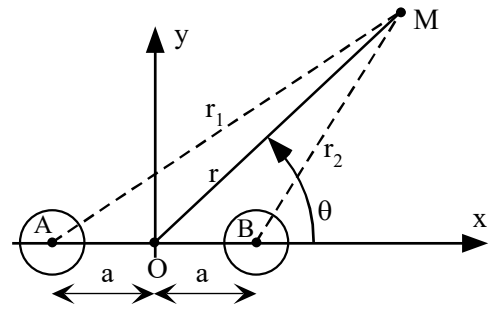


Problème n°1 : ELECTROSTATIQUE

I)

1°) Le système de coordonnées le plus approprié est le système de coordonnées cylindriques.

2°) M étant un point quelconque, le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ est plan de symétrie pour la distribution de charges, donc aussi pour $\vec{E}$. Or M appartient à ce plan donc $\vec{E}(M)$ est contenu dans ce plan. Il en est de même pour le plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ du fait du caractère infini du cylindre. $\vec{E}(M)$ qui est contenu dans ces deux plans est donc en définitive porté par $\vec{u}_r$. On peut noter au passage que ceci n'est vrai qu'en dehors de l'axe Oz. Sur cet axe, le champ électrique est nul puisqu'il doit être à la fois porté par $\vec{u}_r$ et contenu dans tous les plans contenant Oz, donc aussi porté par $\vec{u}_z$.



3°) A ce stade, on a $\vec{E}(M) = E(r, \theta, z) \vec{u}_r$. L'invariance de la distribution de charges par toute rotation autour de Oz et toute translation selon Oz, entraîne que $E(r, \theta, z)$ est en réalité seulement une fonction de r : $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$.

4°) On prend comme surface de Gauss un cylindre d'axe Oz, de rayon $r > R$ et de hauteur h , s'étendant par exemple de $z = 0$ à $z = h$. Le théorème de Gauss donne $E(r)2\pi r h = \frac{\rho \pi R^2 h}{\epsilon_0}$, puis $E(r) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$ et enfin $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} \vec{u}_r$.

L'équation de Maxwell-Gauss $\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ permet de s'assurer que l'unité du champ électrique est celle de $\frac{\rho}{\epsilon_0}$ multipliée par des mètres, donc que le résultat précédent est **bien homogène**.

En utilisant la relation $\vec{E} = -\text{grad} V$, on obtient

$$\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r} = -\frac{\partial V}{\partial r},$$

$$0 = -\frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial \theta}$$

$$\text{et } 0 = -\frac{\partial V}{\partial z}.$$

Les deux dernières équations permettent d'affirmer que V ne dépend que de r . La première devient donc $\frac{dV}{dr} = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r}$, qui donne

$$\text{après intégration } V = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r) + K.$$

La relation $\vec{E} = -\text{grad} V$ permet d'établir que l'unité de V est celle du champ électrique multipliée par des mètres, donc que l'expression de V est homogène, vue l'expression de $\vec{E}$ trouvée plus haut.

5°) On reprend rapidement l'ensemble des questions dans le cas où $\rho(r) = \rho_0 + \alpha r$, α et ρ_0 étant positives : Le système de coordonnées le plus approprié est toujours le système de coordonnées cylindriques.

Pour les mêmes raisons que plus haut, $\vec{E}(M)$ est porté par $\vec{u}_r$. L'invariance de la distribution de charges par toute rotation autour de Oz et toute translation parallèlement à Oz, conduit à nouveau à $\vec{E}(M) = E(r) \vec{u}_r$.

On prend à nouveau comme surface de Gauss un cylindre d'axe Oz, de rayon $r > R$ et de hauteur h , s'étendant par exemple de $z = 0$ à $z = h$. Le théorème de Gauss donne $E(r)2\pi r h = \frac{1}{\epsilon_0} \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^h (\rho_0 + \alpha r) r dz d\theta dr$,

$$\text{puis } E(r)2\pi r h = \frac{2\pi h}{\epsilon_0} \int_0^R (\rho_0 + \alpha r) r dr = \frac{2\pi h}{\epsilon_0} \left(\frac{\rho_0 R^2}{2} + \frac{\alpha R^3}{3} \right) \text{ et enfin } \vec{E}(M) = \frac{R^2}{\epsilon_0 r} \left(\frac{\rho_0}{2} + \frac{\alpha R}{3} \right) \vec{u}_r.$$

II)

6°) On utilise le théorème de superposition : $\vec{E}(M) = \frac{-\rho R^2}{2\epsilon_0 r_1^2} \vec{O_1 M} + \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 r_2^2} \vec{O_2 M}$, soit $\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \left(\frac{\vec{O_2 M}}{r_2^2} - \frac{\vec{O_1 M}}{r_1^2} \right)$.

7°) a) Le plan yOz étant un plan d'antisymétrie pour la distribution de charges, c'est aussi un plan d'antisymétrie pour le champ électrique donc en M, qui appartient à ce plan, le champ électrique est normal au plan, donc parallèle à Ox.

b) D'après le 6°), et en utilisant le fait que si M est sur l'axe Oy, $r_1 = r_2 = \sqrt{y^2 + a^2}$, on peut écrire :

$$\vec{E}(M) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 (y^2 + a^2)} (\vec{O_2 M} - \vec{O_1 M}) = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0 (y^2 + a^2)} \vec{O_2 O_1}, \text{ d'où } \vec{E}(M) = \frac{-\rho a R^2}{\epsilon_0 (y^2 + a^2)} \vec{u}_x.$$

8°) On utilise le théorème de superposition et les résultats du I) :

$$V = -\frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r_1) + K_1 - \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln(r_2) + K_2, \text{ soit, en posant } K_3 = K_1 + K_2 : V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right) + K_3$$

Puisque l'on impose $V = 0$ en tout point de l'axe Oy, c'est-à-dire pour $r_1 = r_2$, on en déduit $K_3 = 0$. Finalement, $V = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0} \ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)$.

De plus, on a montré que le champ électrique est en tout point du plan yOz normal à celui-ci.

Donc le plan yOz est une surface équipotentielle, ce qui veut bien dire que le potentiel y a partout la même valeur.

9°) Une surface fermée en forme de cylindre circulaire, d'axe Oz, enferme une charge nulle puisque les charges négatives et positives se compensent. D'après le théorème de Gauss le flux du champ électrique à travers cette surface est donc nul :

$$\phi = \oint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = 0. \text{ Inutile de faire des calculs pour cela !}$$

Problème n°2 : MAGNETOSTATIQUE Centrale TSI 2011

I.1. Le champ magnétique est à flux conservatif :

Loi locale : $\text{div } \vec{B} = 0$

Forme intégrale : $\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0$; le flux magnétique à travers toute surface fermée

est nul. Autrement dit, le flux rentrant à travers une surface fermée est égal au flux sortant. Le flux de $\vec{B}$ ne dépend que du contour fermé sur lequel s'appuient différentes surfaces orientées. Les lignes de champ magnétique ne peuvent pas -

contrairement à celles de $\vec{E}$ - diverger à partir de points sources : absence de « charges magnétiques ».

Carte de champ a) : $\vec{A}(M) = A_y(x)\vec{u}_y$ donc $\text{div } \vec{A} = 0$

Carte de champ b) : $\vec{A}(M) = A_\theta(r)\vec{u}_\theta$ donc $\text{div } \vec{A} = 0$

Carte de champ c) : $\vec{A}(M) = A_r(r)\vec{u}_r$ donc $\text{div } \vec{A} \neq 0$

Carte de champ d) : $\vec{A}(M) = A_\theta\vec{u}_\theta$ donc $\text{div } \vec{A} = 0$

On pourrait aussi s'amuser à dessiner des tout petits tubes de champs pour voir si le flux entrant est égal au flux sortant. Ce serait le cas en tous points pour a), b), d). Pas pour c).

Les cartes de champ a), b) et d) sont vraisemblablement celles d'un champ à flux conservatif.

I.2. Equation de Maxwell Ampère en magnétostatique : $\text{rot } (\vec{B}) = \mu_0 \vec{j}$

Théorème d'Ampère en magnétostatique : la circulation du champ magnétique le long d'un contour fermé orienté est égale au produit de μ_0 par la somme des intensités algébriques des courants enlacés par le contour C :

$$\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{\text{enlacé}}$$

Champ à rotationnel nul en tout point de l'espace : [carte de champ c)]. Pour voir si un champ est à rotationnel nul en un point M, on dessine un petit contour fermé autour de ce point M (de forme telle que le champ soit tantôt parallèle, tantôt orthogonal au contour). Si la circulation du champ sur ce contour est nulle, le champ est à rotationnel nul au point M (cf Stokes).

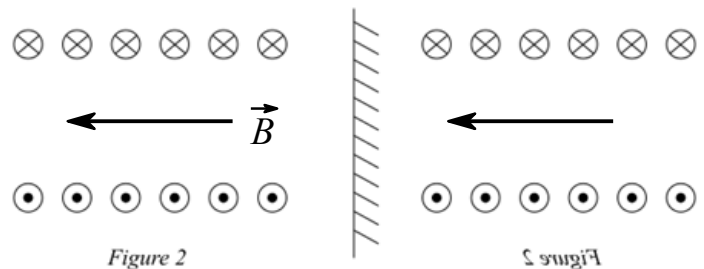
Pour un champ magnétique : [carte b) (fil rectiligne), éventuellement a) (solénoïde épais)], mais pour d) la distribution de courant est difficile à imaginer. Et c) pas possible car désaccord avec Maxwell-Thomson.

I.3. Un plan Π est un plan de symétrie pour une distribution de courant si, quel que soit le point M_1 de la distribution, et son symétrique M_2 par rapport à Π , $\vec{j}(M_2)$ est le symétrique de $\vec{j}(M_1)$ par rapport à Π .

Un plan Π' est un plan d'antisymétrie pour une distribution de courant si, quel que soit le point M_1 de la distribution, et son symétrique M_2 par rapport à Π' , $\vec{j}(M_2)$ est l'opposé du symétrique de $\vec{j}(M_1)$ par rapport à Π' .

$\vec{B}(M)$ est vecteur « axial » (on dit aussi pseudovecteur) donc les plans de symétrie pour la distribution de courant sont des plans d'antisymétrie pour le champ magnétique. Et les plans d'antisymétrie pour la distribution de courant sont des plans de symétrie pour le champ magnétique. Conséquence très utile : en un point M appartenant à un plan de symétrie pour une distribution de courant, $\vec{B}(M)$ est orthogonal au plan.

Le miroir est un plan de symétrie pour la distribution constituée du solénoïde initial et de son image dans le miroir. $\vec{B}(M)$ est donc antisymétrique par rapport à ce plan, comme il est horizontal et vers la droite sur l'axe du solénoïde de gauche, il est donc aussi horizontal et vers la droite sur le solénoïde de droite. Son sens est lié au sens du courant dans les spires.



I.4. a) Le solénoïde peut être [considéré comme infini si $\ell \gg R$].

b) On se place en coordonnées cylindriques. $\vec{B}(M)$ est perpendiculaire au plan de symétrie ($M, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta$)

donc $\vec{B}(M) = B(r, \theta, z) \vec{u}_z$.

B ne dépend pas de z par invariance de la distribution par toute translation le long de l'axe (solénoïde infini), ni de θ par symétrie cylindrique donc $\vec{B}(M) = B(r) \vec{u}_z$.

c) On choisit un rectangle orienté de longueur h : $\oint_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = (B(r_1) - B(r_2))h$

En utilisant le théorème d'Ampère :

Pour $r_1 < r_2 < R$: $I_{\text{enlacé}} = 0$ donc $B(r_1) = B(r_2) = B_{\text{int}}$: champ uniforme à l'intérieur.

Et pour $r_1 < R < r_2$ On a $(B(r_1) - 0)h = \frac{\mu_0 N}{\ell} hI$, d'où $B_{\text{int}} = \mu_0 (N/\ell) I$.

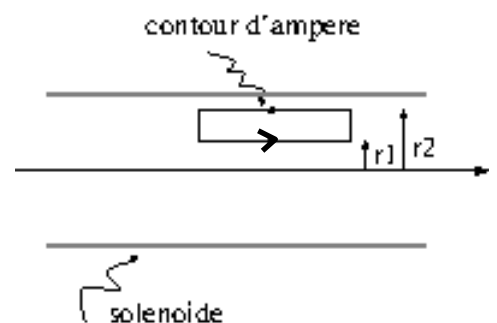
d) Application numérique : $B = 1,26 \text{ mT}$

Les champs magnétiques créés par des courants sont toujours faibles, de l'ordre du millitesla.

Avec 1 spire par mm, le fil de cuivre a un diamètre de 1mm. On pourrait y faire passer un courant de plusieurs Ampères, mais au-delà, l'effet Joule sera trop important.

Il semble donc difficile d'obtenir un champ plus intense avec la même configuration.

Il faut superposer plusieurs couches de spires, ou bien mettre un noyau ferromagnétique.



II Tube métallique dans un solénoïde

II.A.1 On suppose qu'il y a $n = (N/\ell)$ spires /m. En prenant $i = i_L(t)$, on obtient $\vec{B}_0 = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$

II.A.2 On égalise les deux expressions de l'énergie magnétique : $\frac{1}{2} L i^2 = \frac{B_0^2}{2\mu_0} S \ell$, d'où $L_0 = \mu_0 n^2 \ell S = \mu_0 N^2 S / \ell$

II.B.1 Dans le conducteur, il apparaît un champ électrique induit $\vec{E}$ tel que $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$.

$\vec{E}(M)$ est perpendiculaire au plan $(M, \vec{u}_r, \vec{u}_z)$ de symétrie de la distribution de $-\partial \vec{B} / \partial t$ donc $\vec{E} = E \vec{u}_\theta$

La loi d'Ohm locale donne $\vec{j} = \sigma \vec{E}$: les lignes de champ du vecteur densité de courant électrique induit sont orthoradiales, ce sont donc des cercles d'axe $z'z$ analogues à des spires : la distribution des courants induits est semblable à celle d'un solénoïde, donc le champ $\vec{B}_1$ créé par ces courants induits est porté par $z'z$.

II.B.2 a) En faisant l'analogie avec un solénoïde infiniment long avec $NI = j b \ell$: $B_{\text{int}} = \mu_0 j b$ et $B_{\text{ext}} = 0$

b) On a dans le conducteur $\vec{j} = \sigma \vec{E}$ (loi d'Ohm locale)

II.C.1 Equation de Maxwell Faraday : $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\partial \vec{B} / \partial t$

II.C.2 Forme intégrale (= loi de Faraday) : soit le cercle d'axe Oz, de rayon a : $\oint_{\text{cercle}} \vec{E} \cdot d\vec{l} = -d(\phi_0 + \phi_1) / dt$

d'où $j 2\pi a / \sigma = -\pi a^2 (dB_0/dt + dB_1/dt)$ En complexe : $j (2\pi a / \sigma) = -\pi a^2 (i\omega)(B_0 + B_1)$,

d'où $B_1(2\pi a / \mu_0 \sigma b) = -\pi a^2 (i\omega)(B_0 + B_1)$ puis $B_1 = B_0 \frac{-\pi a^2 (i\omega)}{\frac{2\pi a}{\mu_0 \sigma b} + \pi a^2 (i\omega)} = B_0 \frac{1}{\frac{2i}{\mu_0 \sigma b a \omega} - 1}$

II.C.3 Flux du champ total à travers le solénoïde : $\Phi = N(B_0 + B_1) \pi a^2 + N B_0 (S - \pi a^2) = N B_0 S + N B_1 \pi a^2$

Fem induite complexe : $\underline{e} = -\frac{d\Phi}{dt}$ (loi de Faraday) $\underline{e} = - (i\omega) N B_0 (S + \pi a^2 \frac{1}{\frac{2i}{\mu_0 \sigma b a \omega} - 1})$

II.D Loi d'Ohm généralisée aux bornes du solénoïde :

$\underline{U} = R_0 \underline{I} - \underline{e} = R_0 \underline{I} + i\omega N S B_0 + i\omega N B_0 \pi a^2 \frac{1}{\frac{2i}{\mu_0 \sigma b a \omega} - 1} = R_0 \underline{I} + i\omega N S \frac{\mu_0 N}{\ell} \underline{I} + i\omega N \frac{\mu_0 N}{\ell} \underline{I} \pi a^2 \frac{1}{\frac{2i}{\mu_0 \sigma b a \omega} - 1}$

Et en posant $\underline{U} = \underline{Z} \underline{I}$, on obtient $\underline{Z} = R_0 + i L_0 \omega + i \omega L_0 \frac{\pi a^2}{S} \frac{-1}{-\frac{2i}{\mu_0 \sigma b a \omega} + 1} = R_0 + i L_0 \omega + \omega L_0 \frac{\pi a^2}{S} \frac{-i + \frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega}}{(\frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega})^2 + 1}$

$\underline{Z} = R_0 + 2 L_0 \frac{\pi a^2}{S \mu_0 \sigma b a} \frac{1}{(\frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega})^2 + 1} + i \omega L_0 (1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{(\frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega})^2 + 1})$

On trouve $R(\omega) = R_0 + 2 L_0 \frac{\pi a^2}{S \mu_0 \sigma b a} \frac{1}{(\frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega})^2 + 1}$ et $L(\omega) = L_0 (1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{(\frac{2}{\mu_0 \sigma b a \omega})^2 + 1})$