

MOUVEMENT D'UNE PARTICULE CHARGÉE

On suppose dans ce problème, que la vitesse des particules chargées est très inférieure à la vitesse de la lumière dans le vide, ce qui revient à négliger toute correction relativiste. Les effets de la gravitation seront également négligés.

Données :

- charge électrique élémentaire : $e = 1,6 \cdot 10^{-19}$ C.
- vitesse de la lumière dans le vide : $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹.
- perméabilité et permittivité du vide : $\mu_0 = 4\pi 10^{-7}$ H.m⁻¹ et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi 10^9}$ F.m⁻¹.

A. Mouvement d'une particule chargée dans un champ magnétique uniforme

1. On considère un référentiel $\mathcal{R}$ galiléen muni d'un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$. Une particule chargée de charge q positive et de masse m pénètre avec un vecteur vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ au point O de coordonnées $(0, 0, 0)$ dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$ perpendiculaire à $\vec{v}_0$ (Figure ??).

Q1

(a) Montrer que la norme de la vitesse de la particule est constante.

Q2

(b) Montrer que la trajectoire est plane.

Q3

(c) On admet que la trajectoire est circulaire. Montrer que le rayon est égal à :

$$R = \frac{mv_0}{qB}$$

Pour ces questions, vous pourrez, si vous le souhaitez, introduire la quantité complexe $\underline{u}(t) = x(t) + j y(t)$.

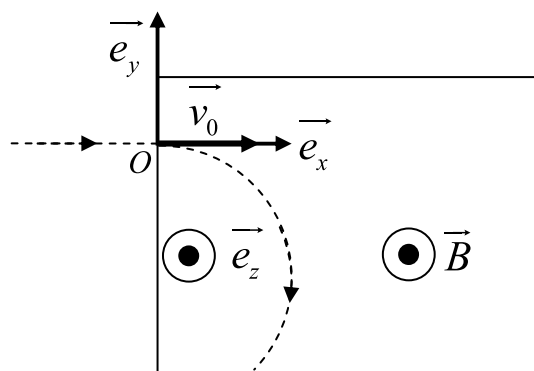


FIGURE 1 – Trajectoire d'une particule de charge q positive dans une région de l'espace où règne un champ magnétique uniforme.

2. Pour séparer les deux isotopes naturels de l'Uranium (l'uranium 238 et l'uranium 235), il avait été envisagé d'utiliser un spectrographe de masse. Cet appareil comporte trois parties, représentées en Figure ??, où règne un vide poussé.

Les atomes d'uranium sont ionisés dans une chambre d'ionisation en U^+ (de charge électrique $q_{U^+} = e$) d'où ils sortent par la fente F_1 avec une vitesse négligeable.

Ces ions sont accélérés par un champ électrostatique uniforme imposé par une tension

$$W = V_{P_2} - V_{P_1} \text{ entre les plaques } P_1 \text{ et } P_2.$$

Enfin, les ions pénètrent dans une chambre de déviation où règne un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ ($B = 0,1$ T) perpendiculaire au plan de la figure. Ils décrivent alors deux trajectoires circulaires de rayons R_1 et R_2 et parviennent dans deux collecteurs C_1 et C_2 .

Les masses de l'uranium 235 et de l'uranium 238 sont : $m_{U5} = 235$ u.m.a. et $m_{U8} = 238$ u.m.a.. Une unité de masse atomique (u.m.a.) vaut : $1 \text{ u.m.a.} \simeq 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg.

Q4

(a) Quel est le signe de la tension W ? Justifier.

- (b) Donner l'expression littérale de la vitesse v_{U8} de l'isotope $^{328}\text{U}^+$ en F_2 , en fonction de e , W et m_{U8} . Justifier votre réponse.
- (c) Calculer la valeur de la tension W pour que la distance entre les collecteurs C_1 et C_2 soit égale à $d = 2$ cm.

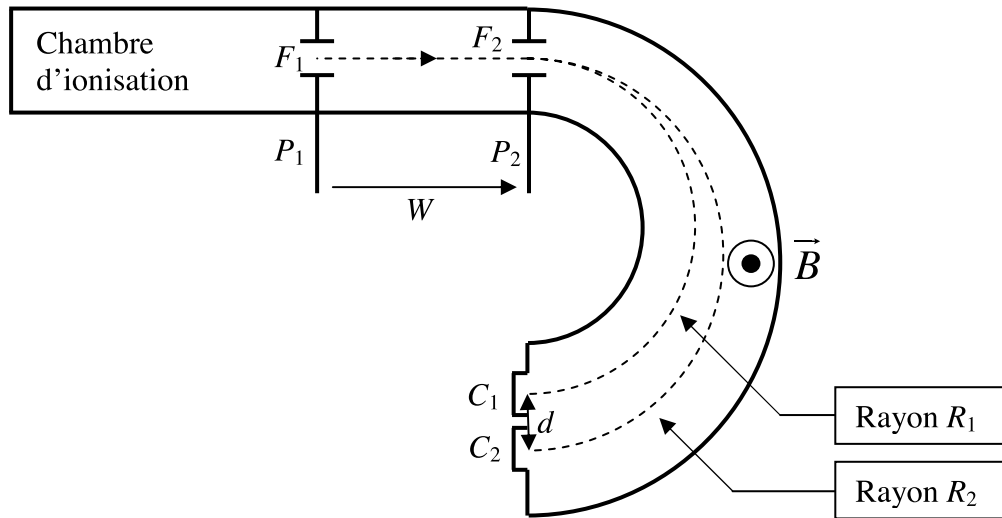


FIGURE 2 – Schéma de principe du spectrographe de masse.

B. Le cyclotron

Le cyclotron est formé de deux demi-cylindres conducteurs creux D_1 et D_2 dénommés *dees* et séparés par un intervalle étroit (Figure ??). Un champ magnétique uniforme $\vec{B}$ ($B = 0,1$ T) règne à l'intérieur des *dees*, sa direction est parallèle à l'axe des demi-cylindres.

Un champ électrostatique variable $\vec{E}$ peut être établi dans l'intervalle étroit qui sépare les *dees* en appliquant une tension alternative sinusoïdale $u(t)$ qui atteint sa valeur maximale $U_m = 10^5$ V lorsque le proton traverse cet espace.

Les protons, de masse $m_P = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg et de charge électrique $q_P = e$, sont injectés au centre du cyclotron avec une énergie cinétique négligeable. Dans chaque *dee*, ils décrivent des trajectoires demi-circulaires de rayon croissant. Le rayon de la trajectoire des protons à la sortie du cyclotron est $R_S = 50$ cm.

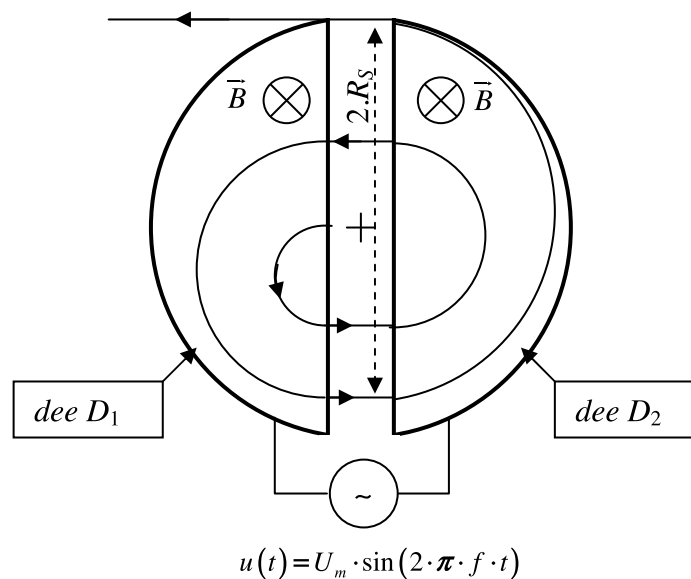


FIGURE 3 – Schéma de principe du cyclotron.

- Q7 1. Donner l'expression littérale de la durée $T_{1/2}$ mise par un proton pour effectuer un demi-tour en fonction de m_P , e et B . Qu'en déduisez-vous ?
- Q8 2. Justifier le choix d'une tension $u(t)$ alternative.
- Q9 3. En déduire l'expression, puis la valeur de la fréquence f de la tension alternative sinusoïdale $u(t) = U_m \sin(2\pi f t)$ pour que les protons subissent une accélération maximale à chaque traversée. On négligera le temps de parcours d'un *dee* à l'autre.
- Q10 4. Déterminer l'expression, puis la valeur de l'énergie cinétique E_{CS} des protons à la sortie du cyclotron.
- Q11 5. Déterminer l'expression du nombre de tours N effectués par les protons dans le cyclotron jusqu'à leur sortie en fonction de e , R_S , B , m_P et U_m . Effectuer l'application numérique.
6. Puissance rayonnée : pour une particule non relativiste, toute particule chargée de charge q et d'accélération a rayonne une puissance P_r , donnée par la formule de Larmor :

$$P_r = \frac{\mu_0 q^2}{6\pi c} a^2$$

On rappelle que c est la vitesse de la lumière dans le vide.

- Q12 (a) Montrer qu'une particule chargée de charge q , de vitesse v , qui décrit une trajectoire circulaire uniforme de rayon R , rayonne une puissance P_r de la forme : $P_r = \alpha v^4$. Exprimer le coefficient α en fonction de q , c , μ_0 et R .
- Q13 (b) Calculer **l'énergie** rayonnée par le proton dans le cyclotron lors de sa dernière trajectoire demi-circulaire de rayon $R_S = 50$ cm.
- Q14 (c) Conclure.

DES COULEURS ÉLECTRONIQUES

Certaines molécules ont la propriété d'absorber la lumière. Selon la longueur d'onde des radiations absorbées, le composé apparaît coloré...ou pas. On utilise ainsi depuis la fin du XIX^e siècle en photographie et dans l'industrie des colorants des molécules de la famille des cyanines à chaîne ouverte (ou streptocyanines), de formule $R_2 N^+ = CH - [CH = CH]_n - NR_2$ (avec R un radical carboné de type CH_3). Les cyanines peuvent également servir de marqueurs fluorescents en médecine et en biologie. On se propose de modéliser le comportement quantique de ces nanostructures pour comprendre l'origine de leur couleur.

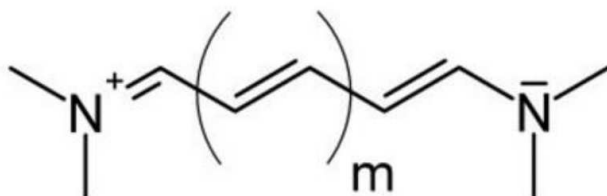


FIGURE 1 – Structure de la molécule de cyanine.

Les streptocyanines (strepto= «tordu») sont des chaînes carbonées linéaires terminées à chaque extrémité par un atome d'azote. La chaîne entre parenthèses est répétée m fois.

Des mesures spectroscopiques en laboratoire ont permis d'obtenir la longueur d'onde de la lumière **absorbée** par des cyanines de différentes tailles :

m	0	1	2	3	4
$\lambda(\text{nm})$	313	416	519	625	735

Q15

1. Prévoir la couleur de chaque composé éclairé par de la lumière blanche.

La chaîne carbonée principale de la molécule de cyanine est en fait une alternance de simples liaisons C—C et de doubles liaisons C = C permettant aux électrons π d'être délocalisés par effet mésomère sur l'ensemble de la molécule. Les électrons des doublets non liants portés par les atomes d'azote participent également à cet effet. Tous les électrons délocalisés partagent ainsi le même espace confiné et se répartissent sur les différents niveaux d'énergie de la boîte quantique équivalente. La lumière absorbée par la molécule permet ainsi aux électrons de changer de niveau d'énergie et d'effectuer des transitions vers des niveaux d'énergie plus grande.

On modélise simplement une molécule de cyanine par une boîte quantique (*i.e.* un puit de potentiel infini) unidimensionnelle de largeur L correspondant à la longueur totale de la molécule. Les fonctions d'onde possibles d'un électron placé dans cette boîte quantique sont en fait analogues aux modes propres d'une corde fixée à ses extrémités. On rappelle qu'en mécanique quantique on associe à toute particule une onde de matière de longueur d'onde λ_{DB} (longueur d'onde de de Broglie) qui s'exprime en fonction de sa quantité de mouvement p par la relation :

$$\lambda_{DB} = \frac{h}{p}$$

où $h = 6,63 \cdot 10^{-34}$ J.s est la constante de Planck.

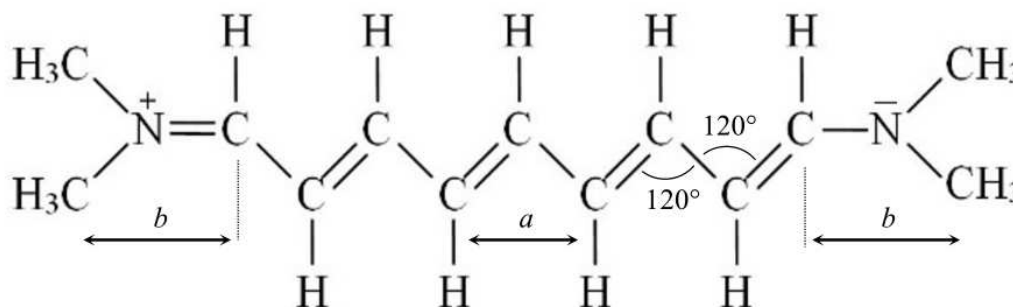
Q16

2. Représenter l'allure des trois premiers modes propres d'une corde de longueur L fixée à ses extrémités et exprimer la longueur d'onde λ_n du mode propre n en fonction de L et n . Justifier physiquement les conditions aux limites pour l'onde de matière associée à un électron délocalisé dans une molécule de cyanine.

Q17

3. En identifiant la longueur d'onde de de Broglie d'un électron à la longueur d'onde du mode propre n de la corde de longueur L , exprimer l'énergie E_n de l'électron dans le niveau n de la boîte quantique en fonction de n , h , L et de sa masse m_e .

- Q18 4. Représenter, sur une échelle d'énergie, les niveaux d'énergie d'un électron dans la molécule. Montrer que le confinement spatial dans la molécule se traduit par une énergie minimale non nulle de l'électron. Ce résultat était-il prévisible ?
- Q19 5. On note m l'indice de répétition de la chaîne carbonée dans la molécule. Déterminer le nombre d'électrons dans la boîte quantique formée par la cyanine- m .
D'après le principe d'exclusion de Pauli (*que vous verrez plus tard en chimie*), chaque niveau d'énergie ne peut accueillir que deux électrons. Par exemple, si la boîte quantique contient 1 électron, celui-ci occupe le niveau d'énergie E_1 , si l'on ajoute un deuxième électron, celui-ci possède également une énergie E_1 . Mais, si l'on ajoute un troisième électron, alors son énergie sera E_2 , car le niveau E_1 est déjà occupé par deux électrons.
- Q20 6. Quel est le niveau de plus grande énergie occupée ? Quel est le niveau de plus faible énergie libre ? Exprimer la variation minimale d'énergie ΔE d'un électron effectuant une transition vers un niveau d'énergie plus élevée, puis la longueur d'onde λ de la lumière absorbée par la cyanine- m lors de cette transition.
Dans la chaîne carbonée des molécules de cyanine étudiées, les liaisons C—C et C = C forment des angles de 120° et ont une longueur moyenne de 144 pm. On appelle a la longueur moyenne d'un groupement C = C—C le long de la molécule. Les groupes —N—(CH₃)₂ en bout de chaîne occupent par ailleurs chacun une longueur $b = 284$ pm.

FIGURE 2 – Structure de la molécule de cyanine $m = 3$.

- Q21 7. Préciser la valeur numérique de a (*Attention : lisez bien l'énoncé, ce n'est pas 288 pm*) et exprimer la longueur totale L de la molécule de cyanine- m en fonction de a , b et m .
- Q22 8. Montrer que le modèle proposé permet d'interpréter les mesures spectroscopiques. En déduire la masse d'un électron et comparer à la valeur tabulée connue de $9,11 \cdot 10^{-31}$ kg.
- Q23 9. Pourquoi le composé $m = 5$ n'est-il pas utilisé comme colorant ?