# Correction du devoir à la maison n ° 12

## I E3A PSI 2007

## II E3A 2005 PC Partie III

### III Absorption du LASER dans un milieu matériel

III.1. Le principe fondamental de la dynamique appliqué à un électron de conduction s'écrit

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = -e\vec{E} - \frac{m}{\tau}\vec{v}.$$

La grandeur $\tau$ a la dimension d'un temps :

$$\dim(\tau) = T.$$

III.2.

(a) En régime sinusoïdal permanent l'équation du mouvement devient

$$-mi\omega\underline{\vec{V}} = -e\underline{\vec{E_0}} - \frac{m}{\tau}\underline{\vec{V}}.$$

Donc

$$m\left(\frac{1}{\tau} - i\omega\right)\underline{\vec{V}} = -e\underline{\vec{E_0}},$$

soit

$$\boxed{\underline{\vec{V}}(i\omega) = -\frac{e\tau}{m(1-i\omega\tau)}\underline{\vec{E_0}}.}$$

(b) La densité volumique de courant de conduction vaut

$$\vec{j} = -Ne\,\vec{v},$$

d'où, en notation complexe,

$$\underline{\vec{j}} = \underline{\sigma}(i\omega)\,\underline{\vec{E_0}}\,e^{-i\omega t},$$

avec

$$\boxed{\underline{\sigma}(i\omega) = \frac{Ne^2\tau}{m(1-i\omega\tau)}.}$$

Le milieu se comporte donc comme un **milieu conducteur ohmique dispersif** : sa conductivité dépend de la pulsation. La grandeur $\underline{\sigma}(i\omega)$ représente la **conductivité complexe** du métal ; sa partie réelle traduit la conduction dissipative, sa partie imaginaire le déphasage entre $\vec{j}$ et $\vec{E}$.

III.3.

(a) Dans le métal, les équations de Maxwell s'écrivent

$$\mathrm{div}\,\vec{E} = 0, \qquad \mathrm{div}\,\vec{B} = 0,$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = -\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}, \qquad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}.$$

(b) En prenant le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = -\frac{\partial \overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}}{\partial t},$$

et en utilisant

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\overrightarrow{E}) - \Delta\overrightarrow{E} = -\Delta\overrightarrow{E},$$

on obtient

$$-\Delta\overrightarrow{E} = -\mu_0\frac{\partial\overrightarrow{j}}{\partial t} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\overrightarrow{E}}{\partial t^2}.$$

En notation complexe, on pourra écrire $\underline{\overrightarrow{j}} = \underline{\sigma}\,\underline{\overrightarrow{E}}$ et Ainsi

$$\boxed{\Delta\underline{\overrightarrow{E}} - \mu_0\varepsilon_0\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} - \mu_0\underline{\sigma}\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t} = 0.}$$

On pose

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{f}(z)e^{-i\omega t}\,\overrightarrow{e_x}.$$

Alors

$$\Delta\underline{\overrightarrow{E}} = \underline{f}''(z)e^{-i\omega t}\,\overrightarrow{e_x}, \qquad \frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = -\omega^2\underline{f}(z)e^{-i\omega t}\,\overrightarrow{e_x}.$$

L'équation précédente devient

$$\underline{f}''(z) + \mu_0\varepsilon_0\omega^2\underline{f}(z) + i\mu_0\omega\underline{\sigma}(i\omega)\underline{f}(z) = 0.$$

Comme

$$c^2 = \frac{1}{\mu_0\varepsilon_0},$$

on peut écrire

$$\underline{f}''(z) + \frac{\omega^2}{c^2}\left(1 + \frac{i\underline{\sigma}(i\omega)}{\varepsilon_0\omega}\right)\underline{f}(z) = 0.$$

Or

$$\frac{\underline{\sigma}(i\omega)}{\varepsilon_0\omega} = \frac{Ne^2\tau}{\varepsilon_0 m\omega(1-i\omega\tau)} = \frac{\omega_p^2\tau}{\omega(1-i\omega\tau)},$$

avec

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}}.$$

On obtient donc bien

$$\boxed{\underline{f}''(z) + \left(\frac{\omega}{c}\right)^2\underline{n}^2\underline{f} = 0}$$

avec

$$\boxed{\underline{n}^2 = 1 + \frac{i\tau\omega_p^2}{\omega(1-i\tau\omega)}.}$$

La grandeur $\underline{n}$ est l'**indice optique complexe** du métal.

(c) Pour l'aluminium :

$$\omega_p = \sqrt{\frac{Ne^2}{\varepsilon_0 m}} \simeq 2{,}4.10^{-16}\ \text{rad·s}^{-1}.$$

(d) On écrit

$$n = n' + in'', \qquad n' > 0, \quad n'' > 0, \qquad k = \frac{\omega}{c}.$$

L'équation différentielle admet pour solution générale

$$f(z) = A\,e^{iknz} + B\,e^{-iknz}.$$

L'onde se propageant dans le sens des $z$ croissants et vérifiant $A_0 = f(0)$, on retient

$$\boxed{f(z) = A_0 e^{iknz} = A_0 e^{ikn'z} e^{-kn''z}.}$$

Ainsi

$$\boxed{\vec{E}(M,t) = A_0\,e^{-kn''z} e^{i(kn'z-\omega t)}\,\vec{e_x}.}$$

L'existence de $n''$ traduit une **atténuation exponentielle** de l'onde dans le métal : c'est l'absorption. La vitesse de phase vaut

$$\boxed{v_\varphi = \frac{\omega}{kn'} = \frac{c}{n'}.}$$

(e) Pour le laser YAG-Nd$^{3+}$, on a

$$\lambda = 1{,}06\ \mu\text{m}, \qquad \omega = \frac{2\pi c}{\lambda} \simeq 1{,}78.10^{15}\ \text{rad}\cdot\text{s}^{-1}.$$

Alors

$$\tau\omega \simeq 14{,}3.$$

En utilisant l'expression précédente,

$$\underline{n}^2 = 1 + \frac{i\tau\omega_p^2}{\omega(1-i\tau\omega)} = 1 - \frac{\tau^2\omega_p^2}{1+\tau^2\omega^2} + i\frac{\tau\omega_p^2/\omega}{1+\tau^2\omega^2}.$$

Numériquement,

$$\boxed{\underline{n}^2 \simeq -181 + 12,7\,i.}$$

Comme

$$n'^2 - n''^2 \simeq -181, \qquad 2n'n'' \simeq 12,7,$$

et $n'' \gg n'$, on obtient approximativement

$$\boxed{n' \simeq 0{,}47}, \qquad \boxed{n'' \simeq 13,5 \text{ conformément à l'indication de l'énoncé.}}$$

On constate que la partie imaginaire domine très largement : l'onde est très fortement atténuée dans l'aluminium.

III.4. À partir de Maxwell-Faraday,

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}.$$

Comme

$$\vec{E} = A_0 e^{-kn''z} e^{i(kn'z-\omega t)}\vec{e_x},$$

on a

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\vec{E}\right) = \frac{\partial E_x}{\partial z}\,\vec{e_y} = ikn\,E_x\,\vec{e_y}.$$

Donc

$$iknE_x\,\vec{e_y} = i\omega\vec{B},$$

soit

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{n}{c}\,A_0\,e^{-kn''z} e^{i(kn'z-\omega t)}\,\vec{e}_y.}$$

III.5.

(a) La valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting est

$$\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \frac{1}{2\mu_0} \Re\left(\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}^*\right).$$

Ici

$$\overrightarrow{E} = E_x\,\overrightarrow{e_x}, \qquad \overrightarrow{B} = B_y\,\overrightarrow{e_y},$$

donc

$$\overrightarrow{E} \times \overrightarrow{B}^* = E_x B_y^*\,\overrightarrow{e_z}.$$

Or

$$B_y^* = \frac{n^*}{c} A_0^* e^{-kn''z} e^{-i(kn'z-\omega t)},$$

d'où

$$E_x B_y^* = \frac{n^*}{c} |A_0|^2 e^{-2kn''z}.$$

Ainsi

$$\boxed{\langle \overrightarrow{\Pi} \rangle = \frac{|A_0|^2}{2\mu_0 c}\, n'\, e^{-2kn''z}\,\overrightarrow{e_z}.}$$

La puissance moyenne traversant une surface $S$ perpendiculaire à $Oz$ située à la cote $z$ vaut

$$P(z) = \iint_S \langle \overrightarrow{\Pi} \rangle \cdot \overrightarrow{e_z}\,\mathrm{d}S = \frac{|A_0|^2}{2\mu_0 c}\, n' S\, e^{-2kn''z}.$$

On peut donc écrire

$$\boxed{P(z) = P_0 e^{-\alpha z}}$$

avec

$$\boxed{P_0 = \frac{|A_0|^2}{2\mu_0 c}\, n' S}$$

et

$$\boxed{\alpha = 2kn'' = 2\frac{\omega}{c} n'' = \frac{4\pi n''}{\lambda}.}$$

(b) Avec

$$n'' \simeq 13,5, \qquad \lambda = 1{,}06.10^{-6}\ \text{m},$$

on obtient

$$\alpha = \frac{4\pi n''}{\lambda} \simeq 1{,}6.10^{8}\ \text{m}^{-1}.$$

La profondeur de pénétration caractéristique vaut

$$\delta = \frac{1}{\alpha} \simeq 6.10^{-9}\ \text{m}.$$

L'énergie du laser ne pénètre donc que sur quelques nanomètres dans l'aluminium : l'absorption est extrêmement superficielle.

III.6. La puissance incidente $P_L$ se partage entre puissance réfléchie $P_R$ et puissance transmise au métal à l'entrée $P_0$ :

$$P_L = P_R + P_0.$$

Avec

$$R = \frac{P_R}{P_L}, \qquad A = \frac{P_0}{P_L},$$

on obtient

$$\boxed{R + A = 1.}$$