

Arrivée d'eau

Q1. Question un peu ambiguë puisqu'on nous parle de « fonctionnement normal ». Qu'entend-on par « normal » ? Est-ce ouvert à moitié ? au tiers ?

Faisons quelques petits calculs pour voir : ramenons les débits massiques donnés, à des débits volumiques, exprimés en litres par minute. Entre les réponses a) et d), on passe de 0,12 à 120 litres par minute. Il est clair que pour se faire couler un bain, on a besoin de plus qu'une minute. À l'inverse, 100 à 1000 minutes pour un bain, ce ne serait pas réaliste.

Donc la réponse attendue est la c) : $D_s = 2,0 \times 10^2 \text{ g.s}^{-1}$.

Q2. L'écoulement étant stationnaire, il ne peut pas y avoir de stockage ou de déstockage de masse dans un volume de contrôle donné. On peut donc utiliser, pour les débits massiques, l'équivalent de la loi des nœuds en électricité : $D_F + D_C = D_s$.

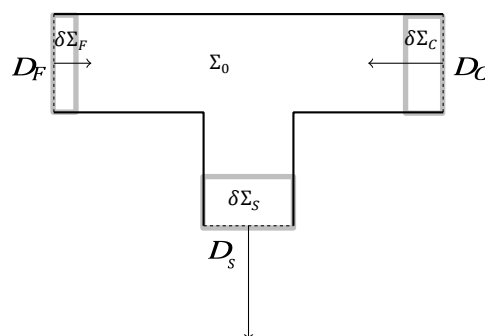
Q3. Même si la robinetterie est métallique (donc de résistance thermique faible), la conducto-convection dans la couche d'air qui l'entoure se traduit par une résistance thermique supplémentaire. La puissance thermique traversant cette résistance thermique est donc modeste. Et lorsque l'eau coule, le temps de présence de celle-ci dans le mitigeur est très court. Une puissance thermique modeste, associée à un temps d'échange très court : cela donne une énergie thermique échangée entre l'air et l'eau présente dans le corps du mitigeur négligeable : L'eau est en évolution adiabatique dans le mitigeur.

Q4. On considère un système fermé Σ^* défini par :

$$\Sigma^*(t) = \Sigma_0(t) \cup \delta\Sigma_F \cup \delta\Sigma_C ; \Sigma^*(t+dt) = \Sigma_0(t+dt) \cup \delta\Sigma_s.$$

La pression étant a priori quasiment la même aux entrées et à la sortie du mitigeur, $H_{\Sigma^*}(t+dt) - H_{\Sigma^*}(t) = 0$, soit $(H_{\Sigma_0}(t+dt) + D_s dt h_s) - (H_{\Sigma_0}(t) + D_C dt h_C + D_F dt h_F) = 0$. Or, en régime stationnaire, $H_{\Sigma_0}(t+dt) = H_{\Sigma_0}(t)$. Après simplification par dt , on tombe bien sur

$$D_s h_s = D_C h_C + D_F h_F.$$



Q5. En utilisant les résultats des questions 2 et 4 : $(D_C + D_F) h_s = D_C h_C + D_F h_F$, d'où $D_C (h_C - h_s) + D_F (h_F - h_s) = 0$,

ou encore $D_C c_e (T_C - T_s) + D_F c_e (T_F - T_s) = 0$, soit $T_s = \frac{D_C T_C + D_F T_F}{D_C + D_F}$.

Q6. Notons T_{s0} la température de sortie de 42°C (du soir), $T_{C0} = 50^\circ\text{C}$ et $T_{F0} = 18^\circ\text{C}$ les températures chaude et froide associées. Au moyen de la formule établie à la question 5, on a $T_{s0} = \frac{D_C}{D_s} T_{C0} + \left(1 - \frac{D_C}{D_s}\right) T_{F0}$,

d'où on tire $\frac{D_C}{D_s} = \frac{T_{s0} - T_{F0}}{T_{C0} - T_{F0}}$.

Ainsi, le matin, pour une température d'eau chaude T_{C1} , celle de sortie est $T_{s1} = \frac{D_C}{D_s} T_{C1} + \left(1 - \frac{D_C}{D_s}\right) T_{F0}$.

Soit $T_{s1} = \frac{T_{s0} - T_{F0}}{T_{C0} - T_{F0}} (T_{C1} - T_{F0}) + T_{F0}$. Numériquement, $T_{s1} = \frac{42-18}{50-18} (70-18) + 18 = 57^\circ\text{C}$. (on peut rester en $^\circ\text{C}$ car on n'a que des différences de températures qui se multiplient ou se divisent).

Il y a donc un risque de brûlure après quelques secondes si l'on en croit les données de l'énoncé.

En réalité, le risque est très limité. L'eau et les tuyaux sont froids au petit matin, il faut quelques minutes pour que l'eau chaude arrive au robinet et que le mélange se réchauffe. L'utilisateur a le temps de sentir la température de l'eau s'élever.

Q7. Imaginons que l'eau en sortie a une température supérieure à la température de consigne. La cire se dilate alors, le piston se déplace vers la gauche, ce qui réduit le débit de la voie 1 et augmente celui de la voie 2. Ce mécanisme permet de réduire la température de l'eau de sortie si l'eau chaude arrive par la voie 1.

L'eau chaude arrive par la voie 1, l'eau froide par la voie 2.

L'air humide

II.A Grandeurs caractéristiques de l'air humide

Q8. On considère un volume V d'air humide. L'humidité absolue est alors $x = \frac{m_v}{m_{as}}$.

Or, la pression de la vapeur d'eau est (modèle du gaz parfait) : $p_v = \frac{m_v RT}{M_v V}$, d'où $m_v = \frac{p_v M_v V}{RT}$.

Et la pression totale est $p = \left(\frac{m_v}{M_e} + \frac{m_{as}}{M_{as}}\right) \frac{RT}{V} = p_v + \frac{m_{as}}{M_{as}} \frac{RT}{V}$, d'où $m_{as} = \frac{(p-p_v) M_{as} V}{RT}$.

On en déduit bien la formule fournie, $x = d \frac{p_v}{p-p_v}$, avec $d = \frac{M_e}{M_{as}}$.

Q9. D'après la figure fournie, lorsque la température est de 20 °C, la pression de vapeur saturante de l'eau est $p_{sat} = 2,35 \text{ kPa}$.

D'après la formule établie à la question précédente, $x = \frac{d}{\frac{p}{p_v} - 1}$, donc x est maximum quand $\frac{p}{p_v} - 1$ est minimum, donc quand p_v est maximum, puisque p est fixé. Ceci se produit donc pour $p_v = p_{sat}$, d'où $x_{sat} = d \frac{p_{sat}}{p-p_{sat}}$.

Numériquement, $x_{sat} = \frac{18}{29} \times \frac{2,35 \cdot 10^3}{1,013 \cdot 10^5 - 2,35 \cdot 10^3} = \underline{0,0147}$.

Q10. On note $\Delta t = 10 \text{ h}$ la durée de l'étude, $D_{mvap} = 30 \text{ g} \cdot \text{h}^{-1}$ le débit massique de vapeur créée par l'être humain (qui se repose donc je prends le bas de la fourchette), $T_1 = 18^\circ\text{C}$ la température au coucher, $T_2 = 16^\circ\text{C}$ celle au lever, $HR_1 = 50\%$ l'humidité relative au coucher, HR_2 celui au lever, m_{vap1} la masse de vapeur d'eau présente au coucher, m_{vap2} celle présente au lever.

Par définition de l'humidité relative, $\frac{m_{vap1}}{M_e} \frac{RT_1}{V} = HR_1 \times p_{sat}(T_1)$.

Et $m_{vap2} = m_{vap1} + D_{mvap} \Delta t$, puis $HR_2 = \frac{m_{vap2}}{M_e} \frac{RT_2}{V p_{sat}(T_2)}$, d'où $HR_2 = \frac{T_2 p_{sat}(T_1)}{T_1 p_{sat}(T_2)} HR_1 + \frac{D_{mvap} \Delta t}{M_e} \frac{RT_2}{V p_{sat}(T_2)}$

Numériquement, on trouve $HR_2 = 112\%$. Il n'est pas possible d'avoir une humidité relative supérieure à 100%.

L'eau se condense sur les parties plus froides de la chambre.

Q11. On raisonne à nouveau sur une chambre hermétique de volume V constant. L'air qui vient de dehors est à un taux d'humidité relative de 100%, donc pour cet air humide qui vient de l'extérieur, $p_{vext}(T_a) = p_{sat}(T_a)$. Juste après avoir refermé la fenêtre, la pression partielle de vapeur d'eau dans la pièce est inchangée : $p_{vint}(T_a) = p_{sat}(T_a) = \frac{m_{vapint} RT_a}{M_e V}$.

Puis ce mélange gazeux se réchauffe. La pression partielle en vapeur d'eau devient donc $p'_{vint}(T_i) = \frac{m_{vapint} RT_i}{M_e V}$, d'où

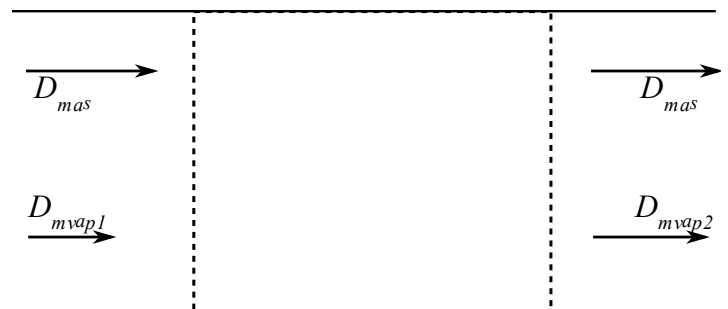
$p'_{vint}(T_i) = \frac{T_i}{T_a} \times p_{sat}(T_a)$, puis le nouveau taux d'humidité : $HR' = \frac{p'_{vint}(T_i)}{p_{sat}(T_i)}$, donc $HR' = \frac{T_i}{T_a} \times \frac{p_{sat}(T_a)}{p_{sat}(T_i)} = 55\%$.

En effet, on lit sur la courbe de l'énoncé (fig.3) que $p_{sat}(T_a) = 1,25 \text{ kPa}$ et $p_{sat}(T_i) = 2,35 \text{ kPa}$.

Conclusion : même si l'air extérieur est saturé en vapeur d'eau, quand il fait frais dehors, on a intérêt à aérer la pièce, cela peut permettre de désaturer l'air de la pièce.

II.B Étude d'un hygromètre

Q12. Il ne semble pas indispensable de faire un bilan sur un système fermé décomposé. On peut directement faire le bilan suivant, puisque le régime est stationnaire (cela n'est pas dit explicitement mais aucun des champs ne



dépend du temps dans les notations de l'énoncé) : la masse de vapeur d'eau qui sort du volume de contrôle pendant dt

est la somme de celle qui y entre pendant dt et de celle qui est créée dans le volume de contrôle pendant dt ; avec les

notations de la figure ci-contre : $D_{mvap2} dt = D_{mvap1} dt + m_{ev} dt$. Or $x_1 = \frac{D_{mvap1}}{D_{mas}}$ et $x_{sat}(T_h) = \frac{D_{mvap2}}{D_{mas}}$,

d'où $x_{sat}(T_h) D_{mas} = x_1 D_{mas} + m_{ev}$, ce qui est bien conforme à la formule donnée.

Q13. On note $\delta \Sigma_{1,as}$, $\delta \Sigma_{1,vap}$ respectivement l'air sec et la vapeur d'eau qui vont entrer pendant dt dans le volume de contrôle délimité par (S), $\delta \Sigma_{2,as}$, $\delta \Sigma_{2,vap}$ l'air sec et la vapeur d'eau qui vont en sortir pendant dt . On note $\delta \Sigma_\ell$ l'eau liquide qui va se transformer en vapeur pendant dt . On note Σ_0 le mélange d'air, de vapeur d'eau et d'eau liquide se trouvant dans (S) à t et qui vont y rester sous cette forme entre t et $t + dt$. On considère un système fermé, noté (S_f) dans l'énoncé, que l'on décompose de la façon suivante :

$$S_f(t) = \delta \Sigma_{1,as} \cup \delta \Sigma_{1,vap} \cup \delta \Sigma_\ell \cup \Sigma_0(t)$$

et

$$S_f(t + dt) = \delta \Sigma_{2,as} \cup \delta \Sigma_{2,vap} \cup \Sigma_0(t + dt).$$

Ce système fermé évolue à pression constante et on nous propose de négliger tout transfert thermique à travers (S), donc le premier principe de la thermodynamique appliqué à S_f entre t et $t + dt$ s'écrit :

$dH_{S_f} = \delta Q = 0$. Et puisque Σ_0 est dans la même situation thermodynamique à t et à $t + dt$,

$$dH_{S_f} = (\delta H_{2,as} + \delta H_{2,vap}) - (\delta H_{1,as} + \delta H_{1,vap} + \delta H_\ell).$$

On va calculer cette différence d'enthalpie avec une méthode similaire à celle utilisée pour un calcul de température de flamme, mais en empruntant un chemin fictif un peu différent : d'abord un changement de température, puis une réaction de changement d'état à T_h .

État initial : $D_{m,as}dt$ d'air sec et $x_1 D_{m,as}dt$ de vapeur d'eau à T_1 et $(x_{sat}(T_h) - x_1) D_{m,as}dt$ d'eau liquide à T_h ;

État intermédiaire, fictif : $D_{m,as}dt$ d'air sec et $x_1 D_{m,as}dt$ de vapeur d'eau à T_h et $(x_{sat}(T_h) - x_1) D_{m,as}dt$ d'eau liquide à T_h ;

État final : $D_{m,as}dt$ d'air sec et $x_{sat}(T_h) D_{m,as}dt$ de vapeur d'eau à T_h .

$$dH_{S_f,init \rightarrow inter} = D_{m,as}dt c_{p,as}(T_h - T_1) + x_1 D_{m,as}dt c_{p,v}(T_h - T_1)$$

$$dH_{S_f,inter \rightarrow final} = (x_{sat}(T_h) - x_1) D_{m,as}dt L_v(T_h)$$

$$dH_{S_f,init \rightarrow inter} + dH_{S_f,inter \rightarrow final} = 0 \text{ donne } [x_1 c_{p,v}(T_h - T_1) + c_{p,as}(T_h - T_1)] + (x_{sat}(T_h) - x_1) L_v(T_h) = 0$$

Cela conduit bien à la formule donnée : $x_1 = \frac{x_{sat}(T_h) L_v(T_h) + c_{p,as}(T_h - T_1)}{L_v(T_h) + c_{p,v}(T_h - T_1)}$.

Q14. En prenant $T_1 = 293K$ et $T_h = 288K$, on trouve : $L_v(T_h) \simeq 3.10^6 J \cdot kg^{-1}$, tandis que $c_{p,v}(T_h - T_1) \simeq 2.10^4 J \cdot kg^{-1}$ donc, au dénominateur, on peut négliger le second terme devant le premier, d'où $x_1 \simeq x_{sat}(T_h) - A(T_1 - T_h)$, avec

$$A = \frac{c_{p,as}}{L_v(T_h)}.$$

Q15. Numériquement, avec

$$p_{sat}(T_h) = 1,7 \text{ kPa, on trouve } HR = 58,2\%.$$

Q16. Sur le diagramme fourni, on se place en face de l'abscisse $T_1 = 20^\circ C$ et à l'intersection (point A) avec la courbe oblique $T_h = 15^\circ C$, on lit $HR \simeq 58\%$.

Miroir antibuée

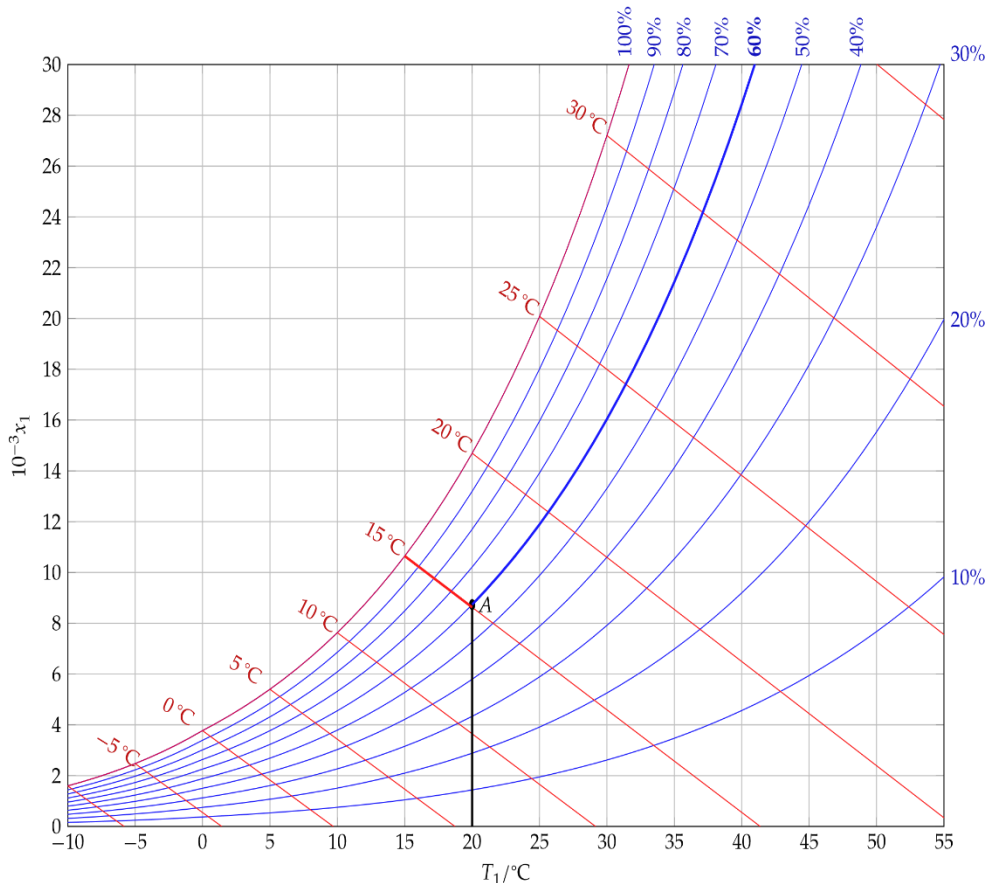
Q17. On suppose visiblement qu'on est en régime stationnaire, et il n'y a pas de terme de création thermique dans le mur, et on est en 1D. On a donc $div(\vec{j}_{cd}) = 0$, d'où $\frac{d^2 T}{dx^2} = 0$, puis $T(x)$ fonction affine. Notons $T_{s,e}$ la température sur la surface extérieure du mur. On a $T(x) = \frac{-\delta T}{e_1} x + T_{s,e} + \delta T$.

La puissance thermique qui traverse le mur vers l'extérieur est alors $P_{th} = \iint_{S_1} -\lambda_1 \frac{dT}{dx} dS_1$, d'où

$$P_{th} = LH \lambda_1 \frac{\delta T}{e_1}.$$

Q18. La résistance thermique est définie par : $R_{c,1} = \frac{\delta T}{P_{th}}$, d'où $R_{c,1} = \frac{e_1}{\lambda_1 S_1}$, avec $[S_1 = LH]$.

Q19. Le coefficient de Newton est donc plus grand sur la face extérieure du mur que sur la face intérieure car les mouvements d'air sont plus importants à l'extérieur, à cause du vent ou d'une convection plus importante : $h_e > h_i$.



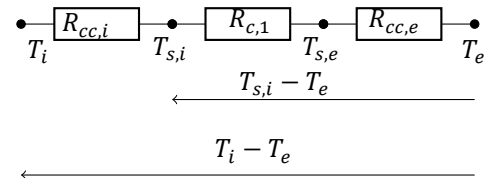
Q20. On a ici un problème assimilable à une association en série de résistance électriques ; en effet, c'est le même flux

thermique P_{th} qui traverse le mur et les couches de conduction-convection.

Le circuit électrique équivalent au problème étudié est représenté ci-

contre. $P_{th} = h_i S_1 (T_i - T_{s,i}) = h_e S_1 (T_{s,e} - T_e)$. On a donc $R_{cc,i} = \frac{1}{h_i S_1}$ et

$$R_{cc,e} = \frac{1}{h_e S_1}.$$



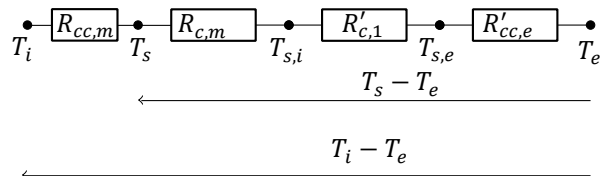
Q21. En utilisant l'équivalent du théorème du pont diviseur de tension, $T_{s,i} =$

$$T_e + \frac{R_{c,1} + R_{cc,e}}{R_{cc,i} + R_{c,1} + R_{cc,e}} (T_i - T_e), \text{ qui est bien de la forme } T_{s,i} = T_e + \alpha (T_i - T_e), \text{ avec } \alpha = \frac{R_{c,1} + R_{cc,e}}{R_{cc,i} + R_{c,1} + R_{cc,e}} =$$

$$h_i \frac{e_1 h_e + \lambda_1}{\lambda_1 h_e + h_i (e_1 h_e + \lambda_1)}.$$

Q22. Numériquement, $T_{s,i} = 14^\circ\text{C}$.

Q23. On cherche la température de surface du miroir, que l'on note T_s , conformément à ce qui sera proposé sur la figure 7 et à la question 24. Le nouveau schéma électrique équivalent est ci-contre, pour une section commune S_m , qui représente la surface du miroir. Il vient



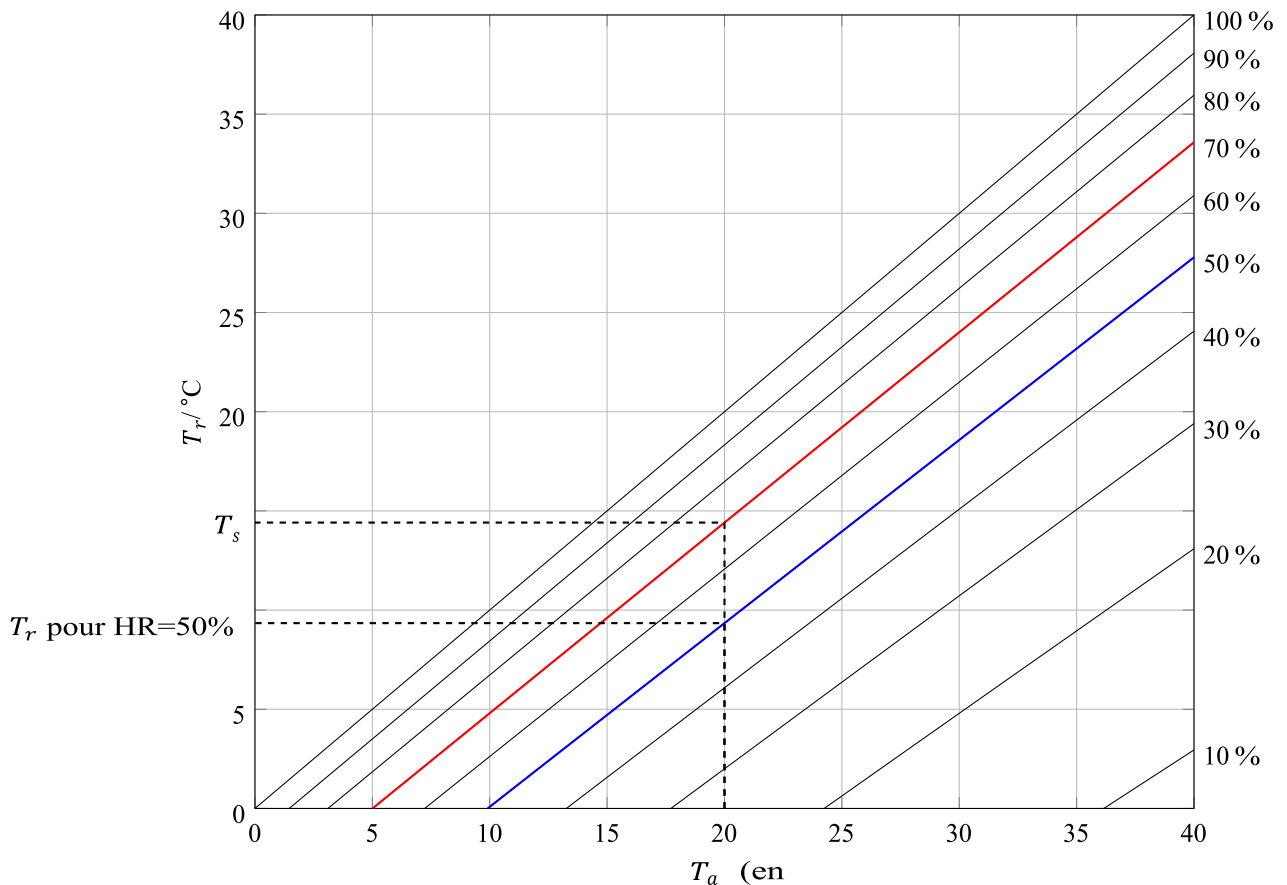
$$T_s = T_e + \frac{\frac{e_2}{\lambda_2 S_m} + \frac{e_1}{\lambda_1 S_m} + \frac{1}{h_e S_m}}{\frac{1}{h_i S_m} + \frac{e_2}{\lambda_2 S_m} + \frac{e_1}{\lambda_1 S_m} + \frac{1}{h_e S_m}} (T_i - T_e) = T_e +$$

$$\frac{\frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{1}{h_e}}{\frac{1}{h_i} + \frac{e_2}{\lambda_2} + \frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{1}{h_e}} (T_i - T_e)$$

Numériquement, $T_s = 14^\circ\text{C}$, avec 2 chiffres significatifs ; l'écart avec $T_{s,i}$ est très faible car la résistance thermique du miroir est faible.

En utilisant le diagramme fourni figure 6, on voit que lorsque la température de l'air est $T_i = T_a = 20^\circ\text{C}$, le point de rosée à $T_s = 14^\circ\text{C}$ se situe à une humidité relative $HR = 70\%$.

Ainsi, pour une humidité relative de 50 %, le point de rosée n'est pas atteint et il n'y a pas de buée.



Q24. On note Δt_{min} la durée minimale de douche cherchée, $D_{mvap0} = 1,5 \text{ kg} \cdot \text{h}^{-1}$ le débit massique de vapeur créée *a minima* par l'ensemble de la douche et de l'être humain, $HR_{buée} = 70\%$ l'humidité relative marquant l'apparition de la buée à la température $T_i = 20^\circ\text{C}$, $HR_{ini} = 50\%$ celui avant la douche, $m_{vap,ini}$ la masse de vapeur d'eau présente dans la salle de bain avant la douche, $V_{sdb} = 15\text{m}^3$ le volume de la salle

de bain.

La buée fera son apparition lorsque la pression de vapeur d'eau vérifiera $p_v(T_i) = HR_{buée} p_{sat}(T_i)$.

Or, $p_v(T_i) = \frac{n_{vap} RT_i}{V_{sdb}}$, donc $p_v(T_i) = \left(n_{vap,ini} + \frac{D_{mvapo} \Delta t_{min}}{M_e} \right) \frac{RT_i}{V_{sdb}}$.

Avant la douche, $n_{vap,ini} \frac{RT_i}{V_{sdb}} = HR_{ini} \times p_{sat}(T_i)$.

D'où $HR_{buée} = HR_{ini} + \frac{D_{mvapo} \Delta t_{min}}{M_e} \frac{RT_i}{V_{sdb} p_{sat}(T_i)}$, puis $\Delta t_{min} = (HR_{buée} - HR_{ini}) \frac{M_e V_{sdb} p_{sat}(T_i)}{D_{mvapo} RT_i}$.

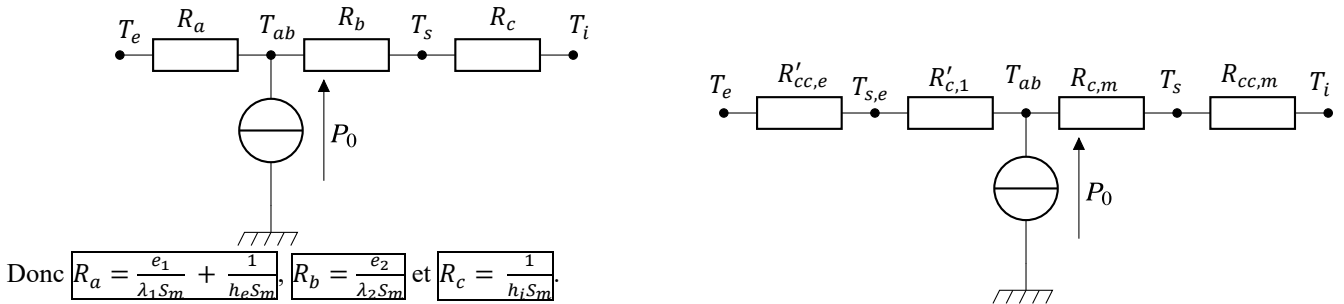
$$\Delta t_{min} = 0,035 \text{ h} = 2,1 \text{ min}$$

La condensation apparaît sur le miroir environ deux minutes après le début de la douche, et même plus tôt encore si la douche crée un débit massique en vapeur plus important.

Q25. Si on considère que le système de chauffage n'est pas utilisé, $P_0 = 0$ et il y a une puissance thermique qui traverse le mur. Les schémas (c) et (d) sont incompatibles avec cette situation.

En outre, l'apport d'énergie par effet Joule se fait sur la face arrière du miroir, alors que la température T_s est celle de la face avant du miroir. Il y a entre ces deux faces la résistance thermique du miroir qui doit figurer sur le schéma.

Le bon schéma est donc le schéma (a). Le voici, à côté de celui reprenant les notations de la question 23. On note T_{ab} la température de la face arrière du miroir ; sa valeur ne sera plus la même que $T_{s,i}$, à cause du chauffage.



Q26. La formation de buée est évitée quel que soit le taux d'humidité relative, si elle est évitée dans le cas le plus

défavorable, c'est-à-dire pour $HR = 100\%$. On voit sur la figure 6 que pour $T_a = 20^\circ\text{C}$, il faut $T_r \geq 20^\circ\text{C}$ si on veut

éviter l'apparition d'eau liquide, donc de buée. Posons $T_{smin} = 20^\circ\text{C}$. On veut donc $T_s \geq T_{smin}$.

Grâce au schéma électrique équivalent, on peut écrire $P_0 = \frac{T_{ab} - T_e}{R_a} + \frac{T_{ab} - T_i}{R_b + R_c}$, d'où on tire $T_{ab} = \frac{P_0 + \frac{T_e}{R_a} + \frac{T_i}{R_b + R_c}}{\frac{1}{R_a} + \frac{1}{R_b + R_c}}$. Puis, avec

le théorème du pont diviseur de tension, $T_s = T_i + \frac{R_c}{R_c + R_b} (T_{ab} - T_i) = \frac{R_c T_{ab} + T_i R_b}{R_c + R_b} = \frac{R_b T_i}{R_c + R_b} + R_c \frac{P_0 + \frac{T_e}{R_a} + \frac{T_i}{R_b + R_c}}{\frac{R_b + R_c}{R_a} + 1}$.

$T_s \geq T_{smin}$ conduit à $\frac{R_b T_i}{R_c + R_b} + R_c \frac{P_0 + \frac{T_e}{R_a} + \frac{T_i}{R_b + R_c}}{\frac{R_b + R_c}{R_a} + 1} \geq T_{smin}$, c'est-à-dire $P_0 + \frac{T_e}{R_a} + \frac{T_i}{R_b + R_c} \geq \frac{(T_{smin} - \frac{R_b T_i}{R_c + R_b})}{R_c} \left(\frac{R_b + R_c}{R_a} + 1 \right)$, ou

encore $P_0 \geq \frac{(T_{smin} - \frac{R_b T_i}{R_c + R_b})}{R_c R_a} (R_b + R_c + R_a) - \frac{T_e}{R_a} - \frac{T_i}{R_b + R_c}$. Numériquement, $P_0 \geq 11 \text{ W}$.

Notons que numériquement, $T_{smin} = T_i$, donc cela peut se simplifier en $P_0 \geq \frac{T_i - T_e}{R_a}$, d'où $P_0 \geq S_m \frac{T_i - T_e}{\frac{e_1}{\lambda_1} + \frac{1}{h_e}}$.

Q27. Le dispositif de chauffage est $P_j = 50 \text{ W}$. Cette valeur est supérieure à la valeur trouvée à la question précédente.

La puissance est suffisante pour éviter la formation de buée.

Q28. On note $N = 38$ le nombre de bandes conductrices, R la résistance électrique de l'une d'elles, R_{eq} la résistance électrique totale, $U = 230 \text{ V}$ la valeur efficace de la tension d'alimentation, γ la conductivité électrique de l'encre.

Il y a deux blocs de $N/2$ résistances en parallèle, chacun de résistance équivalente $R_{eq1} = \frac{2R}{N}$.

Les deux blocs sont en série, d'où la résistance globale $R_{eq} = \frac{4R}{N}$. Or, la géométrie cylindrique à section rectangulaire des bandes permet d'écrire $R = \frac{L}{\gamma e \ell}$, d'où $R_{eq} = \frac{4L}{N \gamma e \ell}$.

La puissance dégagée par effet Joule par cette résistance R_{eq} est $P_j = \frac{U^2}{R_{eq}} = \frac{N \gamma e \ell U^2}{4L}$, d'où $\gamma = \frac{4LP_j}{Ne \ell U^2}$.

Numériquement, $\gamma = 50 \Omega^{-1} \cdot \text{m}^{-1}$

Q29. Si l'on se contente de remplacer la poudre de carbone par du cuivre, on obtiendra une puissance de chauffage bien trop élevée (P_j est proportionnel à γ), et de grosses fuites thermiques vers l'extérieur. Remplacer la poudre de carbone par du cuivre, qui couvre de façon similaire la surface du miroir et qui permet de dissiper la même puissance, conduirait à une épaisseur des bandes beaucoup trop fines, difficiles à réaliser et très fragiles.

Q30 : $E = E_{eff}\sqrt{2} = 325 \text{ V}$.

Q31 : **Remarque préliminaire :** en fait, il y a un loup dans cette partie du problème (Q31 à Q34) : la charge $\{L, C\}$ est incompatible avec un fonctionnement périodique du redresseur. En effet, avec les notations du schéma ci-contre, $i_1(t) = C \frac{ds_2}{dt}(t)$. Donc en fonctionnement périodique, on aurait $\langle i_1(t) \rangle = 0$. Il faudrait donc que le courant $i_1(t)$ soit par moments négatif, ce qui est impossible avec les diodes ! L'auteur du sujet n'a visiblement pas vu ce problème, et a simplement raisonné en termes de filtrage : il a choisi comme charge un filtre passe-bas d'ordre 2. C'est un peu comme les soucis de conduction discontinue d'un hacheur : on conçoit le hacheur pour une charge de type source de courant continu, puis on change la charge en espérant que ça fonctionnera encore. Mais si on change trop la charge, ça ne fonctionne plus comme prévu ! Dans ce qui suit (Q31 à Q34), je traite les questions en apportant les réponses attendues par l'auteur du sujet, sans tenir compte de cette impossibilité de fonctionnement.

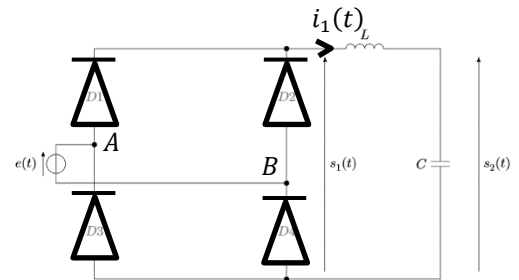


Figure B Redresseur PD2 avec filtrage par cellule LC

Le schéma du document-réponse B est donné ci-contre. On retrouve la même structure que dans le cours, mais pas dessiné de la même façon. Pour trouver les interrupteurs, on peut faire comme dans le cours en supposant initialement que la charge est une source idéale de courant avec $i_1(t) > 0$, puis remplacer cette source idéale par l'association série $\{L, C\}$. Pour aller plus vite que dans le cours, on peut aussi faire une analyse qualitative, et éventuellement faire une analogie avec de la mécanique des fluides, $e(t)$ étant l'analogie d'une pompe, qui imposerait une différence de pression alternative entre ses deux extrémités.

Quand $e(t) > 0$, la source de tension « pousse » le courant à sortir par la borne A et, pour qu'il débloque la diode D_1 (afin d'obtenir $s_1 = e$), il faut mettre D_1 vers le haut ; une diode étant similaire à une soupape. Et la source de tension $e(t)$ « aspire » le courant par la borne B, donc il faut mettre D_4 vers le haut aussi (toujours pour obtenir $s_1 = e$). Quand $e(t) < 0$, la source de tension « pousse » le courant à sortir par la borne B et, pour qu'il débloque la diode D_2 (afin d'obtenir $s_1 = -e$), il faut mettre D_2 vers le haut. Et la source de tension $e(t)$ « aspire » le courant par la borne A, donc il faut mettre D_3 vers le haut aussi (toujours pour obtenir $s_1 = -e$).

Remarque : si on voulait obtenir $s_1 < 0$, il faudrait retourner toutes les diodes.

Q32 : $\langle |E \sin(\omega t)| \rangle = E \langle |\sin(\omega t)| \rangle = \frac{2E}{T} \int_0^T |\sin(\omega t)| dt$
 $= \frac{2E}{\omega T} \int_0^\pi \sin(\theta) d\theta$, donc $\langle |E \sin(\omega t)| \rangle = \frac{2E}{\pi} = 207 \text{ V}$.

La raie a été rajoutée sur le document-réponse C : raie à la fréquence nulle.

Q33 : $s_1(t)$ est de période $\frac{T}{2}$ (puisque le redressement est double-alternance), donc la fréquence fondamentale de s_1 est $f_1 = 2f = 0,10 \text{ kHz}$.

Q34 : La fonction de transfert en régime harmonique faisant passer de $\underline{s}_1$ à $\underline{s}_2$ s'obtient grâce au théorème du pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}_2}{\underline{s}_1} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega}, \text{ d'où } \underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - LC\omega^2}.$$

On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe-bas d'ordre 2 ; un cas un peu particulier puisqu'il n'y a pas de terme d'ordre 1 dans le polynôme en $j\omega$ du dénominateur. Son facteur d'amortissement est nul, et le facteur de qualité est infini. Le module de la fonction de transfert commence donc par croître quand la fréquence augmente, pour devenir infini à la pulsation $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$, puis décroît après. Afin d'atténuer la composante alternative présente dans s_1 , il faut donc se placer à une pulsation supérieure à ω_0 .

Je pense qu'on n'attend pas ici de gros calculs, mais juste un peu de bon sens : Vu le spectre de s_1 , c'est surtout son fondamental qui est responsable des ondulations de s_2 .

La composante continue de s_2 est la même que celle de s_1 puisque $|\underline{H}| = 1$ pour $\omega = 0$: $\langle s_2 \rangle = \frac{2E}{\pi}$.

Notons s_{21} l'amplitude du fondamental de $s_2(t)$. Si on ne prend en compte que ce fondamental, la variation crête à crête de s_2 est $\Delta s_2 = 2s_{21}$, et en notant s_{11} l'amplitude du fondamental de $s_1(t)$, on a $s_{21} = |\underline{H}(2j\pi f_1)| s_{11}$,

d'où $s_{21} = \frac{1}{|1 - 4\pi^2 LC f_1^2|} s_{11}$, ou encore $s_{21} = \frac{1}{|1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}|} s_{11}$.

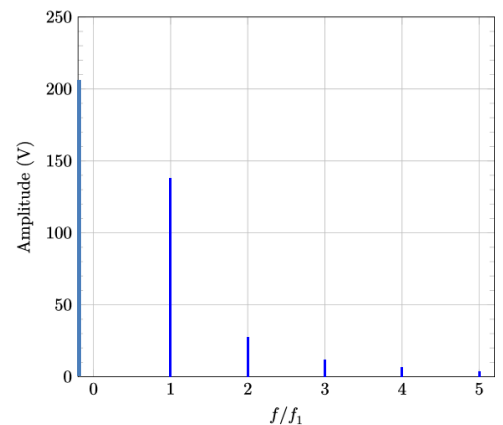


Figure C Spectre d'amplitude du signal $s_1(t)$ de fréquence f_1

D'après la remarque faite plus haut au sujet du filtre passe bas que l'on a, il faut choisir $2\pi f_1 > \omega_0$, d'où $s_{21} = \frac{1}{4\pi^2 LC f_1^2 - 1} s_{11}$.

En notant τ_{max} la valeur du taux d'ondulation maximale (de 5%) admise pour s_2 , on veut donc que $\frac{\Delta s_2}{\langle s_2 \rangle} < \tau_{max}$,

c'est-à-dire $\frac{2s_{21}\pi}{2E} < \tau_{max}$, soit encore $\frac{\pi}{4\pi^2 LC f_1^2 - 1} \frac{s_{11}}{E} < \tau_{max}$, d'où $4\pi^2 LC f_1^2 - 1 > \frac{\pi s_{11}}{E \tau_{max}}$.

On veut donc $C > \frac{\frac{\pi s_{11}}{E \tau_{max}} + 1}{4\pi^2 L f_1^2}$, numériquement, $C > 0,69 \text{ mF}$. C'est beaucoup.

On pourrait répondre de façon plus approfondie et plus calculatoire, en prenant en compte tous les harmoniques. Une façon pas trop compliquée d'y parvenir est de passer par l'équation différentielle, et de l'approximer en raisonnant uniquement sur les composantes alternatives de $s_1(t)$ et de $s_2(t)$, en admettant que le fondamental et tous les harmoniques de $s_1(t)$ se situent dans le domaine pour lequel le filtre se comporte en double intégrateur. Cela fait tout de même pas mal de calculs, et je ne pense pas que ce soit l'esprit de cette unique question, non détaillée.

Q35 : Le tableau de la figure E du document réponse est complété ci-contre. Un onduleur est dit « pleine onde » si la tension de sortie ne peut prendre que deux valeurs : $+E_0$ et $-E_0$. Il existe aussi des onduleurs qui peuvent prendre en sortie trois valeurs : $+E_0$, $-E_0$ ou 0 ce qui permet, en choisissant bien la largeur des paliers de valeurs 0, de se rapprocher davantage d'une sinusoïde, en éliminant par exemple d'éliminer l'harmonique 3. Il existe aussi des onduleurs « MLI », c'est-à-dire à modulation de largeur d'impulsion, là encore pour essayer de se rapprocher d'une sinusoïde.

	K_1	K_2	K_3	K_4	$u_1(t)$
$0 < t < T_0/2$	fermé	ouvert	ouvert	fermé	$+E_0$
$T_0/2 < t < T_0$	ouvert	fermé	fermé	ouvert	$-E_0$

Figure E

Q36 :

- Entre 0 et $\frac{T_0}{2}$:

$$E_0 = L \frac{di}{dt}(t) + ri(t) \quad (\text{Eq1})$$

- Entre $\frac{T_0}{2}$ et T_0 :

$$-E_0 = L \frac{di}{dt}(t) + ri(t) \quad (\text{Eq2})$$

Q37 : On résout (Eq1) en repérant avec un indice 1 la solution de cette première équation : $i_1(t) = \frac{E_0}{r} + A_1 \exp\left(-\frac{r}{L}t\right)$ puis (Eq2) avec un indice 2, et en introduisant $t - \frac{T_0}{2}$ pour faciliter le calcul de A_2 : $i_2(t) = \frac{-E_0}{r} + A_2 \exp\left(-\frac{r}{L}\left(t - \frac{T_0}{2}\right)\right)$.

Le courant ne peut pas être discontinu, à cause de la bobine : $i_1\left(\frac{T_0}{2}\right) = i_2\left(\frac{T_0}{2}\right)$, d'où, en introduisant la constante α de l'énoncé :

$$\frac{E_0}{r} + A_1 \alpha = \frac{-E_0}{r} + A_2 \quad (\text{Eq3}).$$

Le fonctionnement étant périodique, on a $i(0^+) = i(T_0^+)$; et comme il ne subit pas de discontinuité, $i(T_0^+) = i(T_0^-)$. En utilisant ces deux équations, on obtient $i(0^+) = i(T_0^-)$, c'est-à-dire $i_1(0^+) = i_2(T_0^-)$,

$$\text{d'où } \frac{E_0}{r} + A_1 = \frac{-E_0}{r} + A_2 \alpha \quad (\text{Eq4}).$$

En combinant les équations (Eq3) et (Eq4), on obtient $A_2 = \frac{2E_0}{r} + \alpha \left(A_2 \alpha - \frac{2E_0}{r}\right)$, d'où $A_2(1 - \alpha^2) = \frac{2E_0}{r}(1 - \alpha)$.

Et puisque $\alpha \neq -1$ (vue sa définition, qui le rend positif), $A_2 = \frac{2E_0}{r(1+\alpha)}$.

puis en reportant dans (Eq4) : $A_1 = \frac{-2E_0}{r} + \frac{2E_0\alpha}{r(1+\alpha)} = \frac{E_0}{r} \left(\frac{-2-2\alpha+2\alpha}{1+\alpha}\right)$, d'où $A_1 = \frac{E_0}{r} \left(\frac{-2}{1+\alpha}\right)$.

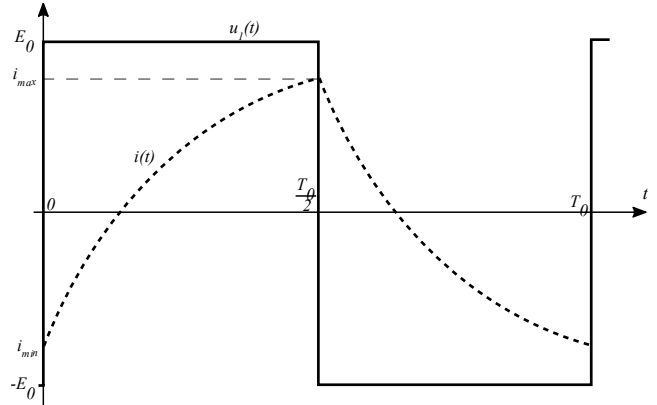
On constate que $A_2 > 0$, donc le courant est décroissant entre $\frac{T_0}{2}$ et T_0 . Et $A_1 < 0$, donc il est croissant entre 0 et $\frac{T_0}{2}$.

Le maximum est donc atteint à la fin de la phase de croissance, c'est-à-dire en $\frac{T_0}{2}$: $i_{max} = \frac{-E_0}{r} + A_2 = \frac{E_0}{r} \left(-1 + \frac{2}{1+\alpha}\right)$

D'où $i_{max} = \frac{E_0}{r} \left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\right)$.

Remarque : on aurait pu aller plus vite en disant que la fonction de transfert permettant de passer de $\underline{u}_1$ à $\underline{u}_r$ (tension aux bornes de la résistance r) est celle d'un filtre passe-bas d'ordre 1, qui conserve la composante continue. Or, celle de $u_1(t)$ est nulle, donc celle de $u_r(t)$ aussi. Or le signal $u_r(t)$ est de même forme que le courant $i(t)$ puisque $u_r(t) = r i(t)$. Ainsi on doit avoir $\langle i(t) \rangle = 0$. Et comme les équations (Eq1) et (Eq2) sont d'ordre 1 avec la même constante de temps, les formes des solutions à ces deux équations sont similaires, donc si on note i_{min} la valeur minimale de $i(t)$, on doit avoir $i_{min} = -i_{max}$. Autrement dit, $i(0) = -i\left(\frac{T_0}{2}\right)$, d'où $\frac{E_0}{r} + A_1 = -\left(\frac{E_0}{r} + A_1\alpha\right)$, ce qui donne bien $A_1 = \frac{E_0}{r} \left(\frac{-2}{1+\alpha}\right)$.

Q38 : Le tracé ci-contre représente $i(t)$ en pointillés et $u_1(t)$ en trait plein, en respectant la condition : $\frac{L}{r} = \frac{T_0}{4}$.



Q39 : La fonction de transfert en régime harmonique permettant de passer de $\underline{u}_1$ à $\underline{i}$ est du type filtre passe-bas d'ordre 1. Le spectre de l'entrée $u_1(t)$ comporte un fondamental et des harmoniques (mais pas de composante continue). Afin de rendre le courant (donc la sortie) le plus proche possible d'une sinusoïde, il faut conserver au mieux le fondamental, et atténuer le plus possible les harmoniques, donc en particulier l'harmonique 2. La fréquence de coupure du filtre est $f_c = \frac{r}{2\pi L}$.

- Si f_c est grande devant la fréquence fondamentale f_0 , celui-ci passera bien à travers le filtre, et l'harmonique 2 aussi (les deux raies seront sur le plateau horizontal du diagramme de Bode du gain).
- Si f_c est petite devant la fréquence fondamentale f_0 , l'harmonique 2 sera 2 fois plus atténué que le fondamental (les deux raies seront dans le domaine de pente -20dB/déc., domaine pour lequel le module de la fonction de transfert est divisé par deux quand la fréquence est multipliée par deux), mais les deux seront nettement atténués.

Un bon compromis est donc de choisir f_c égale à la fréquence du fondamental, donc $f_c = f_0 = \frac{1}{T_0}$, d'où $\boxed{\frac{r}{L} = \frac{2\pi}{T_0}}$.

Q40 : Notons Q la « capacité » de l'accumulateur (de même dimension qu'une charge électrique), et η le rendement de charge, de valeur 70%. Notons i_{cp} l'intensité du courant de charge préconisé, et Δt la durée de charge cherchée. Puisqu'une intensité de courant est un débit de charge, on a : $\frac{Q}{\eta} = i_{cp} \Delta t$, d'où $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{\eta i_{cp}} = \frac{2000}{0,7 \times 200} = 14\text{h}}$.

Q41 : On compte, sur la figure 10, 9 quasi-périodes T_0 pendant une durée de $9 \times 25 \mu\text{s}$, d'où $\boxed{f_0 = 38 \text{ kHz}}$.

On choisit une haute fréquence afin de ne pas avoir besoin de mettre en œuvre un grand nombre de spires de bobines. En effet, pour N spire, la f.é.m. induite est $e = -NS \frac{dB}{dt}$, donc plutôt que de jouer sur N , on préfère jouer sur $\frac{d}{dt}$.