voisin de 7 à 8.

Parmi les indicateurs proposés :

- le rouge congo (zone 3,5 - 4,5) vire beaucoup trop tôt ;
- le rouge de phénol (zone 6,8 - 7,8) vire dans la zone du saut de pH ;
- la thymolphthaleïne (zone 9,0 - 10,0) est trop haut et n'englobe pas bien le saut.

L'indicateur le plus adapté est donc $\boxed{\text{le rouge de phénol}}$.

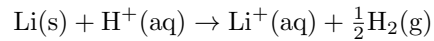
IV Chimie du lithium. MP* uniquement

A Généralités

7-. On utilise les couples Li^+/Li et H^+/H_2 . Les demi-équations sont



D'où l'équation-bilan, avec coefficient 1 pour le lithium,



8-. À partir de l'enthalpie libre standard de réaction, et de demi-réaction, on établit alors

$$\log K = \frac{E^\circ(\text{H}^+/\text{H}_2) - E^\circ(\text{Li}^+/\text{Li})}{0,06} \simeq \frac{3,0}{0,06} = 50.$$

Ainsi

$$\boxed{K \simeq 10^{50}.$$

La réaction est donc thermodynamiquement **totale**.

9-. Le résultat précédent montre que le lithium *devrait* réagir très favorablement du point de vue thermodynamique. Si, en pratique, il réagit peu avec l'eau, c'est donc une question **cinétique**. À notre niveau on ne formera pas spécialement d'hypothèse et on évoquera uniquement le blocage cinétique.

10-. Pour la réaction globale, on superpose :

- la branche anodique d'oxydation du lithium, très à gauche (potentiel très négatif, voisin de $-3,0 \text{ V}$);
- la branche cathodique de réduction des ions hydrogène en dihydrogène, centrée vers $0,0 \text{ V}$.

Mais on rajoute des surtensions anodique et cathodique pour obtenir un blocage cinétique. On peut proposer :

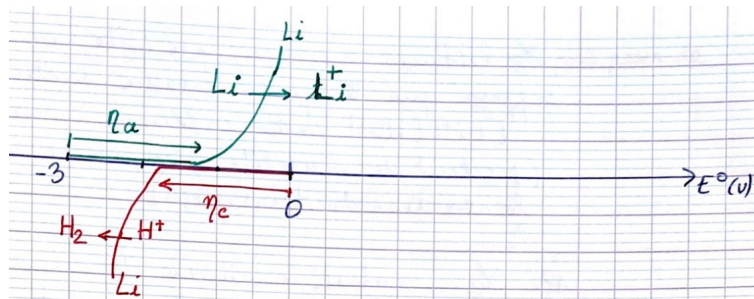
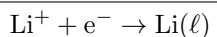


FIGURE 1 – Courbe IE du système en blocage cinétique

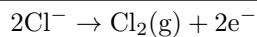
C Élaboration du lithium à partir du minerai : électrolyse

19-. Le chlorure de lithium fondu est totalement dissocié en Li^+ et Cl^- .

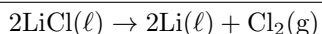
À la cathode (réduction) :



À l'anode (oxydation) :



Bilan :



20-. Sur le schéma, l'électrode *a* est indiquée comme pôle négatif. Or dans une électrolyse c'est là qu'a lieu la réduction : c'est donc la **cathode**. L'électrode *b*, pôle positif, est alors l'**anode**.

Les espèces représentées sont alors :

Numéro	Espèce
1	Li^+ allant vers la cathode
2	lithium métal $\text{Li}(\ell)$ recueilli
3	Cl^- allant vers l'anode
4	dichlore $\text{Cl}_2(\text{g})$ recueilli

21-. La tension thermodynamique minimale est la différence de potentiels d'équilibre :

$$U_{\min} = E_{\text{anode}} - E_{\text{cathode}} = 1,4 - (-3,0) = 4,4 \text{ V.}$$

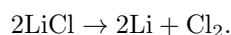
Ainsi

$$\boxed{U_{\min} \simeq 4,4 \text{ V.}}$$

Le document 3 indique plutôt 6 à 7.5 V. L'écart s'interprète par les **surtensions** aux électrodes, auxquelles s'ajoutent les chutes ohmiques dans l'électrolyte et les éléments de la cellule.

22-. Document 3 : une cellule produit par jour 275 kg de lithium et 1400 kg de dichlore.

L'équation-bilan donne



Donc pour 2 mol de Li produites, on obtient 1 mol de Cl_2 .

Avec $M(\text{Li}) = 6,95 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$ et $M(\text{Cl}_2) = 71,0 \text{ g}\cdot\text{mol}^{-1}$,

$$\frac{m(\text{Cl}_2)}{m(\text{Li})} = \frac{71,0}{2 \times 6,95} \simeq 5,1.$$

Donc, pour 275 kg de lithium,

$$m(\text{Cl}_2) \simeq 275 \times 5,1 \simeq 1,40 \cdot 10^3 \text{ kg.}$$

Ainsi

$$\boxed{m(\text{Cl}_2) \simeq 1400 \text{ kg.}}$$

Les valeurs du document 3 sont cohérentes.

23-. Pour produire $m = 275$ kg de lithium par jour,

$$n(\text{Li}) = \frac{275000}{6.95} \simeq 3,96 \cdot 10^4 \text{ mol.}$$

Chaque mole de Li nécessite une mole d'électrons, donc la charge journalière vaut

$$Q = nF \simeq 3,82 \cdot 10^9 \text{ C.}$$

Sur une durée d'un jour,

$$I = \frac{Q}{\Delta t} \simeq 4,42 \cdot 10^4 \text{ A.}$$

Avec une tension typique de $U \simeq 6.0$ à 7.5 V, l'énergie quotidienne vaut

$$E = UQ \simeq 2,29 \cdot 10^{10} \text{ J à } 2,87 \cdot 10^{10} \text{ J.}$$

En kilowattheures,

$$E \simeq 6,4 \cdot 10^3 \text{ kWh à } 8,0 \cdot 10^3 \text{ kWh.}$$

Par kilogramme de lithium produit,

$$\frac{E}{m} \simeq 23 \text{ à } 29 \text{ kWh} \cdot \text{kg}^{-1}.$$

Cette valeur est légèrement inférieure à celle annoncée, 30 à 35 kWh·kg⁻¹. L'écart s'explique par le fait que notre calcul ne prend essentiellement en compte que l'électrolyse idéale, alors que la consommation réelle inclut aussi les pertes ohmiques, les surtensions, et surtout le chauffage/maintien en température de la cellule d'électrolyse ignée.