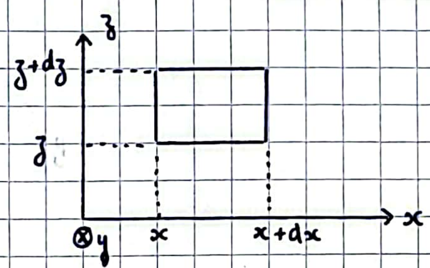
MINES . Option PC . Physique 2 . 2023

II.A Les équations de la vague linéaire

15 masse dans $d\tau$ à $t+dt$ = masse dans $d\tau$ à t
+ masse "entrant" en x pendant dt
- masse "sortant" en $x+dx$ pendant dt
+ masse "entrant" en z pendant dt
- masse "sortant" en $z+dz$ pendant dt



$$\rho(x,z,t+dt)\,dx\,\cancel{dy}\,dz = \rho(x,z,t)\,dx\,\cancel{dy}\,dz + \rho(x,z,t)\,v_x(x,z,t)\,\cancel{dy}\,dz\,dt$$
$$- \rho(x+dx,z,t)\,v_x(x+dx,z,t)\,\cancel{dy}\,dz\,dt$$
$$+ \rho(x,z,t)\,v_z(x,z,t)\,dx\,\cancel{dy}\,dt$$
$$- \rho(x,z+dz,t)\,v_z(x,z+dz,t)\,dx\,\cancel{dy}\,dt$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t}(x,z,t)\,dt\,\cancel{dx\,dz} = -\frac{\partial}{\partial x}\big(\rho(x,z,t)v_x(x,z,t)\big)\,\cancel{dx\,dz}\,dt - \frac{\partial}{\partial z}\big(\rho(x,z,t)v_z(x,z,t)\big)\,\cancel{dz\,dx}\,dt$$

Donc : $\boxed{\dfrac{\partial \rho}{\partial t} + \dfrac{\partial}{\partial x}(\rho v_x) + \dfrac{\partial}{\partial z}(\rho v_z) = 0}$

16 Pour un fluide incompressible : $\rho = \text{cste}$ il reste : $\boxed{\dfrac{\partial v_x}{\partial x} + \dfrac{\partial v_z}{\partial z} = 0}$

17 $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi \Rightarrow v_x = \dfrac{\partial \Phi}{\partial x}$ et $v_z = \dfrac{\partial \Phi}{\partial z}$

$\Rightarrow \boxed{\dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0}$ c'est l'équation de Laplace $\Delta \Phi = 0$

18 On a : • $\dfrac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \dfrac{\partial}{\partial t}(\overrightarrow{\text{grad}}\,\Phi) = \overrightarrow{\text{grad}}\left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial t}\right)$

• $-\rho g \hat{e}_z = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z)$

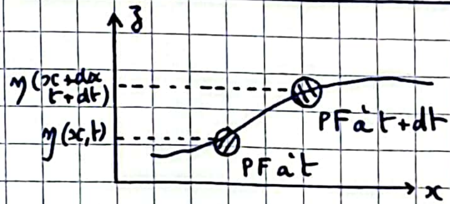
$$\rho\left[\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2}\overrightarrow{\text{grad}}(\vec{v}\cdot\vec{v})\right] = -\rho g \hat{e}_z - \overrightarrow{\text{grad}}\,P \Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v}\right) = -\overrightarrow{\text{grad}}(\rho g z + P)$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\text{grad}}\left(\rho\frac{\partial \Phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\rho\vec{v}\cdot\vec{v} + \rho g z + P\right) = \vec{0}$$

D'où, en divisant par ρ : $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} + \dfrac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} + gz + \dfrac{P}{\rho} = f(t)}$

Pour un écoulement stationnaire $\dfrac{\partial \Phi}{\partial t} = 0 \Rightarrow \dfrac{1}{2}\vec{v}\cdot\vec{v} + gz + \dfrac{P}{\rho} = \text{constante}$

$\Rightarrow$ relation de Bernoulli

19 Pour une particule fluide en surface :



$$v_z = \frac{\eta(x+dx,t+dt) - \eta(x,t)}{dt}$$
$$= \frac{\frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial \eta}{\partial t}dt}{dt} \qquad \text{or : } dx = v_x\,dt$$
$$= \frac{\partial \eta}{\partial x}\cdot v_x + \frac{\partial \eta}{\partial t} \qquad \text{or } v_x = \frac{\partial \Phi}{\partial x}$$

donc : $\boxed{\dfrac{\partial \Phi}{\partial z} = \dfrac{\partial \eta}{\partial x}\cdot\dfrac{\partial \Phi}{\partial x} + \dfrac{\partial \eta}{\partial t}}$

20 A la surface libre au contact de l'air : $P(x, z = \eta, t) = P_0$

La relation de la question 18 écrite à la surface $z = \eta(x,t)$ s'écrit :

$$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} + \frac{1}{2}\left.\vec{v}\cdot\vec{v}\right|_{z=\eta} + g\eta + \frac{P_0}{\rho} = \frac{P_0}{\rho}$$

d'où : $\boxed{\eta = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=\eta} - \frac{1}{2g}\left.\vec{v}\cdot\vec{v}\right|_{z=\eta}}$

21 $\Delta\Phi = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}\cdot Z + X\frac{d^2 Z}{dz^2} = 0$

Donc : $\underbrace{\frac{\frac{d^2 Z}{dz^2}}{Z}}_{\text{ne dépend que de } z} = -\underbrace{\frac{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2}}{X}}_{\text{ne dépend que de } x \text{ et } t} = \mu$ constante $\Rightarrow \boxed{\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\mu X}$ $\boxed{\frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z}$

22 $\frac{\partial \eta}{\partial t} = \left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=0} \Rightarrow A\omega \sin(kx - \omega t) = X(x,t)\cdot\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0}$

$\Rightarrow \boxed{X(x,t) = \sin(kx - \omega t)}$ et $\boxed{\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0} = \gamma = A\omega}$ conviennent

23 $\frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + \mu X = 0$ de solution $X = \sin(kx - \omega t)$ implique $k = \sqrt{\mu}$

$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \mu Z \Rightarrow Z = \alpha\, ch(\sqrt{\mu} z) + \beta\, sh(\sqrt{\mu} z) = \alpha\, ch(kz) + \beta\, sh(kz)$

$\left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=0} = A\omega \Rightarrow \beta k = A\omega \Rightarrow \beta = \frac{A\omega}{k}$

$\left.\frac{\partial \Phi}{\partial z}\right|_{z=-H} = 0 \Rightarrow \left.\frac{dZ}{dz}\right|_{z=-H} = 0 \Rightarrow \alpha k\, sh(-kH) + \beta k\, ch(kH) = 0$

$\Rightarrow \alpha = \beta \frac{ch(kH)}{sh(kH)} = \frac{A\omega}{k}\frac{ch(kH)}{sh(kH)}$

Donc : $Z = \frac{A\omega}{k}\left(\frac{ch(kH)}{sh(kH)} ch(kz) + sh(kz)\right)$

$= \frac{A\omega}{k}\frac{ch(kH)ch(kz) + sh(kz)sh(kH)}{sh(kH)}$

Finalement : $\boxed{Z(z) = \xi \frac{ch(k(H+z))}{sh(kH)}}$ avec : $\boxed{\xi = \frac{A\omega}{k}}$

24 $\eta = -\frac{1}{g}\left.\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right|_{z=0} \Rightarrow A\cos(kx - \omega t) = -\frac{1}{g}(-\omega \cos(kx - \omega t))\frac{A\omega}{k}\frac{ch(kH)}{sh(kH)}$

$\Rightarrow \boxed{\omega^2 = kg \tanh(kH)}$

MINES - Option PC - Physique 2 - 2023

25 Par définition : $v_\varphi = \dfrac{\omega}{k}$ Donc : $\boxed{v_\varphi = \sqrt{\dfrac{g}{k}}\sqrt{\tanh(kH)}}$

- $H \ll \lambda = \dfrac{2\pi}{k} \Rightarrow kH \ll 1 \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \sqrt{gH}}$ indépendant de k ou ω donc <u>milieu non dispersif</u>

- $H \gg \lambda = \dfrac{2\pi}{k} \Rightarrow kH \gg 1 \Rightarrow \boxed{v_\varphi = \sqrt{\dfrac{g}{k}}}$ <u>milieu dispersif</u>

26 $v_g = \dfrac{d\omega}{dk}$ par définition de la vitesse de groupe. On dérive par rapport à k la relation de dispersion

$$\omega^2 = kg\tanh(kH) \Rightarrow 2\omega\frac{d\omega}{dk} = g\tanh(kH) + kg\frac{H}{ch^2(kH)}$$

$$\Rightarrow \boxed{v_g = \frac{1}{2\omega}\left[g\tanh(kH) + kg\frac{H}{ch^2(kH)}\right]}$$

On écrit : $v_g = \dfrac{\omega}{k}\cdot\dfrac{1}{2\omega^2}\left[gk\tanh(kH) + k^2g\dfrac{H}{ch^2(kH)}\right]$

$$= v_\varphi\cdot\frac{1}{2}\,\frac{gk\tanh(kH) + k^2g\frac{H}{ch^2(kH)}}{kg\tanh(kH)}$$

$$= \frac{v_\varphi}{2}\left(1 + \frac{kH}{sh(kH)ch(kH)}\right)$$ or : $sh(2kH) = 2\,sh(kH)\,ch(kH)$

Donc : $\boxed{v_g = \dfrac{v_\varphi}{2}\left(1 + \dfrac{2kH}{sh(2kH)}\right)}$ $n = 2$

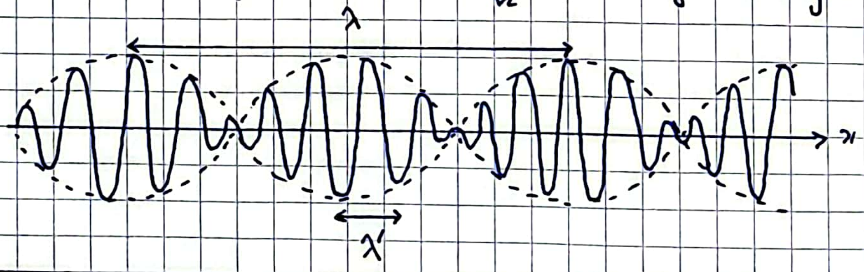
Pour $kH \to +\infty$: $\dfrac{kH}{sh(2kH)} \to 0$ Pour $kH \to 0$: $\dfrac{2kH}{sh(2kH)} \to 1$

Donc $\boxed{\dfrac{v_g}{v_\varphi} \text{ varie entre } \dfrac{1}{2} \text{ et } 1}$

27. $\eta(x,t) = A[\cos(k_1x - \omega_1t) + \cos(k_2x - \omega_2t)]$

$$= 2A\cos\Big[\underbrace{\frac{k_1-k_2}{2}}_{k}x - \underbrace{\frac{\omega_1-\omega_2}{2}}_{\omega}t\Big]\cos\Big[\underbrace{\frac{k_1+k_2}{2}}_{k'}x - \underbrace{\frac{\omega_1+\omega_2}{2}}_{\omega'}t\Big]$$

Si k_1 et k_2 sont assez proche, on aura une <u>courbe de battements</u> avec une modulation de longueur d'onde $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$ et un signal de longueur d'onde $\lambda' = \dfrac{2\pi}{k'}$



28 Les lignes en pointillé sont les surfaces d'onde (surface d'égale amplitude vibratoire)

<u>Continuité à l'interface</u> : $\eta_1(x=0,y,z,t) = \eta_2(x=0,y,z,t)$

On a : $\vec{k_1} = k_1(\cos i_1\, \hat{e}_x + \sin i_1\, \hat{e}_y) \Rightarrow \vec{k_1}\cdot\vec{R} = k_1 \sin i_1\, y$

$\vec{k_2} = k_2(\cos i_2\, \hat{e}_x + \sin i_2\, \hat{e}_y) \Rightarrow \vec{k_2}\cdot\vec{R} = k_2 \sin i_2\, y$

Donc : $A\cos(k_1 \sin i_1\, y - \omega t) = A\cos(k_2 \sin i_2\, y - \omega t)$

Cela doit être vraie pour tout $y \Rightarrow k_1 \sin i_1 = k_2 \sin i_2$

Pour $k_1 H_1 \ll 1$ et $k_2 H_2 \ll 1$, on a : $v_{\varphi_1} = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{gH_1}$ et $v_{\varphi_2} = \frac{\omega}{k_2} = \sqrt{gH_2}$

Donc : $\frac{\omega}{\sqrt{gH_1}}\cdot \sin i_1 = \frac{\omega}{\sqrt{gH_2}}\cdot \sin i_2 \Rightarrow \boxed{\frac{\sin i_1}{\sin i_2} = \sqrt{\frac{H_1}{H_2}}}$ f = fonction racine

29 La relation précédente montre que : $\frac{\sin i}{\sqrt{H}}$ = constante

En approchant du bord de mer : $H \searrow$ donc $\sin i \searrow$ donc $i \searrow$ et tend vers 0

$\Rightarrow$ <u>Les vagues arrivent perpendiculairement au rivage</u>

30 <u>Conservation de l'energie à l'interface</u> : $dP_1 = dP_2$

$E_{m_1} v_{g_1} dy = E_{m_2} v_{g_2} dy$

$\Rightarrow A_1^2 v_{g_1} = A_2^2 v_{g_2}$

$\Rightarrow \boxed{\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{v_{g_2}}{v_{g_1}}}}$

Pour $kH \ll 1$, on a $v_g = v_\varphi = \sqrt{gH}$, donc : $\frac{A_1}{A_2} = \sqrt{\frac{H_2}{H_1}}$

La relation précedente montre que : $A\sqrt{H}$ = constante

A l'approche du rivage : $H \searrow$ donc $A \nearrow$. <u>L'amplitude augmente</u>

C'est en contradiction avec l'égalité des amplitudes supposée à la question 28