

Problème n°1 : ELECTROSTATIQUE

I) On considère un cylindre circulaire, de rayon R , d'axe Oz , infiniment long, uniformément chargé en volume avec une densité volumique de charges $\rho > 0$.

1°) Quel système de coordonnées vous semble le plus approprié pour étudier le champ électrique créé par cette distribution ?

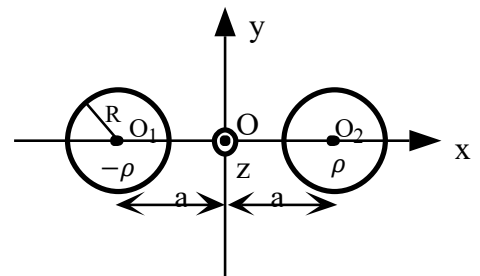
2°) Déterminer soigneusement la direction du champ électrique en tout point de l'espace (les résultats non justifiés proprement ne seront pas pris en compte).

3°) Quelles sont les variables dont dépend réellement la (ou les) composante(s) du champ électrique ? Expliquer

4°) Déterminer le vecteur champ électrique et le potentiel à l'extérieur du cylindre. On ne cherchera pas à déterminer la constante d'intégration. On n'oubliera pas de contrôler l'homogénéité des résultats.

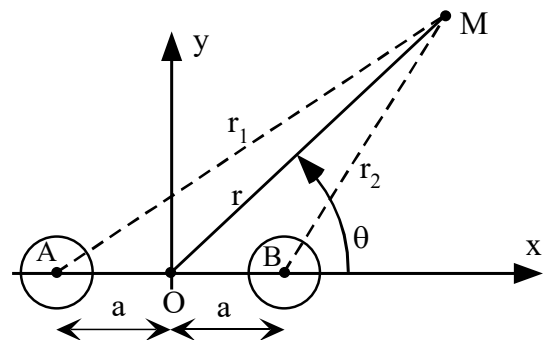
5°) Reprendre rapidement l'ensemble des questions (sauf le calcul du potentiel) dans le cas où ρ est une fonction de la distance à l'axe : $\rho(r) = \rho_0 + \alpha r$ où ρ_0 et α sont des constantes positives.

II) On considère à présent 2 cylindres circulaires de rayon R parallèles d'axes O_1z et O_2z . L'un porte une densité volumique de charges uniforme $\rho > 0$ et l'autre une densité volumique de charges uniforme $\rho' = -\rho$ (voir schéma). O_1 est le point d'intersection de l'axe du cylindre chargé négativement avec le plan xOy et O_2 le point d'intersection de l'axe du cylindre chargé positivement avec le plan xOy . O_1 et O_2 sont sur l'axe Ox . On donne $O_1O_2 = 2a$.



6°) On s'intéresse au champ électrique en un point M quelconque du plan xOy de la figure ci-contre, et situé à l'extérieur des 2 cylindres. On note r_1 la distance entre M et O_1 . On note r_2 la distance entre M et O_2 .

Déterminer le vecteur champ électrique en M en fonction de ρ , R , ϵ_0 , r_1 , r_2 , $\vec{O_1M}$, $\vec{O_2M}$.



7°) On s'intéresse au champ électrique en un point M quelconque appartenant au plan yOz .

a) Quelle est la direction du champ en M ? Expliquer.

b) On prend à présent un point M de l'axe Oy et on note y sa coordonnée sur cet axe. Dédurre de ce qui précède l'expression du vecteur champ électrique en M en fonction de ρ , R , ϵ_0 , a , y , et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

8°) En utilisant le théorème de superposition pour le potentiel (pas pour le champ électrique), déterminer le potentiel électrostatique en tout point M quelconque du plan xOy de la figure, situé à l'extérieur des 2 cylindres (pas forcément sur l'axe Oy) en fonction (entre autres), de $r_1 = O_1M$, et $r_2 = O_2M$. On prendra $V = 0$ en tout point de l'axe Oy . Montrer que le potentiel est le même dans tout le plan yOz .

9°) Soit une surface fermée en forme de cylindre circulaire, d'axe Oz , de rayon R_0 avec $R_0 > a + R$. Ce cylindre s'étend de $z = -b$ à $z = +b$. Déterminer le flux du champ électrique à travers cette surface.

Problème n°2 : MAGNETOSTATIQUE À propos du champ magnétique

I Généralités sur le champ magnétique

I.1) Le champ magnétique est dit à flux conservatif. Écrire cette propriété sous forme locale, puis sous forme intégrale. Indiquer ce que cela signifie concrètement.

La **figure 1** donne quatre cartes de champ qui représentent une coupe dans un plan perpendiculaire à l'axe Oz d'un champ de vecteur $\vec{A}$, invariant par toute translation suivant l'axe Oz . Parmi les cartes de champ proposées ci-dessous, lesquelles sont vraisemblablement celles d'un champ à flux conservatif ? Pour aider à la réflexion, on pourra imaginer des petites surfaces fermées de formes bien adaptées, afin de voir si, dans les zones associées à ces petites surfaces, le champ est à flux conservatif.

On rappelle que $\text{div } \vec{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cartésiennes et que $\text{div } \vec{A} = \frac{1}{r} \frac{\partial r A_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial A_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial A_z}{\partial z}$ en coordonnées cylindriques.

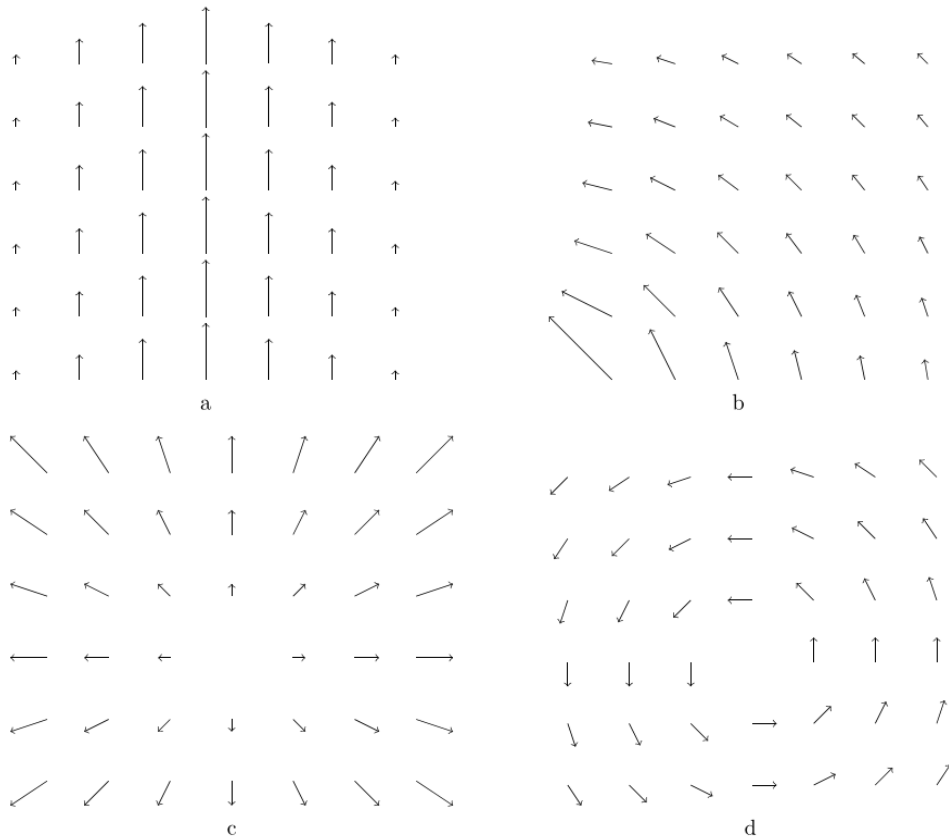


Figure 1

I.2) Énoncer l'équation de Maxwell-Ampère puis le théorème d'Ampère dans le cadre de la magnétostatique (sans matériau magnétique). Parmi les cartes de champs proposées, lesquelles sont celles d'un champ à rotationnel nul ? (On pourra s'appuyer sur le théorème de Stokes pour répondre, en définissant soigneusement des petits contours). Lesquelles pourraient être celles d'un champ magnétique ?

I.3) Définir très brièvement (5 lignes maximum) les notions de plan de symétrie et d'antisymétrie d'une distribution de courant et les propriétés du champ qui en résulte.

On s'intéresse à l'image dans un miroir d'un solénoïde (voir **figure 2, sur laquelle il est représenté en coupe, avec un miroir à côté**). Indiquer en la justifiant, la direction et le sens du champ magnétique dans le solénoïde image par rapport à celui du solénoïde initial.

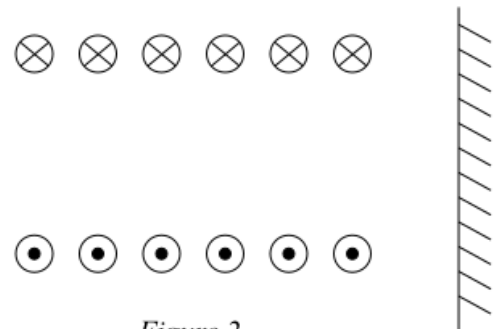


Figure 2

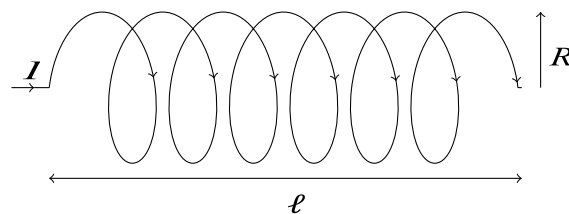


Figure 3

I.4) On s'intéresse à un solénoïde de longueur ℓ et de rayon R comportant N spires (voir **figure 3**).

- À quelle condition peut-on dire que ce solénoïde est infiniment long ? On admettra dans la suite que cette condition est réalisée.
- Identifier les propriétés de symétrie et d'invariance du champ à l'intérieur du solénoïde.
En déduire la direction du champ et les variables dont il dépend.
- En appliquant le théorème d'Ampère à un contour bien choisi, montrer que le champ est uniforme à l'intérieur du solénoïde. Donner alors sa valeur, en admettant qu'il est nul à l'extérieur.

d) Application numérique

Calculer B pour : $N = 1000$ spires, $\ell = 1,00$ m, $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ (SI), $I = 1,00$ A.

Commenter. Comment faire pour obtenir un champ plus intense ? (faire une étude rapide et systématique des différents paramètres et critiquer).

II Tube métallique dans un solénoïde

Une bobine, d'axe Oz , de longueur ℓ et de section S , assimilée à un solénoïde infiniment long, est alimentée par un courant sinusoïdal de la forme : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$. Sa résistance est R_0 , son inductance est L_0 . On introduit dans cette bobine un cylindre conducteur creux, de rayon a , d'épaisseur b petite devant le rayon, de même longueur et de conductivité σ (cf figure 9).

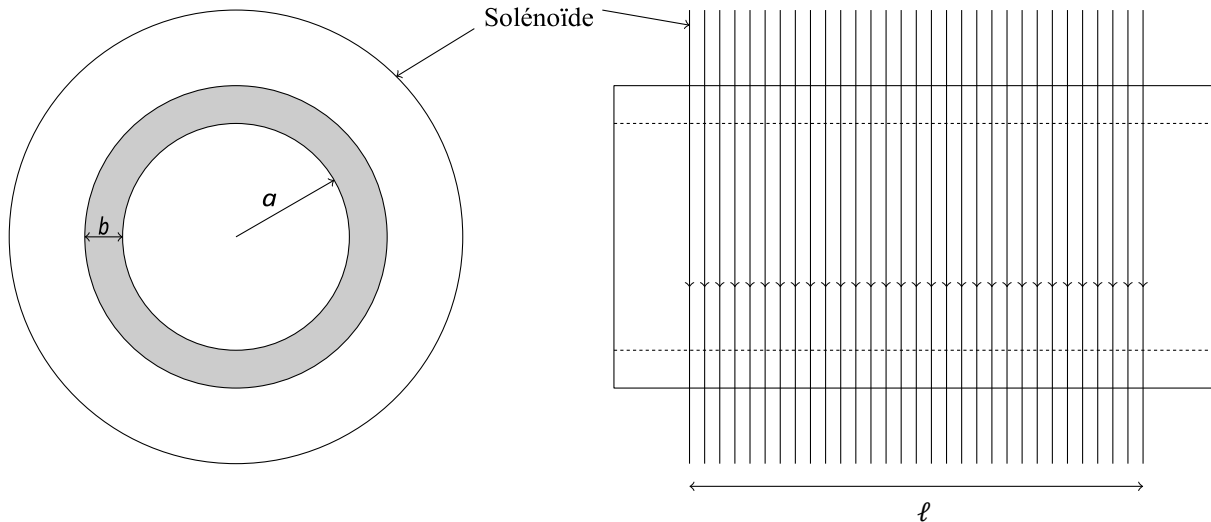


Figure 9

II.A – II.A.1) On appelle $\vec{B}_0$ le champ magnétique à l'intérieur du solénoïde créé par le courant $i(t)$. Rappeler l'expression de $\vec{B}_0$.

II.A.2) Au moyen d'une étude énergétique, calculer l'inductance du solénoïde en l'absence du cylindre. On donne N le nombre total de spires et S la section du solénoïde.

II.B – II.B.1) Il apparaît dans le tube un vecteur densité de courant induit $\vec{j}$. Avec des arguments de symétrie, donner la géométrie de $\vec{j}$ et du champ $\vec{B}_1$ qu'il crée.

II.B.2) a) On suppose que j a même valeur en tout point de l'intérieur du tube. Justifier, en faisant une analogie avec un solénoïde infiniment long, que $B_1 = \mu_0 b j$ à l'intérieur du cylindre et que $\vec{B}_1$ est nul à l'extérieur.

b) Exprimer $\vec{j}$ en fonction du champ $\vec{E}$ et de la conductivité σ .

II.C – II.C.1) Écrire l'équation de Maxwell Faraday.

II.C.2) Le champ total complexe $\vec{B}$ est égal à $\vec{B}_0 + \vec{B}_1$. En utilisant l'équation de Maxwell-Faraday sous sa forme intégrale, en déduire l'expression de $\vec{B}_1$ en fonction de $\vec{B}_0$.

On trouve (i désigne le nombre complexe tel que $i^2 = -1$) : $\vec{B}_1 = \frac{1}{-1 + \frac{2i}{\mu_0 \omega a b \sigma}} \vec{B}_0$

II.C.3) Calculer le flux du champ magnétique total en distinguant 2 zones d'application. Calculer la fem d'induction.

II.D – Écrire alors la loi d'Ohm généralisée pour le solénoïde sous la forme : $\underline{u} = \underline{Z} I$ avec $\underline{Z} = R(\omega) + i\omega L(\omega)$

$$\text{où } R(\omega) = R_0 + \frac{\pi a^2}{S} \frac{\frac{2L_0}{\mu_0 \sigma a b}}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma a b \omega}\right)^2} \text{ et } L(\omega) = L_0 \left(1 - \frac{\pi a^2}{S} \frac{1}{1 + \left(\frac{2}{\mu_0 \sigma a b \omega}\right)^2} \right).$$

Problème n°3 : CHIMIE

L'âge de fer remonte à la préhistoire. Bien que ce soit le métal le plus utilisé depuis plus de trois millénaires pour confectionner des objets divers et variés, nous n'avons que très peu de vestiges anciens façonnés dans ce métal, par comparaison à ceux en or ou en argent.

Le développement de la métallurgie a connu un essor considérable au milieu du 20^{ème} siècle en adéquation avec les industries automobiles, aéronautiques et militaires. Chaque métal a, en règle générale, son domaine d'utilisation. Le cuivre, les alliages à base d'aluminium et accessoirement l'argent et l'or sont les métaux les plus employés pour les conducteurs électriques.

L'acier (fer + carbone) reste l'un des matériaux les plus utilisés dans l'élaboration de structures des navires et des plates-formes offshore. Il tend néanmoins à être concurrencé par des alliages à base d'aluminium et par des matériaux composites dans la structure des véhicules automobiles modernes. Au quotidien, et compte-tenu de l'arrivée des plaques de cuisson à induction, nous délaissons les anciennes marmites en cuivre contre des casseroles en acier recouvertes d'un fin revêtement de surface.

Le fer est extrêmement sensible à la corrosion et en particulier en milieu marin. C'est un problème industriel préoccupant. Chaque seconde, environ 5 tonnes d'acier sont transformées en oxydes de fer dans le monde. Outre cet aspect économique, il ne faut pas négliger les enjeux liés à la sécurité des biens et des personnes via la solidité et la durabilité des véhicules et des infrastructures.

La corrosion peut être uniforme ou localisée sous forme de rayures ou de piqûres. C'est le phénomène de piqûres qui est le plus sournois. Plus difficilement détectable, il aboutit très rapidement à une perforation totale, contrairement à la corrosion uniforme.

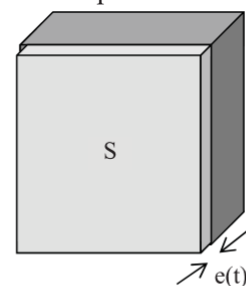


Figure 2 - Plaque et épaisseur $e(t)$ touchée par la corrosion

Vitesse de corrosion

Q1. On considère ici une plaque métallique (figure 2) soumise à un phénomène de corrosion uniforme. On suppose qu'à la date $t = 0$, la plaque ne présente aucune trace de corrosion.

À cause de la circulation d'un courant de corrosion I_{cor} , supposé permanent, de densité de courant j , le métal X qui constitue la plaque s'oxyde en l'ion X^{2+} suivant la demi-réaction $X = X^{2+} + 2e^-$.

On note S la surface de cette plaque métallique, ρ_X la masse volumique du métal X , M_X sa masse molaire et $e(t)$ l'épaisseur de la portion de la plaque qui est corrodée à la date t .

Relier, par l'intermédiaire de la masse volumique, la masse $m(t)$ de métal corrodé à la date t , à S et à $e(t)$.

Déterminer la masse de métal corrodé à la date t , en fonction de I_{cor} , M_X , $\mathcal{F}$ (la constante de Faraday) et t .

En déduire l'expression de la vitesse de diminution de l'épaisseur de la plaque : $v_{cor} = \frac{e(t)}{t}$, en fonction de j , M_X , $\mathcal{F}$ et ρ_X .

Application numérique : Evaluer la valeur numérique du coefficient de proportionnalité $K = \frac{v_{cor}}{j}$ dans le cas du

cuivre lorsque v_{cor} et j sont exprimées respectivement en mm/an et en A/m².

Le tableau 1 recense les valeurs de K pour d'autres métaux.

	Fe	Ni	Zn
$K \left(\frac{\text{mm.an}^{-1}}{\text{A.m}^{-2}} \right)$	1,16	1,08	1,5

Tableau 1 – Valeurs de K

Les métallurgistes s'accordent sur le fait

que K est de l'ordre de 1 mm/an, pour une densité de courant de 1 A/m², quel que soit le métal.

Dans la plupart des applications, on tolère une vitesse de corrosion de l'ordre de 1 µm/an.

Sachant que pour une plaque de fonte laissée à l'air libre ou enterrée, la densité du courant de corrosion est de l'ordre de 10⁻² A/m², évaluer l'ordre de grandeur de la vitesse de corrosion en mm/an et conclure.

Protection des canalisations en fonte par anode sacrificielle

Diagramme E-pH du magnésium

Q2. On considère une solution de chlorure de magnésium (Mg^{2+} , 2Cl^-) de concentration égale à 10⁻² mol/L.

On verse progressivement de la soude concentrée sans variation notable du volume global. Déterminer à partir de quelle valeur du pH, noté pH_1 , le précipité $\text{Mg}(\text{OH})_2$ apparaît.

Q3. On donne (page suivante) l'allure du diagramme E-pH du magnésium pour une concentration de travail en espèces dissoutes $C_{tr} = 10^{-2}$ mol/L (figure 3). Pour ce diagramme, les espèces considérées sont $Mg(OH)_2$, Mg^{2+} et Mg.

Préciser les nombres d'oxydation de l'élément magnésium Mg dans chacune des espèces considérées et attribuer à chacun des domaines (D_1 , D_2 , D_3) une espèce chimique.

Q4. Définir en quelques mots les termes de corrosion, passivation et immunité. Indiquer dans quelle(s) zone(s) du diagramme intervient chacun de ces phénomènes.

Application à la protection d'une canalisation

Q5. Les canalisations en fonte (alliage à base de fer) sont généralement enterrées dans le sol. Pour les protéger de la corrosion, on les relie, à l'aide d'un fil conducteur, à une électrode de magnésium, elle-aussi enterrée (figure 4). Cet ensemble constitue une pile.

Reproduire sur votre copie la figure 4. Indiquer où sont l'anode et la cathode.

Indiquer également le sens du courant de corrosion et le sens de déplacement des électrons. Expliquer comment le circuit électrique est fermé.

Quel agent se réduit à la cathode ? Ecrire la réaction électrochimique globale pour un pH voisin de 7.

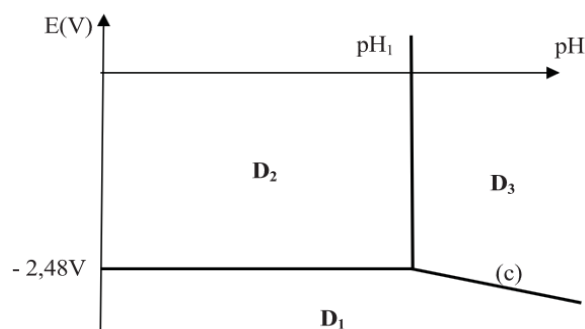


Figure 3 - Diagramme E-pH du magnésium

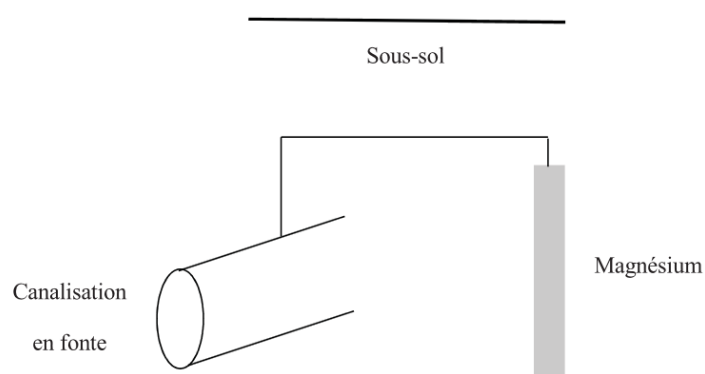


Figure 4 - Canalisation en fonte et anode sacrificielle

Analyses des phénomènes physiques et chimiques

Il est demandé de répondre aux questions suivantes par une argumentation claire, précise et concise n'excédant pas 30 mots. Vous soulignerez les mots clés ou les critères analytiques correspondant aux idées principales.

Il ne sera pas tenu compte des réponses ne satisfaisant pas à ces exigences

Q6. Pourquoi n'avons-nous que très peu de vestiges anciens façonnés en acier par comparaison avec ceux en argent ou en or ?

Q7. Pourquoi l'acier est-il concurrencé par l'utilisation d'aluminium ou de matériaux composites dans les industries automobiles et aéronautiques ?

Q8. Pourquoi les anciennes marmites de la cuisine traditionnelle étaient-elles en cuivre ?

Pourquoi les casseroles en cuivre ne sont-elles pas compatibles avec l'utilisation de plaques de cuisson à induction ?

Ces réponses seront justifiées par des critères analytiques reposant sur les propriétés des matériaux.

Q9. Comment expliquez-vous qu'une plaque de fer enterrée ou laissée à l'air libre soit plus sensible à la corrosion que son homologue en aluminium ?

Q10. Pourquoi le phénomène de corrosion est-il plus sévère en milieu marin ?

Compte-tenu de la grande résistivité des sols, pourquoi est-il préférable d'utiliser, pour les canalisations enterrées, une anode sacrificielle en magnésium plutôt qu'en zinc ?

DonnéesPotentiels standards :

$$E^\circ(\text{Cu}^{2+}/\text{Cu}) = 0,34 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Zn}^{2+}/\text{Zn}) = - 0,76 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Fe}^{2+}/\text{Fe}) = - 0,44 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Al}^{3+}/\text{Al}) = - 1,68 \text{ V}$$

$$E^\circ(\text{Mg}^{2+}/\text{Mg}) = - 2,36 \text{ V}$$

Produit de solubilité :

$$\text{p}K_s(\text{Mg}(\text{OH})_2) = 10,7$$

Masses molaires et masses volumiques :

	Masses molaires (g.mol^{-1})	Masses volumiques (kg.m^{-3})
Cuivre	63,5	8 900
Aluminium	27	2 700
Magnésium	24,3	1 750

Conductivités électriques, thermiques et perméabilités magnétiques :

	γ (S.m^{-1})	λ ($\text{W.m}^{-1}.\text{K}^{-1}$)	μ (H.m^{-1})
Fer	$1,0 \cdot 10^7$	80	$10^4 \cdot \mu_0$
Cuivre	$6,0 \cdot 10^7$	401	$\approx \mu_0$
Aluminium	$3,8 \cdot 10^7$	237	$\approx \mu_0$

Constantes physiques :

Perméabilité magnétique du vide : $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H.m}^{-1}$.

Constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

Constante d'Avogadro : $N_a = 6,022 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$.

Charge élémentaire d'un proton : $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$.

Constante de Faraday : $F = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1} = N_a \cdot e$ (avec e = charge élémentaire).