

Exprimer un résultat

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.

Unités et multiples



Entraînement 1.1 — Multiples du mètre.



Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

- | | | | | | |
|---------------|----------------------|---------------|----------------------|---------------|----------------------|
| a) 1 dm | <input type="text"/> | c) 3 mm | <input type="text"/> | e) 5,2 pm ... | <input type="text"/> |
| b) 2,5 km ... | <input type="text"/> | d) 7,2 nm ... | <input type="text"/> | f) 13 fm | <input type="text"/> |



Entraînement 1.2 — Multiples du mètre *bis*.



Écrire les longueurs suivantes en mètre et en écriture scientifique.

- | | | | | | |
|---------------|----------------------|--------------|----------------------|---------------|----------------------|
| a) 150 km .. | <input type="text"/> | c) 234 cm .. | <input type="text"/> | e) 0,23 mm . | <input type="text"/> |
| b) 0,7 pm ... | <input type="text"/> | d) 120 nm .. | <input type="text"/> | f) 0,41 nm .. | <input type="text"/> |



Entraînement 1.3 — Vitesse d'un électron.



La vitesse d'un électron est $v = \sqrt{\frac{2eU}{m_e}}$, où $e = 1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$ est la charge d'un électron, $U = 0,150 \text{ kV}$ est une différence de potentiel et $m_e = 9,1 \cdot 10^{-28} \text{ g}$ est la masse d'un électron.

- a) Calculer v en m/s

- b) Calculer v en km/h



Entraînement 1.4 — Avec des joules.



On considère la grandeur $T = 0,67 \text{ kW} \cdot \text{h}$. On rappelle que $1 \text{ J} = 1 \text{ W} \cdot \text{s}$.

Convertir T en joule, en utilisant le multiple le mieux adapté

Entraînement 1.5 — Valeur d'une résistance.



La résistance d'un fil en cuivre est donnée par la formule $R = \frac{\ell}{\gamma S}$, où $\gamma = 59 \text{ MS/m}$ est la conductivité du cuivre, où $\ell = 1,0 \cdot 10^3 \text{ cm}$ est la longueur du fil et où $S = 3,1 \text{ mm}^2$ est sa section.

L'unité des résistances est l'ohm, notée « Ω ». L'unité notée « S » est le siemens ; on a $1 \Omega = 1 \text{ S}^{-1}$.

Calculer R (en ohm)

Entraînement 1.6 — Ronna, ronto, quetta et quecto.



En novembre 2022, lors de la 27^e réunion de la Conférence générale des poids et mesures, a été officialisée l'existence de quatre nouveaux préfixes dans le système international :

Facteur multiplicatif	Préfixe	Symbole
10^{27}	ronna	R
10^{-27}	ronto	r
10^{30}	quetta	Q
10^{-30}	quecto	q

On donne les masses de quelques objets :

Soleil	Jupiter	Terre	proton	électron
$1,99 \cdot 10^{30} \text{ kg}$	$1,90 \cdot 10^{27} \text{ kg}$	$5,97 \cdot 10^{24} \text{ kg}$	$1,67 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$	$9,10 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$

Convertir ces masses en utilisant ces nouveaux préfixes (en écriture scientifique).

a) Soleil (en Rg)

f) Terre (en Qg)

b) Soleil (en Qg)

g) proton (en rg)

c) Jupiter (en Rg)

h) proton (en qg)

d) Jupiter (en Qg)

i) électron (en rg)

e) Terre (en Rg)

j) électron (en qg)

Règle de trois et pourcentages

Entraînement 1.7 — Un peu de cuisine.



Les ingrédients pour un gâteau sont : 4 œufs, 200 g de farine, 160 g de beurre, 100 g de sucre et 4 g de sel. On décide de faire la recette avec 5 œufs. Combien de grammes faut-il de

- | | | | |
|-------------------|----------------------|------------------|----------------------|
| a) farine ? | <input type="text"/> | c) sucre ? | <input type="text"/> |
| b) beurre ? | <input type="text"/> | d) sel ? | <input type="text"/> |

Entraînement 1.8 — Pourcentages.



Convertir en pourcentage :

- | | | | |
|------------------------|----------------------|--------------------------|----------------------|
| a) 0,1 | <input type="text"/> | d) $\frac{1}{20}$ | <input type="text"/> |
| b) 0,007 | <input type="text"/> | e) $\frac{9}{5}$ | <input type="text"/> |
| c) $\frac{1}{2}$ | <input type="text"/> | f) un quart de 2 % | <input type="text"/> |

Entraînement 1.9 — Énergie en France 1.



La consommation d'énergie primaire en France (en 2020) est : nucléaire 40,0 %, pétrole 28,1 %, gaz 15,8 %, biomasse 4,4 %, charbon 2,5 % hydraulique 2,4 %, éolien 1,6 %.

Quel pourcentage occupent les autres énergies (solaire, biocarburants, etc.) ?

Entraînement 1.10 — Énergie en France 2.



La consommation primaire totale en France est de 2 571 TWh.

À l'aide des données de l'entraînement précédent, calculer (en « TWh ») les énergies créées par les sources suivantes :

- | | | | |
|--------------------|----------------------|----------------------|----------------------|
| a) nucléaire | <input type="text"/> | e) charbon | <input type="text"/> |
| b) pétrole | <input type="text"/> | f) hydraulique | <input type="text"/> |
| c) gaz | <input type="text"/> | g) éolien | <input type="text"/> |
| d) biomasse | <input type="text"/> | h) autre | <input type="text"/> |

Entraînement 1.11 — Abondance des éléments dans la croûte terrestre.



L'abondance chimique d'un élément peut être exprimée en « parties par centaine » (notée %, on parle communément de « pourcentage »), en « parties par millier » (notée ‰, on parle aussi de « pour mille ») ou encore en « partie par millions » (notée « ppm »).

Les abondances de quelques éléments chimiques constituant la croûte terrestre sont :

Silicium	Or	Hydrogène	Fer	Oxygène	Cuivre
275‰	$1,0 \cdot 10^{-7} \%$	1,4 ‰	50 000 ppm	46 %	50 ppm

Quel est l'élément le moins abondant?

Longueurs, surfaces et volumes

Entraînement 1.12 — Taille d'un atome.



La taille d'un atome est de l'ordre de 0,1 nm.

a) Quelle est sa taille en m (écriture scientifique)?

b) Quelle est sa taille en m (écriture décimale)?

Entraînement 1.13 — Alpha du centaure.



La vitesse de la lumière dans le vide est $c = 3,00 \cdot 10^8$ m/s. Une année dure 365,25 jours. Alpha du centaure est à une distance de 4,7 années-lumière de la Terre.

a) Quelle est cette distance en m (écriture scientifique)?

b) Quelle est cette distance en km (écriture scientifique)?

Entraînement 1.14 — Avec des hectares.



La superficie de la France est de 672 051 km². L'île danoise de Bornholm (au nord de la Pologne) a une superficie de 589 km². Un hectare (ha) est la surface d'un carré de 100 m de côté.

Donner les superficies suivantes :

a) un hectare (en m²)

d) la France (en ha)

b) un hectare (en km²)

e) Bornholm (en m²)

c) la France (en m²)

f) Bornholm (en ha)

Entraînement 1.15 — Volume.



a) Peut-on faire tenir 150 mL d'huile dans un flacon de $2,5 \cdot 10^{-4} \text{ m}^3$?

b) Peut-on faire tenir 1,5 L d'eau dans un flacon de $7,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}^3$?

Masse volumique, densité et concentration



Entraînement 1.16 — Masse volumique.



Une bouteille d'eau de 1 L a une masse de 1 kg. Un verre doseur rempli indique, pour la même graduation, eau : 40 cL et farine : 250 g.

a) Quelle est la masse volumique de l'eau en kg/m^3 ?

b) Quelle est la masse volumique de la farine?



Entraînement 1.17 — Densité.



La densité d'un corps est le rapport $\frac{\rho_{\text{corps}}}{1\,000 \text{ kg/m}^3}$, où ρ_{corps} est la masse volumique du corps en question.

a) Une barre de fer de volume 100 mL pèse 787 g. Quelle est la densité du fer?

b) Un cristal de calcium a une densité de 1,6. Quelle est sa masse volumique (en kg/m^3)?



Entraînement 1.18 — Un combat de masse.



On possède un cube de 10 cm en plomb de masse volumique $11,20 \text{ g/cm}^3$ et une boule de rayon 15 cm en or de masse volumique $19\,300 \text{ kg/m}^3$. On rappelle que le volume d'une boule de rayon R est $\frac{4}{3}\pi R^3$.

Lequel possède la plus grande masse?



Entraînement 1.19 — Prendre le volant ?



Le taux maximal d'alcool dans le sang pour pouvoir conduire est de 0,5 g d'alcool pour 1 L de sang.

A-t-on le droit de conduire avec 2 mg d'alcool dans $1\,000 \text{ mm}^3$ de sang?

Autour de la vitesse

Entraînement 1.20 — Le guépard ou la voiture ?



Un guépard court à 28 m/s et un automobiliste conduit une voiture à 110 km/h sur l'autoroute.

Lequel est le plus rapide ?

Entraînement 1.21 — Classement de vitesses.



On considère les vitesses suivantes : 20 km/h, 10 m/s, 1 année-lumière/an, 22 mm/ns, 30 dm/s et 60 cm/ms.

a) Laquelle est la plus petite ?

b) Laquelle est la plus grande ?

Autour des dimensions

Entraînement 1.22 — Dimensions.



Donner les dimensions fondamentales des grandeurs suivantes :

a) Une vitesse

g) Une concentration molaire

b) Une surface

h) Une masse linéique

c) Un volume

i) Une puissance

d) Une masse volumique ...

j) Une force

e) Une accélération

k) Une fréquence

f) Une énergie

l) Une longueur d'onde

Entraînement 1.23 — Dimensions.



Donner les dimensions fondamentales des grandeurs suivantes :

a) La température T d'un gaz est lié à la vitesse v des particules et à leur masse m par la relation

$$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$$

Quelle est la dimension de k_B ?

b) La variation d'énergie interne U d'un gaz parfait est donné par la relation :

$$\Delta U = C_v \Delta T$$

Quelle est la dimension de C_v ?

c) La force d'interaction gravitationnelle agissant entre deux masses m et m' distantes de d est :

$$F = \mathcal{G} \frac{mm'}{d^2}$$

Quelle est la dimension de $\mathcal{G}$?

Réponses mélangées

$1,3 \cdot 10^{-14} \text{ m}$	$10\,000 \text{ m}^2$	$5,2 \cdot 10^{-12} \text{ m}$	La boule en or	$0,01 \text{ km}^2$
$9,10 \cdot 10^{-1} \text{ rg}$	30 dm/s	$2,5 \cdot 10^3 \text{ m}$	oui	406 TWh
$M.L^2.T^{-2}.\Theta^{-1}$	$5,89 \cdot 10^4 \text{ ha}$	L^2	$1 \cdot 10^3 \text{ kg/m}^3$	$9,10 \cdot 10^2 \text{ qg}$
$4,33 \cdot 10^{13} \text{ km}$	non	$M.L.T^{-2}$	$4,1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$	$M.L^{-3}$
$1,6 \times 10^3 \text{ kg/m}^3$	$1,90 \cdot 10^3 \text{ Rg}$	L^3	$2,3 \cdot 10^{-4} \text{ m}$	$M.L^2.T^{-2}$
oui	L	$3 \cdot 10^{-3} \text{ m}$	1 année-lumière/an	$1 \cdot 10^{-10} \text{ m}$
7,87	$1,99 \cdot 10^6 \text{ Rg}$	$4,43 \cdot 10^{16} \text{ m}$	$5,89 \cdot 10^8 \text{ m}^2$	$1,67 \cdot 10^3 \text{ rg}$
$M.L^2.T^{-3}$	41 TWh	$M.L^{-1}$	5,97 Rg	$5,97 \cdot 10^{-3} \text{ Qg}$
134 TWh	$7 \cdot 10^{-13} \text{ m}$	0,5 %	$7,3 \cdot 10^6 \text{ m/s}$	5 g
voiture	1,90 Qg	$2,6 \cdot 10^7 \text{ km/h}$	50 %	$6,72 \cdot 10^7 \text{ ha}$
2,34 m	625 kg/m^3	0,000 000 000 1 m	$M.L.T^{-2}$	$1,67 \cdot 10^6 \text{ qg}$
0,7 %	$1 \cdot 10^{-1} \text{ m}$	$5,5 \cdot 10^{-2} \Omega$	62 TWh	5,2 %
$6,72 \cdot 10^{11} \text{ m}^2$	$7,2 \cdot 10^{-9} \text{ m}$	113 TWh	2,4 MJ	$1,03 \times 10^3 \text{ TWh}$

HOMOGÉNÉITÉ

✎ Exercice 1 : Homogénéité en mécanique

La grandeur F représente une force, L une longueur, v une vitesse, a une accélération, T un temps, m une masse. Les formules suivantes sont-elles homogènes ?

$$F = \frac{mv^2}{5L}; v = \sqrt{2gL}; v = \sqrt{2gL}; T = 2La; T = \sqrt{2La}; T = \sqrt{\frac{2L}{a}}.$$

✎ Exercice 2 : Chute d'un flocon de neige

On s'intéresse à la chute dans l'air d'un flocon de neige, supposé sphérique, de rayon $r = 0,5$ mm et de masse volumique μ . La viscosité de l'air est η , sa masse volumique μ_a . On suppose ces grandeurs constantes. Du fait de la viscosité de l'air, le flocon est soumis à une force de frottement fluide proportionnelle à sa vitesse v : $F = -6\pi r\eta v$ (force de Stokes). On peut considérer, qu'une fois formé dans le nuage, le flocon commence son mouvement de chute sans vitesse initiale. Quelle est la dimension de la viscosité η de l'air.

✎ Exercice 3 : Homogénéité de formules classiques

1. En statique des fluides, on démontre : $p_2 - p_1 = \rho g(z_2 - z_1)$ avec, p_1, p_2 la pression en 2 points, ρ la masse volumique, z_1, z_2 deux altitudes. Vérifier l'homogénéité de cette formule.
2. Sachant que la fréquence d'une corde vibrante est liée à sa longueur l , à sa tension F , à sa masse linéique μ par une relation du type : $f = Kl^\alpha F^\beta \mu^\gamma$, avec K une constante : déterminer α, β, γ par des considérations d'homogénéité.
3. Vérifier l'homogénéité de la formule de la théorie cinétique des gaz : $p = \frac{1}{3}nmv^2$ où p est la pression du gaz, n le nombre de molécules par unité de volume, m la masse des molécules et v leur vitesse efficace.
4. Un corps, de masse m , qui tombe en chute libre d'une hauteur h acquiert la vitesse $v = km^\alpha h^\beta g^\gamma$. Déterminer α, β, γ .

✎ Exercice 4 : Intérêt de l'analyse dimensionnelle

L'énergie cinétique d'un solide en rotation est donnée par $E = \frac{1}{2}J\omega^2$ où ω désigne la vitesse de rotation du solide en rad.s^{-1} .

1. Quelle est la dimension du moment d'inertie J ?
2. Un élève propose pour formule du moment cinétique de la sphère $J = \frac{5}{2}m^2R$ avec m la masse du solide et R son rayon. Est-ce raisonnable ?
3. Le même élève a trouvé comme résultat du problème de mécanique que l'accélération a du solide était : $a = \frac{(M \sin \alpha - m)g}{M + m + J/R^2}$, où M et m désignent des masses et g l'accélération de la pesanteur. Est-ce raisonnable du point de vue de l'homogénéité ?

Exercice 5 : Vitesse des ondes sonores

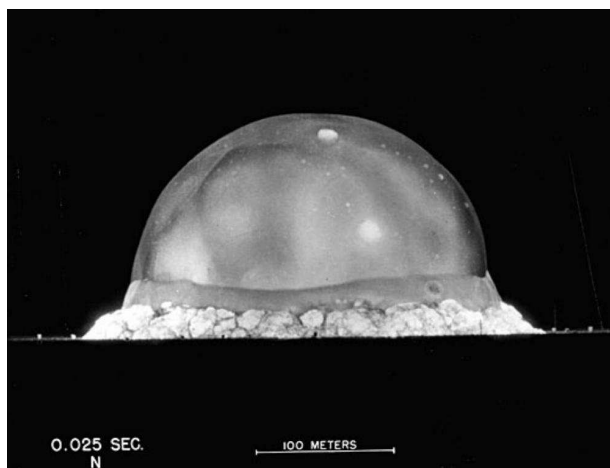
La vitesse de propagation du son s'exprime en fonction de $\chi = -\frac{1}{\nu} \frac{d\nu}{dp}$, un coefficient de compressibilité du gaz (où ν désigne le volume massique et p la pression) et de sa masse volumique μ .

1. Déterminer la dimension de χ .
2. Donner l'expression de la vitesse à une constante près.

Exercice 6 : Energie d'une explosion nucléaire

Trinity est le nom de code du premier essai nucléaire de l'histoire. L'explosion eut lieu le 16 juillet 1945 à Alamogordo au Nouveau Mexique, dans une zone désertique nommée Jornada del Muerto. Étant l'ultime étape du projet Manhattan, lancé par les États-Unis durant la seconde guerre mondiale, les données concernant ce projet étaient classées ultra-secrètes par la CIA. La légende raconte que le physicien britannique Geoffrey Ingram Taylor¹ (1886-1975) aurait pu en 1950 à l'aide d'un film et en utilisant l'analyse dimensionnelle, estimer l'énergie E dégagée par cette explosion nucléaire.

Le raisonnement est le suivant : le film permet d'avoir accès à l'évolution $R(t)$ du rayon du nuage formé par l'explosion au cours du temps. Les paramètres influant sur ce rayon sont le temps t , l'énergie E , et la masse volumique de l'air ρ



1. On cherche alors R , sous la forme : $R = E^a t^b \rho^c$. Déterminer a , b et c .
2. Dédire de la question précédente l'expression de l'énergie libérée en fonction de R , ρ et t .
3. Estimer l'ordre de grandeur de sa valeur numérique à partir de la photographie.
4. Plusieurs années plus tard, la CIA a révélé que les mesures réalisées sur place permettaient d'estimer que l'énergie libérée par la bombe était d'environ 20 kilotonnes de TNT. Sachant que l'explosion de 1 kg de TNT libère environ $4 \cdot 10^6$ J, calculer l'énergie libérée par l'explosion Trinity et commenter la qualité du résultat obtenu par analyse dimensionnelle

1. Il est notamment connu pour ses travaux sur la turbulence et les phénomènes non-linéaires. Je vous suggère de consulter sur wikipedia les articles concernant : l'instabilité de Rayleigh-Taylor, l'instabilité de Taylor-Couette, le nombre de Taylor ou encore le cône de Taylor.

**Exercice 7 : Dino Vs Chat-GPT5**

On donne l'énoncé suivant à Chat-GPT. L'objectif est de contrôler et éventuellement de corriger sa réponse. On pressent que la vitesse de marche V d'un animal dépend de sa masse m , de la longueur de ses jambes L_J , de la longueur d'une enjambée L_E et de l'accélération de la pesanteur g . On cherche donc V sous la forme :

$$V = k m^\alpha L_J^\beta L_E^\gamma g^\delta,$$

où k , α , β , γ et δ sont des constantes sans dimension.

1. Quelle est la dimension de g ? En quelle unité du système international s'exprime-t-elle ?
2. En utilisant l'analyse dimensionnelle, calculer α et δ .
3. La vitesse de la marche dépend-elle de la masse du dinosaure ?
4. En utilisant l'analyse dimensionnelle, exprimer γ en fonction de β .
5. En déduire que :

$$V = k \left(\frac{L_J}{L_E} \right)^\beta \sqrt{g} \sqrt{L_E}.$$

On trouve des traces de pas fossiles d'un dinosaure. Le diamètre du pied est de 0.95 m et l'enjambée L_E de 2.20 m. On sait par ailleurs que pour tous les animaux, la longueur des jambes L_J est environ 4 fois le diamètre des pieds.

6. Calculer le rapport des longueurs $\frac{L_J}{L_E}$ pour ce dinosaure.
7. Sachant que la longueur de la jambe d'un homme est d'environ $L_J = 85$ cm, quelle est la valeur d'une enjambée humaine donnant le même rapport $\frac{L_J}{L_E}$ que celui du dinosaure ?
8. Donner une estimation raisonnable de la vitesse à laquelle marcherait un homme avec une telle enjambée.
9. En déduire une valeur approximative de la vitesse de marche du dinosaure (on donnera la formule littérale et on effectuera l'application numérique).
10. Commenter la valeur trouvée.

Correction proposée - Exercice 7 : Marche des dinosaures

On suppose

$$V = k m^\alpha L_J^\beta L_E^\gamma g^\delta, \quad [V] = LT^{-1}, [m] = M, [L_J] = L, [L_E] = L, [g] = LT^{-1}.$$

- 1) La dimension de g est $[g] = LT^{-1}$, donc l'unité SI est m.s^{-1} .

2) Équations d'homogénéité.

$$\text{Masse : } M^\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Temps : } T^{-1} = T^{-2\delta} \Rightarrow \delta = \frac{1}{2}.$$

$$\text{Longueur : } L^1 = L^{\beta+\gamma+\delta} \Rightarrow \beta + \gamma + \delta = 1 \Rightarrow \beta + \gamma = \frac{1}{2}.$$

- 3) Comme $\alpha = \frac{1}{2}$, la vitesse dépend de la masse : $V \propto \sqrt{m}$.

- 4) On tire γ en fonction de β :

$$\beta + \gamma = \frac{1}{2} \Rightarrow \gamma = \frac{1}{2} - \beta.$$

5) En réinjectant, on peut écrire

$$V = k \left(\frac{L_J}{L_E} \right)^\beta \sqrt{g L_E}.$$

6) Données fossiles : diamètre du pied = 0,95 m, donc $L_J \simeq 4 \times 0,95 = 3,80$ m, et $L_E = 2,20$ m.
Le rapport vaut

$$\frac{L_J}{L_E} \approx \frac{3,80}{2,20} \approx 1,45.$$

7) Pour un humain ($L_J = 0,85$ m) avec le même rapport $r = L_J/L_E$, on a $L_E^{(\text{hum})} = L_J/r$.
Donc

$$L_E^{(\text{hum})} \approx \frac{0,85}{1,45} \approx 0,59 \text{ m}.$$

8) Estimation de la vitesse humaine avec cette enjambée.
En prenant $k = 1$ et $\beta = 1$ à titre d'approximation,

$$V_{\text{hum}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E} \right) \sqrt{g L_E} \approx 1,45 \times \sqrt{9,81 \times 0,59} \approx 1,45 \times 2,41 \approx 3,5 \text{ m.s}^{-1} (\approx 12,6 \text{ km.h}^{-1}),$$

ce qui correspond à une marche soutenue.

9) Vitesse du dinosaure (même choix de k et β). Avec $L_E = 2,20$ m :

$$V_{\text{dino}} \approx \left(\frac{L_J}{L_E} \right) \sqrt{g L_E} \approx 1,45 \times \sqrt{9,81 \times 2,20} \approx 1,45 \times 4,65 \approx 6,7 \text{ m.s}^{-1} (\approx 24 \text{ km.h}^{-1}).$$

10) Commentaire. La valeur obtenue semble cohérente pour une locomotion pédestre rapide ; la dépendance en $\sqrt{m}$ explique que les grands animaux puissent conserver des vitesses comparables malgré leur masse.

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'un rayon lumineux ?

LUMIÈRE

Définir l'indice de réfraction d'un milieu.

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'une source ponctuelle ?

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'un spectre d'émission ?

LUMIÈRE

Donner la plage de longueur d'onde du domaine visible.

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'une source monochromatique ?

LUMIÈRE

Lors du passage d'un milieu vers un autre, la fréquence de la lumière ne varie pas. Montrer que, quant à elle, la longueur d'onde change.

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'un milieu homogène ?

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'un milieu transparent ?

Une source est dite ponctuelle si ses dimensions sont faibles devant les autres distances du problème.

$$n = \frac{c}{v}$$

Un rayon lumineux est un modèle qui représente la trajectoire suivie par la lumière. Il donne la direction et le sens de propagation.

Une source est monochromatique émet un rayonnement constitué d'une seul raie spectrale (une seule longueur d'onde).

$$380 \text{ nm} \leq \lambda \leq 780 \text{ nm}$$

Un spectre d'émission caractérise la contribution en intensité de chaque longueur d'onde.

Un milieu est transparent si la lumière n'est pas absorbée lors de sa propagation dans le milieu.

Un milieu est homogène s'il a les mêmes propriétés en tout point de l'espace.

dans le vide $f = \frac{c}{\lambda_0}$, dans le milieu $f = \frac{v}{\lambda}$, ainsi
 $\lambda = \frac{v}{c} \lambda_0 = \frac{\lambda_0}{n}$

LUMIÈRE

Qu'est-ce qu'un milieu isotrope ?

LUMIÈRE

Citer les trois hypothèses du modèle de l'optique géométrique dans un milieu homogène transparent isotrope.

LUMIÈRE

Citer deux limites au modèle de l'optique géométrique.

LUMIÈRE

Énoncer les lois de Snell-Descartes.

LUMIÈRE

À quelle condition observe-t-on le phénomène de réflexion totale ?

LUMIÈRE

Définir l'ouverture numérique d'une fibre optique.

LUMIÈRE

Définir la dispersion intermodale d'une fibre optique.

- Si la lumière rencontre des obstacles de faibles dimensions (inférieures au millimètre) le phénomène de diffraction apparaît.
- Dans certaines conditions les rayons lumineux peuvent interférer.

- La lumière se propage en ligne droite.
- Les rayons sont indépendants, ils n'interagissent pas entre eux.
- Les rayons vérifient le principe de retour inverse de la lumière.

Un milieu est isotrope s'il ne possède pas de direction privilégiée.

L'ouverture numérique est

$$\text{O.N} = \sin \theta_t$$

où θ_t est l'angle tel que tout rayon incident sur la fibre avec un angle d'incidence inférieur à θ_t est transmis dans la fibre.

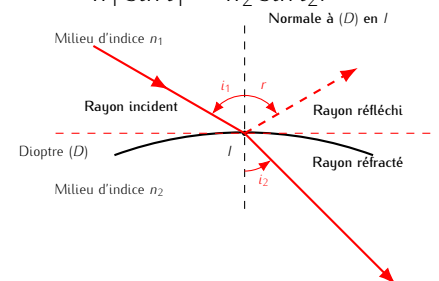
Lors du passage d'un milieu plus réfringent vers un milieu moins réfringent, les lois de Snell-Descartes donnent :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

donc $\sin i_2 = \frac{n_1}{n_2} \sin i_1$. Ainsi, il ne peut y avoir réfraction si $\frac{n_1}{n_2} \sin i_1 > 1$ soit

$$i_1 > \arcsin \left(\frac{n_2}{n_1} \right)$$

- Le rayon réfléchi et le rayon réfracté, s'ils existent, appartiennent au plan d'incidence.
- L'angle orienté de réflexion vérifie $r = -i_1$
- L'angle orienté de réfraction vérifie $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$.



La dispersion intermodale est l'élargissement temporel maximum par unité de longueur. Si les rayons extrêmes mettent $t_{\min}$ et $t_{\max}$ pour parcourir une longueur L alors

$$D_i = \frac{t_{\max} - t_{\min}}{L}$$

O_1 – Lumière : sources et guidage

Conseils pour ce TD

- Toujours commencer par effectuer un (beau) tracé aussi précis que possible (règle, couleurs ...).
Tracer les rayons lumineux en traits pleins et les orienter. Tracer leur prolongement en pointillés.
Orienter les angles et respecter les lois de Snell Descartes (par exemple, le rayon réfracté se rapproche de la normale au dioptre quand on passe dans un milieu plus réfringent).
- Dans l'expression des lois de Snell Descartes, les angles sont orientés de la normale au rayon et non du miroir ou du dioptre au rayon.
- En général, pour résoudre l'exercice, on utilisera les lois de Snell Descartes et des relations mathématiques connues : somme des angles orientés dans un triangle, relations trigonométriques dans un triangle rectangle.
On a ensuite à combiner ces différentes relations, c'est pourquoi on aura souvent à travailler dans des triangles rectangles ayant un côté commun.
De même, on privilégiera les relations trigonométriques faisant apparaître un sinus car il apparaît également dans la loi de la réfraction.
- Vérifier la cohérence entre les résultats issus du calcul et la figure.

Lois de Snell-Descartes



Entraînement 2.1 — Conversions d'angles.



Soit α_{rad} la mesure d'un angle en radians, α_{deg} sa mesure en degrés et α_{min} sa mesure en minutes d'angle.

a) Exprimer α_{rad} en fonction de α_{deg} .

b) Exprimer α_{min} en fonction de α_{deg} .



Entraînement 2.2 — Conversions d'angles — bis.



a) $\alpha = 35,65^\circ$. Exprimer α en degrés et en minutes d'angle.

b) $\beta = 98^\circ 15'$. Exprimer β en radians.

c) $\gamma = 1,053 \text{ rad}$. Exprimer γ en degrés et en minutes d'angle.



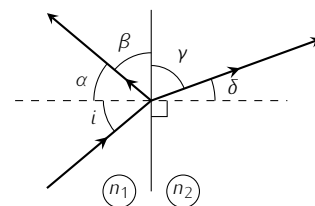
Entraînement 2.3 — Un rayon incident sur un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 .

Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre.

Tous les angles figurant sur le schéma sont non orientés.



Exprimer chacun des angles suivants en fonction de i et/ou de n_1 et n_2 (en radians) :

a) α

c) δ

b) β

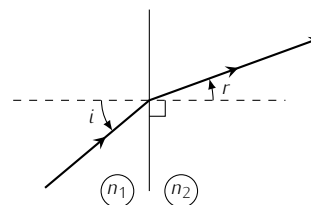
d) γ

Entraînement 2.4 — Un autre rayon incident sur un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 . Ce rayon fait un angle i avec la normale au dioptre alors que le rayon réfracté fait un angle r .

On donne $n_1 = 1,00$ et $n_2 = 1,45$.



a) Pour $i = 24,0^\circ$, que vaut r en degré?

b) Pour $i = 6,74 \times 10^{-1}$ rad, que vaut r en degré?

c) Pour $r = 15,0^\circ$, que vaut i en degré?

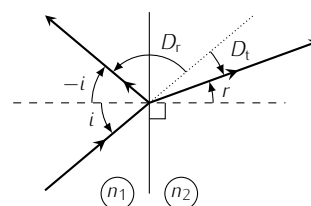
Entraînement 2.5 — Déviation introduite par un dioptre.



On considère un rayon incident arrivant sur un dioptre séparant deux milieux d'indice respectif n_1 et n_2 .

Les angles définis sur le schéma ci-contre sont tous orientés.

On définit D_r la déviation entre le rayon incident et le rayon réfléchi, et D_t la déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté.



a) Exprimer D_t en fonction de i et r

b) Déterminer D_r



Entraînement 2.6 — Un peu de géométrie dans un prisme.

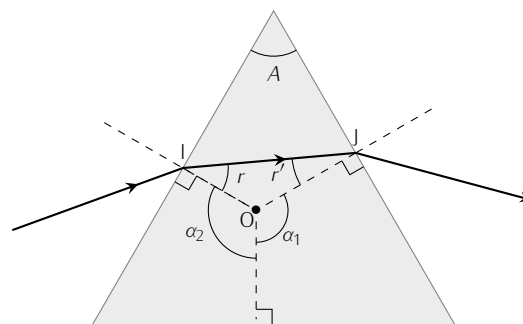


On considère un prisme d'angle au sommet A , représenté ci-contre suivant une de ses faces triangulaires.

Un rayon incident en I sur une face du prisme émerge en J .

On définit les angles α_1 , α_2 , r et r' sur le schéma.

Dans cet entraînement, les angles ne sont pas orientés.



On rappelle que la somme des angles dans un quadrilatère est égale à 2π .

a) Exprimer l'angle A en fonction de α_1 et α_2

b) Exprimer l'angle A en fonction de r et de r'

Autour des réflexions totales

Entraînement 2.7



On considère un dioptre séparant deux milieux d'indices respectifs $n_1 = 1,5$ et $n_2 = 1,3$. Un rayon lumineux arrive sur ce dioptre en formant un angle i par rapport à sa normale.

On rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.

a) Pour $i = 44^\circ$, y a-t-il réflexion totale ?

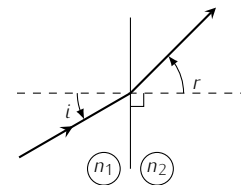
b) Donner, en degrés, l'angle i_ℓ tel qu'il y a réflexion totale si $i > i_\ell$

Entraînement 2.8



On considère un rayon lumineux incident sur le dioptre n_1/n_2 , faisant un angle i avec la normale à ce dioptre et le rayon réfracté un angle r .

On donne $n_1 = 1,37$ et on rappelle qu'il y a réflexion totale si $\frac{n_1}{n_2} \sin(i) > 1$.



a) Pour $i = 20,0^\circ$ et $r = 22,0^\circ$, que vaut n_2 ?

b) Pour $i = 60,0^\circ$, quelle est la valeur maximale de n_2 donnant lieu à une réflexion totale ?

c) On suppose que $i = 40,0^\circ$. Peut-on observer un phénomène de réflexion totale ?



Entraînement 2.9 — Condition de propagation dans une fibre optique.



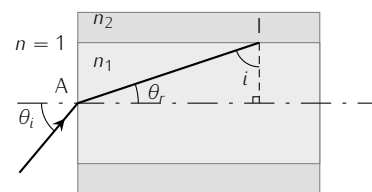
Un rayon lumineux arrive sur un dioptre séparant l'air d'un milieu d'indice n_1 au point A (voir schéma ci-contre). On a donc :

$$\sin(\theta_i) = n_1 \sin(\theta_r). \quad (1)$$

Le rayon se propagera dans la fibre à condition qu'il y ait réflexion totale au point I situé à l'intersection du rayon lumineux et du dioptre n_1/n_2 (avec $n_1 > n_2$).

On donne la relation correspondante :

$$\frac{n_1 \sin(i)}{n_2} > 1 \quad (2)$$



a) À l'aide de (1), exprimer $\cos(\theta_r)$ en fonction de n_1 et de $\sin(\theta_i)$

b) À quelle condition portant sur $\cos(\theta_r)$ équivaut (2) ?

c) En déduire à quelle condition sur $\sin(\theta_i)$ équivaut (2).

Réponses mélangées

$60 \times \alpha_{\text{deg}}$	Non	$35^{\circ}39'$	$r - i$	Non	$\pi - 2i$	$\frac{\pi}{2} - \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i)\right)$
$22,0^{\circ}$	i	$\frac{\pi}{180} \times \alpha_{\text{deg}}$	$16,3^{\circ}$	$r + r'$	60°	$25,5^{\circ}$
$\frac{\pi}{2} - i$	1,25	$\cos(\theta_r) > \frac{n_2}{n_1}$	$\arcsin\left(\frac{n_1}{n_2} \sin(i)\right)$	$\sqrt{1 - \frac{\sin^2(\theta_i)}{n_1^2}}$		
$(\alpha_1 + \alpha_2) - \pi$		$\sin(\theta_i) < \sqrt{n_1^2 - n_2^2}$	$60^{\circ}20'$	1,18	1,715 rad	

✎ Exercice 1 : Construction d'Huygens

Cette construction géométrique permet de construire le rayon réfracté correspondant à un rayon incident donné.

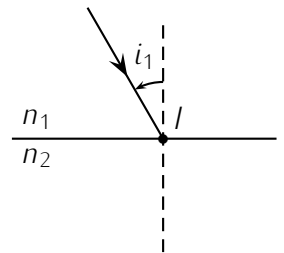
Du point d'incidence I comme centre, on trace deux demi-cercles de rayons $\frac{1}{n_1}$ et $\frac{1}{n_2}$.

On prolonge le rayon incident jusqu'à ce qu'il rencontre le demi-cercle de rayon $\frac{1}{n_1}$.

Du point d'intersection T , on mène la tangente qui coupe le dioptre en H .

À partir de H , on mène la tangente à l'autre demi-cercle ce qui définit un point T' .

Le rayon réfracté est alors IT' .



1. Suivre le mode opératoire dans les deux cas : $n_1 < n_2$ et $n_1 > n_2$.
2. Vérifier que cette construction est bien conforme aux lois de Snell-Descartes.
3. Retrouver les cas de la réfraction limite et de la réflexion totale.

✎ Exercice 2 : Fibre à saut d'indice

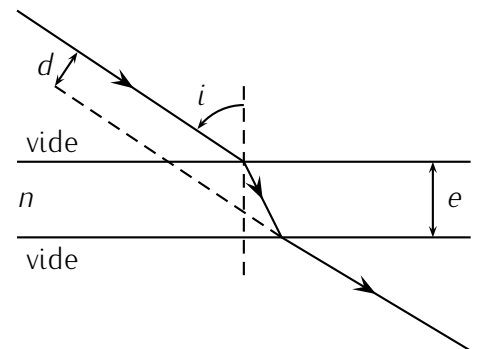
On considère une fibre optique à saut d'indice. On reprend les notations du cours.

1. Tracer l'allure du trajet d'un rayon lumineux en supposant qu'il reste confiné à l'intérieur du cœur.
2. Établir la condition que doit vérifier l'angle d'incidence i au niveau du dioptre cœur/gaine pour que le rayon reste confiné dans le cœur.
3. Calculer l'angle limite θ_l pour lequel le confinement est assuré.
4. On considère une fibre rectiligne. Quel est le trajet qui offre le temps de parcours le plus court dans la fibre optique ? Quel est celui qui offre le temps le plus long ? En déduire l'expression de la dispersion intermodale.

✎ Exercice 3 : lame à faces parallèles

1. Construire le rayon transmis par une lame à faces parallèles en verre d'indice de réfraction n et d'épaisseur e . Ce rayon existe-t-il toujours ?
2. Quelle est la direction du rayon réfracté si le rayon incident arrive sous l'incidence i ?
3. Déterminer la distance d qui sépare la direction du rayon incident de celle du rayon transmis (Cf. figure)

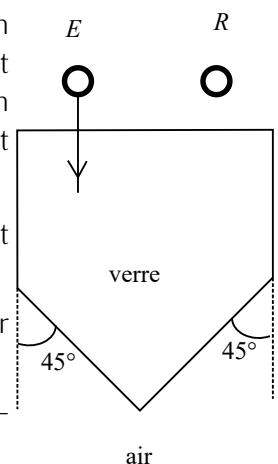
Application numérique : $n = 1,5$, $e = 1$ cm et $i = 45^\circ$.



✎ Exercice 4 : Capteur de niveau d'eau

On désire connaître le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela, on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure ci-dessous. L'émetteur E , est un faisceau laser et le récepteur R est une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse. L'indice du verre est $n = 1,5$; celui de l'air est 1.

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en R .
2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice $n' = 1,33$. Le récepteur R reçoit-il toujours de la lumière ?
3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaître le niveau de remplissage du château d'eau.



 Exercice 5 : Grenouille cachée

Une grenouille est cachée dans l'eau d'indice $n \simeq 1,33$ sous le centre d'un nénuphar de rayon $r = 10$ cm.

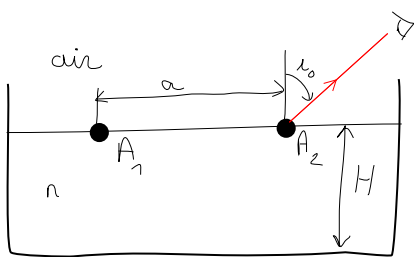
Quelle profondeur maximale h la grenouille ne doit elle pas dépasser pour qu'on ne puisse pas la voir de l'autre côté de la surface ?

 Exercice 6 : Vu du fond de l'eau ...

Un poisson est posé sur le fond d'un lac : il regarde vers le haut et voit un disque lumineux de rayon r , centré sur sa verticale et dans lequel il voit tout ce qui est au dessus de l'eau.

1. Expliquez cette observation à l'aide d'une figure.
2. Le rayon du disque est $r = 30$ cm, en déduire la profondeur h à laquelle se trouve le poisson.

 Exercice 7 : Réfractomètre à fils



Deux fils parallèles A_1 et A_2 , distants de a , sont maintenus à la surface d'un liquide d'indice n grâce à des flotteurs non représentés sur la figure. Le liquide est placé dans une cuve dont le fond est un miroir plan. La hauteur H de liquide dans la cuve est facilement réglable grâce à un dispositif de vases communicants. On observe le fil A_2 sous une incidence i_0 donnée, et on règle H de telle façon que l'image du fil A_1 par le miroir se superpose au fil observé. Exprimer l'indice n du

liquide en fonction de i_0 , a et H .

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'un objet ponctuel ?

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'une image ponctuelle ?

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'un objet réel ?

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'un objet virtuel ?

MIROIRS LENTILLES

L'image d'un objet réel est :

- Ⓐ Forcément réelle
- Ⓑ Forcément virtuelle
- Ⓒ Réelle ou virtuelle

MIROIRS LENTILLES

L'image d'un objet virtuel est :

- Ⓐ Forcément réelle
- Ⓑ Forcément virtuelle
- Ⓒ Réelle ou virtuelle

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'une relation de conjugaison ?

MIROIRS LENTILLES

Définir le stigmatisme rigoureux.

MIROIRS LENTILLES

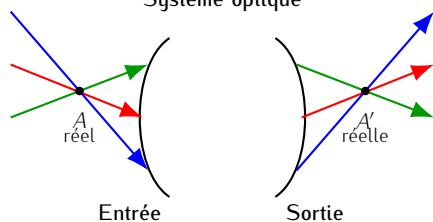
Tracer l'image du point A par le miroir.

A •



Si les rayons incidents se coupent effectivement en un point A , alors celui est un objet réel.

Système optique



Une image ponctuelle est à l'intersection des rayons émergents du système optique.

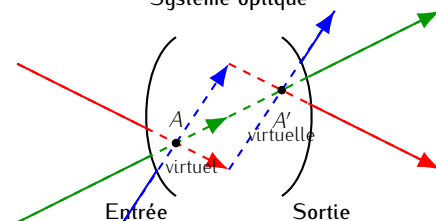
Un objet ponctuel est à l'intersection des rayons incidents sur le système optique.

Réponse ©, réelle ou virtuelle, tout dépend de la position de la position de l'objet et du système optique.

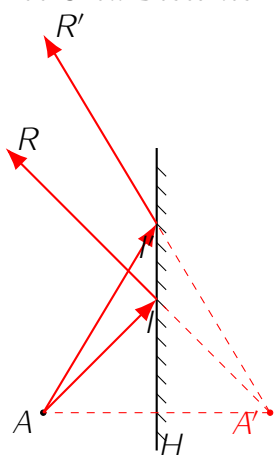
Réponse ©, réelle ou virtuelle, tout dépend de la position de la position de l'objet et du système optique.

Si les rayons incidents ne se coupent pas effectivement en un point A , mais que ceux semblent de couper en A si on les prolonge, alors A est un objet virtuel.

Système optique



L'image est à l'intersection des rayons émergents (ici de leur prolongement). On trace la marche de deux rayons lumineux issus de A qui vérifient les lois de Snell-Descartes



Un système optique est rigoureusement stigmatique s'il donne d'un objet ponctuel une image ponctuelle. Autrement dit, l'image d'un point est un point.

Une relation de conjugaison est une relation mathématique qui lie la position de l'image à celle de l'objet

MIROIRS LENTILLES

Énoncer les conditions de Gauss.

MIOIRS LENTILLES

Définir le stigmatisme approché. Expliquer comment un stigmatisme approché suffit pour avoir une image de bonne qualité.

MIROIRS LENTILLES

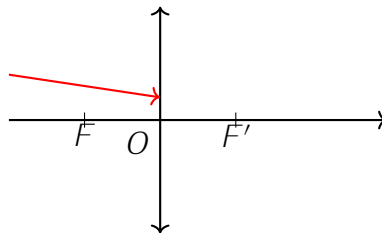
Soit une lentille mince de centre optique O et de distance focale f' qui conjugue l'objet A à l'image A' . Écrire la relation de conjugaison de Descartes.

MIROIRS LENTILLES

Définir le grandissement d'un système optique.

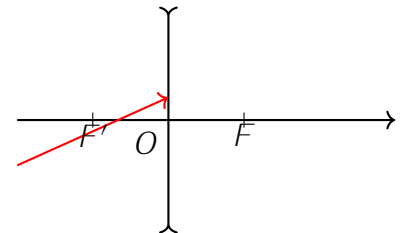
MIROIRS LENTILLES

Tracer le rayon émergent



MIROIRS LENTILLES

Tracer le rayon émergent



MIROIRS LENTILLES

Soit un objet A distant de D d'un écran. À quelle condition une lentille convergente de distance focale f' permet de former l'image de A sur l'écran? Retrouver cette condition à l'aide des relations de conjugaison.

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce que le foyer principal image d'un système optique?

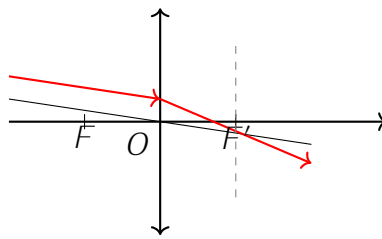
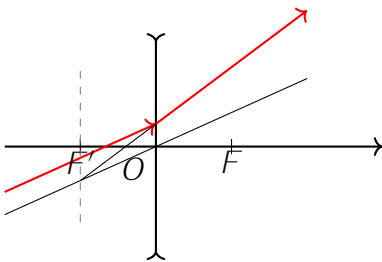
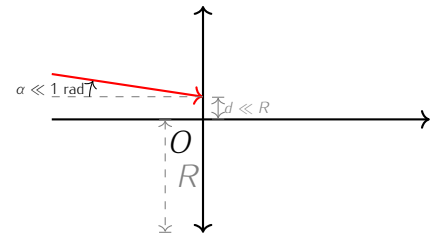
MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce que le foyer principal objet d'un système optique?

$$\frac{1}{OA'} - \frac{1}{OA} = \frac{1}{f'}$$

Un dispositif approximativement stigmatique donne d'un objet ponctuel une tache image dont les dimensions sont « faibles ». Si la taille de la tache image est plus petite que celle d'un élément photosensible du détecteur alors l'image apparaît ponctuelle.

Un système optique centré est utilisé dans les conditions de Gauss si les rayons lumineux sont peu écartés et peu inclinés par rapport à l'axe optique.



Le grandissement est $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$

Le foyer principal objet est le point de l'axe dont l'image est à l'infini sur l'axe optique.

$$A = F \longrightarrow A'_{\infty} \in \Delta$$

Un foyer principal image est l'image d'un point situé à l'infini sur l'axe optique.

$$A_{\infty} \in \Delta \longrightarrow A' = F'$$

On note $x = \overline{OA}$ alors $\overline{OA'} = x + D$ et

$$\frac{1}{x + D} - \frac{1}{x} = \frac{1}{f'}$$

soit $x^2 + xD + Df' = 0$ cette équation admet au moins une solution à condition que $\Delta = D^2 - 4Df' > 0$ soit

$$D > 4f'$$

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'un foyer
secondaire image ?

MIROIRS LENTILLES

Qu'est-ce qu'un foyer
secondaire objet ?

Un foyer secondaire objet est un point dont l'image est situé à l'infini mais pas forcément sur l'axe optique.

Un foyer secondaire image est l'image d'un point situé à l'infini mais pas forcément sur l'axe optique.

O_2 – Miroirs plans et lentilles minces

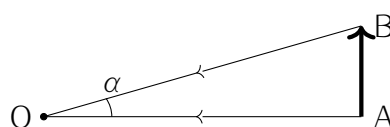
Conseils pour ce TD

- Ceux du TD de O_1 .
- Pour tracer un rayon réfléchi par un miroir plan, placer l'image de l'objet dont il est issu (symétrique par rapport à un miroir plan).
- Pour utiliser une relation de conjugaison, orienter les distances algébriques et les angles. Vérifier la cohérence des signes.
- Dans le cas d'un système optique constitué de plusieurs lentilles, on peut utiliser la notion d'images intermédiaires (faire un tableau du type $A - (L_1) \rightarrow A_1 - (L_2) \rightarrow A'$ par exemple) ou alors tracer le devenir d'un rayon après la suite de réfractions.
- Dans le cas courant où l'objet (respectivement, l'image) est à l'infini, aucune relation de conjugaison n'est nécessaire : l'image (resp. l'objet) est dans le plan focal image (resp. objet).

Grandeurs algébriques

Entraînement 3.1 — Diamètre apparent.

On considère le schéma suivant, montrant l'angle α , appelé diamètre apparent, sous lequel est vu un objet AB depuis un point O.



a) Exprimer le diamètre apparent α , en radians, en fonction de OA et AB

b) Exprimer le diamètre apparent α , en degrés, en fonction de OA et AB

Un observateur situé à la surface de la Terre observe des astres, caractérisés par les données suivantes :

	Soleil	Lune
Diamètre	$1,4 \cdot 10^6$ km	$3,5 \cdot 10^3$ km
Distance à la Terre	$150\,600 \cdot 10^3$ km	$384\,400$ km

Pour simplifier les calculs, on pourra utiliser que, quand α est un angle petit et exprimé en radians, on dispose de l'approximation des petits angles : $\alpha \approx \tan(\alpha)$.

c) Calculer le diamètre apparent de la Lune α_L en degrés

d) Calculer le diamètre apparent du Soleil α_S en degrés

e) Que vérifient les valeurs numériques α_S et α_L ?

Ⓐ $\alpha_S > \alpha_L$

Ⓑ $\alpha_S \approx \alpha_L$

Ⓒ $\alpha_S < \alpha_L$

f) Quel phénomène astronomique la comparaison de α_L et α_S permet d'expliquer?

Ⓐ Les éclipses

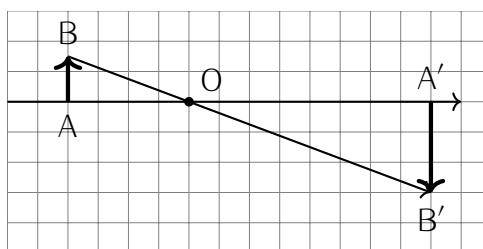
Ⓑ Les saisons

Ⓒ Les marées

Entraînement 3.2 — Configuration de Thalès et grandissement.



On considère la situation représentée sur le schéma ci-dessous.



On note $\bar{x}$ la valeur algébrique de la longueur x et on définit le grandissement γ par la relation :

$$\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}.$$

a) Donner la relation reliant $\overline{OA}$, $\overline{OA'}$, $\overline{AB}$ et $\overline{A'B'}$

b) Déterminer la valeur numérique de γ

Modèle de la lentille mince

Entraînement 3.3 — Conditions de Gauss.



Parmi les situations suivantes concernant les rayons lumineux issus d'un objet et traversant une lentille mince, indiquer celle qui ne permet pas de se placer dans les conditions de Gauss.

(a) peu inclinés par rapport à l'axe optique.

(b) passant par les bords de la lentille.

(c) passant près du centre optique.

.....

Entraînement 3.4 — Déviation de rayons lumineux.

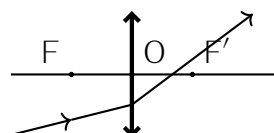


On rappelle les propriétés suivantes :

- Un rayon passant par le centre optique de la lentille n'est pas dévié.
- Un rayon incident dont la direction passe par le foyer objet émerge parallèle à l'axe optique principal.
- Un rayon parallèle à l'axe optique principal émerge avec une direction passant par le foyer image.

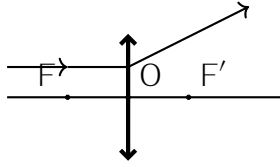
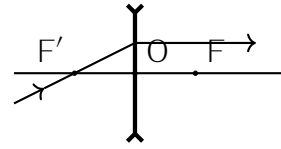
Pour chacun des schémas suivants, préciser s'ils sont corrects ou incorrects.

a)



b)

.....

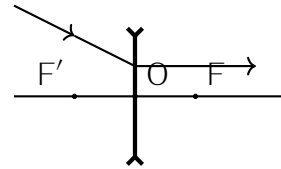


c)

.....

d)

.....

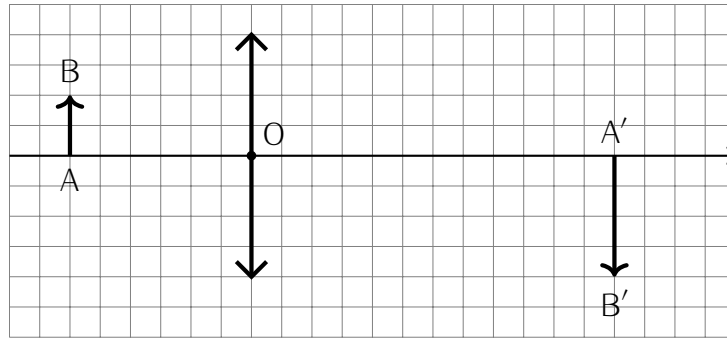


.....

Entraînement 3.5 — Construction de rayons lumineux.



On considère le schéma suivant montrant un objet $\overline{AB}$ et son image $\overline{A'B'}$ par une lentille convergente.



On donne l'échelle du schéma : 8 carreaux sur le schéma correspondent à 10 cm en réalité.

a) Déterminer graphiquement la distance focale de la lentille

b) Calculer la vergence de la lentille

Entraînement 3.6 — Batailles de convergence.



Quelle est la lentille la plus convergente ?

(a) une lentille de vergence $+8,0 \delta$

(c) une lentille de focale objet $-10,0 \text{ cm}$

(b) une lentille de focale image $+8,0 \text{ cm}$

(d) une lentille de focale image $-8,0 \text{ cm}$

.....

Entraînement 3.7 — Focale d'une lentille biconvexe.



La distance focale d'une lentille biconvexe symétrique de rayon de courbure R , taillée dans un matériau d'indice n et utilisée dans l'air est donnée par la relation suivante :

$$f' = \frac{R}{2(n - n_{\text{air}})}$$

où n_{air} est l'indice optique de l'air.

On souhaite fabriquer une lentille biconvexe de vergence $6,0 \delta$ afin de corriger une hypermétropie forte à partir d'un plastique organique d'indice $n = 1,67$. On donne $n_{\text{air}} = 1,00$.

a) Calculer le rayon de courbure à réaliser

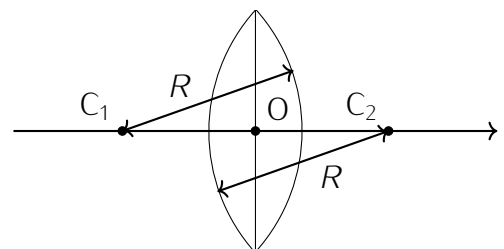
b) Pour quelle valeur de l'indice n la lentille ne dévie pas les rayons lumineux ?

(a) $n \approx n_{\text{air}}$

(b) $n = \frac{3}{2}n_{\text{air}}$

(c) $n = \frac{R}{n_{\text{air}}}$

.....



Conjugaison par une lentille mince

Entraînement 3.8 — Relation de conjugaison au centre optique.



Un objet lumineux est placé au point A, à 15,0 cm devant une lentille mince convergente de centre optique O et de distance focale $f' = 4,0$ cm.

On rappelle la relation de conjugaison aux sommets de Descartes qui permet de faire le lien entre la position $\overline{OA}$ de l'objet et la position $\overline{OA'}$ de l'image :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{\overline{OF'}}.$$

a) Exprimer $\overline{OA'}$ en fonction de $\overline{OA}$ et f'

b) Exprimer $\overline{OA}$ en fonction de $\overline{OA'}$ et f'

c) Exprimer f' en fonction de $\overline{OA}$ et $\overline{OA'}$

d) L'image est-elle située avant ou après le centre optique O ?

Entraînement 3.9 — Relation de conjugaison aux foyers.



Dans un dispositif optique convergent de distance focale $f' = 12,0$ cm, on souhaite qu'une image réelle se trouve exactement à 5,0 mm après le foyer image. On cherche la position où l'on doit placer l'objet, dans un premier temps par rapport au foyer objet F, puis par rapport au centre optique O.

On rappelle la relation de conjugaison aux foyers de Newton :

$$\overline{F'A'} \times \overline{FA} = -f'^2.$$

a) Exprimer $\overline{FA}$ en fonction de f' et $\overline{F'A'}$

b) Exprimer $\overline{OA}$ en fonction de $\overline{FA}$ et f'

c) Cet objet est-il réel ou virtuel ?

Entraînement 3.10 — Grandissement.



Un système optique donne d'un objet, une image dont le grandissement est le suivant : $\gamma = -2,0$.

a) Par rapport à l'objet, cette image est :

b) Par rapport à l'objet, cette image est :

(a) rétrécie

(b) agrandie

(a) droite

(b) renversée

.....

.....

Entraînement 3.11 — Projecteur de cinéma.



Un projecteur de cinéma contient une lentille convergente de distance focale $f' = 50,0 \text{ mm}$.

L'écran se situe à $15,0 \text{ m}$ de la lentille et on dispose d'une pellicule dont les vignettes sont de dimensions $36,0 \text{ mm} \times 24,0 \text{ mm}$.

a) À quelle distance algébrique de la lentille doit-on placer la pellicule ? .

b) Quelles sont les dimensions de l'image d'une vignette sur l'écran ?

Entraînement 3.12 — Objets et images à l'infini.



a) Un objet lumineux très éloigné, comme une étoile, peut être considéré comme étant situé à l'infini.

Où se situe l'image d'un tel objet par une lentille ?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

b) Un œil « normal » (emmétrope) n'accomode pas lorsqu'il observe une image à l'infini. Dans ce but, on souhaite projeter à l'infini, l'image d'un objet en utilisant une lentille.

Où doit-on placer l'objet ?

- (a) dans son plan focal image
- (b) dans son plan focal objet
- (c) à l'infini

.....

Entraînement 3.13 — Loupe.



Une loupe est une lentille convergente utilisée dans des conditions particulières. Dans cet exercice, la lentille utilisée a une distance focale de $10,0 \text{ cm}$. On place un objet $\overline{AB} = 2,0 \text{ cm}$ à une distance de $6,0 \text{ cm}$ en avant de la loupe.

a) Calculer la position de l'image formée par la loupe

b) Donner la nature de l'image

c) Calculer la taille de l'image formée par la loupe

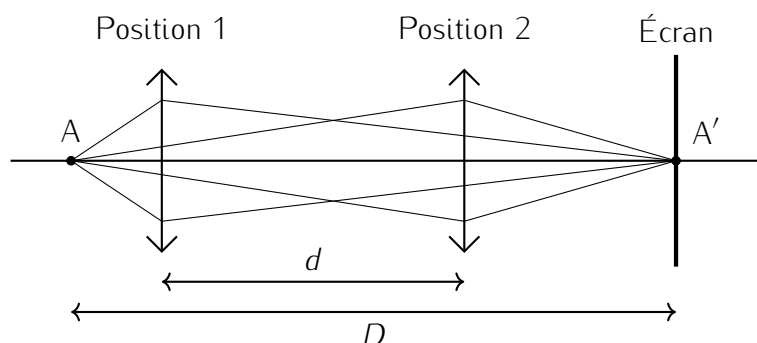
d) Cette image est-elle droite ou renversée ?

Entraînement 3.14 — Méthode de Bessel.



Pour mesurer la distance focale d'une lentille, on peut utiliser la méthode de Bessel.

On considère un objet donné, et on fixe la distance D entre l'objet et l'écran. On s'assure que D soit suffisamment grande pour qu'il existe deux positions où intercaler la lentille entre l'objet et l'écran, pour lesquelles l'image sur l'écran soit nette. On note d la distance entre ces deux positions.



On peut alors montrer la relation suivante :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\frac{D+d}{2}} - \frac{1}{\frac{-(D-d)}{2}}.$$

a) Exprimer f' en fonction de D et d

b) Exprimer f' lorsque $d = \frac{D}{4}$

c) Exprimer d lorsque $f' = \frac{D}{4}$

Réponses mélangées

virtuelle	Incorrect	$\frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$	Correct	$+20^\circ$	5,0 cm
(a)	(a)	$\arctan\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\right) \times \frac{180}{\pi}$	$\frac{15D}{64}$	$\overline{OA'} = -15$ cm	
$0,53^\circ$	(b)	réel	-2	(a)	$\frac{-f'^2}{\overline{F'A'}}$
$\overline{OA} = -5,02$ cm	(b)	$\overline{FA} - f'$	Incorrect	(b)	0,22 m
$\arctan\left(\frac{\overline{AB}}{\overline{OA}}\right)$	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OA'}}{\overline{OA} - \overline{OA'}}$	$\frac{\overline{OA} \times \overline{OF'}}{\overline{OA} + \overline{OF'}}$	après	$0,52^\circ$	$10,8$ m $\times$ $7,2$ m
(b)	0	Correct	(b)	$\frac{D^2 - d^2}{4D}$	(b)
					$\frac{\overline{OA'} \times f'}{f' - \overline{OA'}}$

 Exercice 1 : Réflexion sur un miroir horizontal.

Un homme dont les yeux sont placés à $H = 1,80$ m du sol cherche à observer un petit arbre de hauteur $h = 1,50$ m situé à une distance $D = 5,00$ m par réflexion sur un miroir plan posé à plat sur le sol. Déterminer la position et la largeur minimale du miroir.

 Exercice 2 : Réflexion sur un miroir vertical.

Un homme dont les yeux sont placés à $H = 1,80$ m du sol cherche à s'observer entièrement par réflexion dans un miroir plan vertical. Déterminer la position et la hauteur minimale du miroir.

 Exercice 3 : Image d'un objet par un périscope.

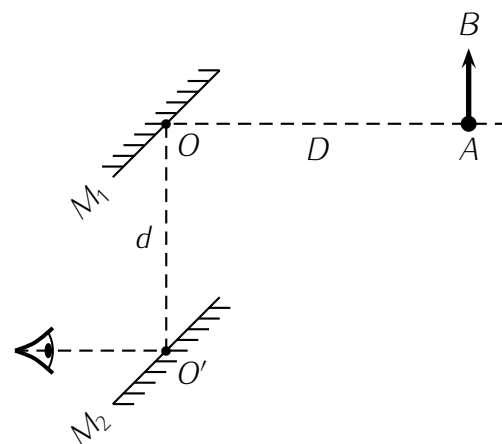
Un périscope simple est un système optique formé de deux miroirs plans qui permet par exemple d'observer un défilé par dessus une foule.

Les périscope de sous-marins sont des systèmes optiques plus compliqués.

On suppose que les plans des miroirs font un angle de 45° avec la verticale.

L'objet AB observé est lui aussi vertical et à la distance D du centre O du miroir supérieur.

La distance OO' entre les deux centres des miroirs est d .



1. Par construction, déterminer la position de $A''B''$, l'image de AB par le système optique.
2. Quelle est la valeur du grandissement ?
3. Le système optique est-il stigmatique ?
4. Tracer deux rayons issus de AB et qui traversent le système optique et parviennent à l'œil. Préciser la nature de $A''B''$.

 Exercice 4 : Applications directes du cours

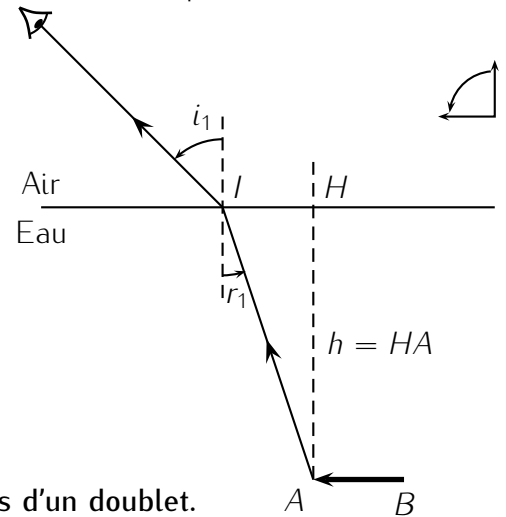
1. Une camera aérienne survolant la Terre à une altitude de 4000 m de distance focale 50 cm produit une image de format 18 cm sur 18 cm d'une ville. Calculer la surface photographiée.
2. Considérons une paire de lunettes correctrices pour la myopie. L'ordonnance indique une vergence de -2δ .
 - Quelle est la distance focale image de la paire de lunettes ? Quelle est le type de lentilles utilisées ?
 - Muni de cette paire de lunettes, je lis un livre situé à 30 cm de mon visage. Quelle est la distance de l'image de cet ouvrage à travers les lunettes ?
3. On donne une lentille mince convergente de 50 cm de distance focale. À quelle distance faut-il placer un objet pour que son image réelle soit 5 fois plus grande ?
4. Même question pour une image virtuelle.
5. On donne point lumineux P placé à 75 cm d'une lentille convergente dont la distance focale est 50 cm. Que voit-on sur un écran placé de l'autre côté de la lentille à 1 m ? Faire varier la position de l'écran et expliquer ce que l'on voit.
6. Même question avec une lentille divergente.

7. Soit un appareil photo composé d'une seule lentille de 50 mm de focale. Un PCSI2 de 1,70 m se tient à 10 m devant l'objectif. Montrer que la distance lentille/capteur doit être de 50,3 mm. Déterminer la taille du PCSI2 sur la photographie.

 Exercice 5 : Pêcheur au harpon.

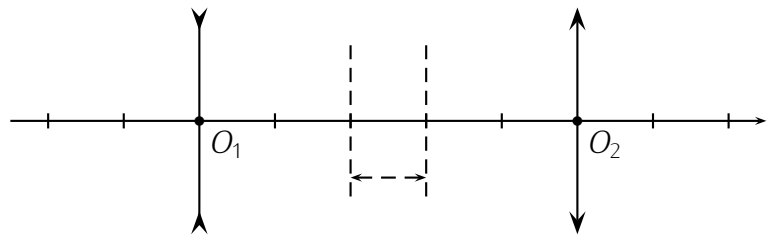
On considère $n_{\text{air}} \simeq 1,00$ et $n_{\text{eau}} = n \simeq 1,33$.

- Une truite assimilée à un segment $AB = 40$ cm horizontal se situe à la profondeur $HA = 1$ m. Un pêcheur observe A_1B_1 , l'image de AB par le dioptre, sous une incidence (pour A_1) $i_1 = 30^\circ$. Puis en se rapprochant sous une incidence $i_2 = 10^\circ$. Exprimer HA_1 et HA_2 la position des images A_1 et A_2 vues par le pêcheur en fonction de h , n et i_1 ou i_2 . Faire les applications numériques et conclure.
- Le pêcheur étant maintenant quasi vertical par rapport au milieu O de la truite, quelle est la position apparente du poisson et son diamètre angulaire apparent α . On considérera que les yeux du pêcheur sont situés à 1 m de la surface de l'eau ?



 Exercice 6 : Calcul algébrique de la position des foyers d'un doublet.

On donne les distances focales pour chacune des deux lentilles représentées ci-contre : $|f'_1| = 3a$ et $|f'_2| = 2a$, avec $a > 0$. Déterminer par le calcul puis par tracé, la position des foyers principaux du système.



 Exercice 7 : Focométrie, la totale.

La focométrie est la recherche de la distance focale d'un système optique : lentilles minces sphériques.

- Détermination très rapide. Comment savoir, au touché si une lentille est convergente ou divergente ?
- Détermination rapide. Montrer, à l'aide de constructions graphiques qu'il est possible de différencier une lentille convergente d'une lentille divergente en regardant un objet suffisamment près : $|\overline{AO}| < |f|$.
- Méthode d'auto-collimation. On déplace un objet AB face à une lentille accolée ou non à un miroir plan jusqu'à ce que l'image $A'B'$ de AB se forme dans le plan de l'objet. Montrer que cette méthode permet de déterminer la distance focale de la lentille : on tracera l'image de AB si A en F . Peut-on directement utiliser cette méthode avec une lentille divergente ?
- Méthode de BESSEL Un objet AB et un écran (E) sont maintenus fixes et distants de D . Entre l'objet et l'écran, on déplace une lentille convergente de distance focale f' image à déterminer. Montrer que si $D > 4f'$, il existe deux positions de la lentille distantes de d pour lesquelles il y a une image nette de l'objet sur l'écran. Exprimer f' en fonction de d et D .
- Méthode par conjugaison. Montrer qu'on peut déterminer la distance focale d'une lentille mince par utilisation d'une formule de conjugaison. Laquelle choisiriez-vous ? Quelle type de courbe traceriez-vous à partir d'un tableau de valeurs composé de couples $(p = \overline{OA}, p' = \overline{OA'})$ pour déterminer f' ?

6. Expliquez comment on peut mesurer la distance focale d'une lentille (L_1) divergente inconnue en lui accolant utilisant une deuxième lentille (L_2), celle-ci connue et convergente.
7. Méthode de BADAL. On utilise deux lentilles convergentes (L_1) et (L_2) distantes de $\overline{O_1O_2} > f'_2$. Faire une figure.

Un objet ponctuel A est placé en F_1 (par auto collimation) et a pour image A'' . Déterminer la position de A'' .

On intercale une lentille divergente (L_3) dont on veut mesurer la distance focale telle que $O_3 = F_2$. Faire une figure et déterminer une méthode de mesure de f'_3 .

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Comment modéliser
simplement un œil en
optique ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Décrire le processus
d'accommodation pour l'œil.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Qu'est-ce que le punctum
proximum ? Où se trouve-t-il
pour un œil emmétrope ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Qu'est-ce que le punctum
remotum ? Où se trouve-t-il
pour un œil emmétrope ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Comment modéliser
simplement un appareil
photographique ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Quelles sont les influences du
diaphragme sur la
photographie.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Quelle est l'influence de la
distance focale de la lentille
d'un appareil photo ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Quelle est l'influence du
temps de pose sur un
appareil photo ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Que vaut la résolution
angulaire de l'œil humain ?

Le punctum proximum est le point le plus proche que l'œil peut voir net. Pour un œil emmétrope il se situe à une quinzaine de centimètre. Cette distance dépend de l'âge.

Les muscles ciliaires rendent le cristallin plus ou moins convergent afin de former une image nette sur la rétine.

On modélise un œil par une lentille convergente de vergence variable placée à une distance fixe d'un écran.

Diminuer l'ouverture du diaphragme permet de diminuer la quantité de lumière entrant dans l'appareil et d'augmenter la profondeur de champ.

On modélise un appareil photo par une lentille convergente de vergence constante située à une distance variable d'un capteur. Un diaphragme est également accolé à la lentille.

Le punctum remotum est le point le plus éloigné que l'on peut voir net. Pour un œil emmétrope il se situe à l'infini.

La résolution angulaire de l'œil humain est de 3.10^{-4} rad

Le temps de pose détermine la quantité de lumière frappant le capteur. Plus il est long plus le capteur sera exposé à la lumière et l'image sera lumineuse.

Augmenter la distance focale permet de diminuer l'angle de champ et donc d'agrandir les images. Au contraire diminuer la distance focale permet de photographier un champ plus large.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Construire graphiquement la profondeur de champ d'un appareil photo.

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Comment modéliser une lunette astronomique ?

INSTRUMENTS D'OPTIQUE

Exprimer, en fonction des distances focales f'_1 et f'_2 , le grossissement d'une lunette astronomique utilisée dans les conditions de Gauss.

Avec les notations du cours :
on définit le grossissement

algébrique $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$. Or

$$\tan \alpha \simeq \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f_1} < 0 \text{ et}$$

$$\tan \alpha' \simeq \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} > 0 \text{ d'où}$$

$$G = -\frac{f'_1}{f'_2} < 0$$

On modélise une lunette
astronomique par l'association
deux lentilles convergentes.
La distance les séparant est
égale à la somme de leur
distances focales afin
d'obtenir un dispositif afocal.



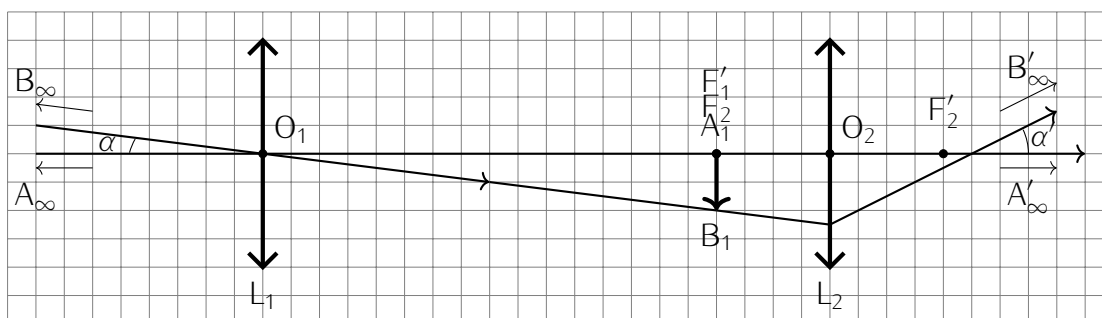
O_3 – Modèles d'instruments optiques

Conseils pour ce TD

- Ceux du TD de O_2 .
- Respecter les notations. Par exemple, on note f' la distance focale $\overline{OF'}$ d'une lentille et F' son foyer principal image.
- Dans le cas d'un système optique constitué de plusieurs lentilles, on peut utiliser la notion d'images intermédiaires (faire un tableau du type $A - (L_1) \rightarrow A_1 - (L_2) \rightarrow A'$ par exemple) ou alors tracer le devenir d'un rayon après la suite de réfractions.
- Dans le cas courant où l'objet (respectivement, l'image) est à l'infini, aucune relation de conjugaison n'est nécessaire : l'image (resp. l'objet) est dans le plan focal image (resp. objet).

Systèmes optiques

Entraînement 4.1 — Schéma optique d'une lunette astronomique afocale.



Le schéma ci-dessus modélise une lunette astronomique afocale, où un carreau correspond à une longueur réelle de 2,5 cm.

Calculer les distances algébriques suivantes :

a) $\overline{O_1F'_1}$

b) $\overline{O_2F_2}$

c) $\overline{O_2O_1}$

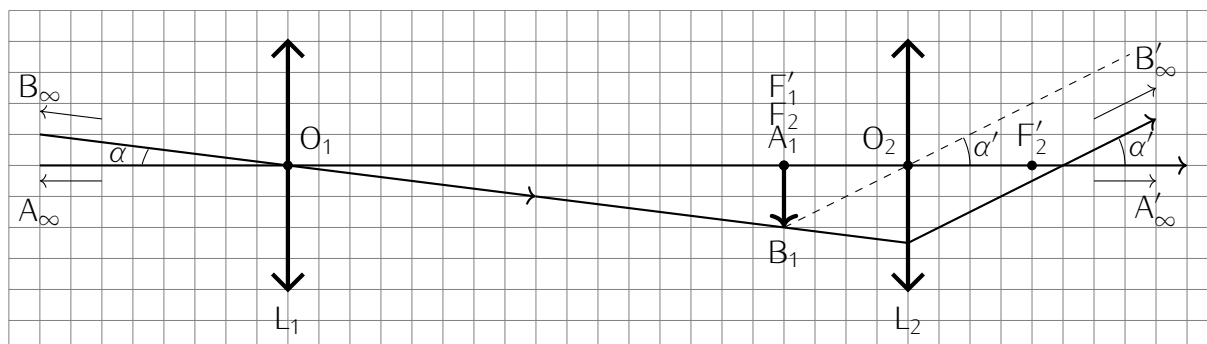
d) $\overline{A_1F'_2}$

Entraînement 4.2 — Grossissement d'une lunette astronomique afocale.



On considère la lunette astronomique afocale schématisée dans l'entraînement précédent.

Elle est constituée d'un objectif (lentille convergente L_1) et d'un oculaire (lentille convergente L_2) alignés sur le même axe optique.



On introduit les grandeurs suivantes :

- la distance focale image de l'objectif, notée f'_1
- la distance focale image de l'oculaire, notée f'_2
- l'objet lointain observé par la lunette, noté $\overline{A_\infty B_\infty}$
- l'image intermédiaire de l'objet par l'objectif, notée $\overline{A_1 B_1}$
- l'image à l'infini de l'image intermédiaire par l'oculaire, notée $\overline{A'_\infty B'_\infty}$
- le diamètre apparent α de l'objet
- le diamètre apparent α' de l'image

On définit le grossissement de la lunette, noté G , comme le rapport du diamètre apparent de l'objet observé à la lunette sur le diamètre apparent réel de l'objet.

Autrement dit, on pose

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha}.$$

Dans cet entraînement, les angles ne seront pas orientés et on travaillera avec des longueurs plutôt que des valeurs algébriques.

a) Exprimer α en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

b) Exprimer α' en fonction de $A_1 B_1$ et d'une distance focale.

c) Exprimer G en fonction de f'_1 et de f'_2 .

d) Déterminer la valeur de G .

Réponses mélangées

20 cm $\frac{f'_1}{f'_2}$ 40 cm $\frac{A_1B_1}{f'_1}$ -10 cm 4 $\frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2}$ -50 cm

 Exercice 1 : Lunette astronomique de Meudon.

La lunette astronomique de Meudon, en France, est schématisée par l'association de deux lentilles minces convergentes, l'une, l'objectif (L_1) de focale $f'_1 = 16$ m et l'autre, l'oculaire (L_2) de distance focale $f'_2 = 4$ cm. Le diamètre de l'objectif est $D = 80$ cm.

1. Faire un schéma de la lunette quand elle est réglée à l'infini. Dessiner la marche d'un faisceau lumineux issu d'un objet situé à l'infini mais pas sur l'axe optique, les rayons arrivent alors sur l'objectif en faisant un angle α avec l'axe optique.
2. Calculer la valeur du grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ où α' est l'angle que font les rayons avec l'axe optique en sortie du système.
3. Situer le cercle oculaire (image de l'objectif à travers (L_2)) et calculer son diamètre d .
4. On observe une étoile dont la diamètre angulaire apparent est $0,02''$. Montrer que cette étoile apparaît ponctuelle pour un observateur qui regarde dans la lunette, la résolution angulaire de l'œil est d'environ $1,5'$ Quel est alors l'intérêt ?

 Exercice 2 : Système afocal de trois lentilles.

Soient trois lentilles de distances focales respectives $f'_1 = -1,5$ m, $f'_2 = 40$ cm et $f'_3 = -20$ cm.

La lentille (L_2) est placée entre les lentilles (L_1) et (L_3).

Le système est centré, aplanétique et stigmatique.

1. Donner la signification de ces trois derniers termes.
2. On veut que le système soit afocal c'est à dire que ses foyers principaux soient rejetés à l'infini. Déterminer alors la relation entre les trois distances focales et les distances d_1 séparant (L_1) de (L_2) et d_2 séparant (L_2) de (L_3). Calculer d_2 si $d_1 = 50$ cm.
3. Faire une figure du système à l'échelle et déterminer graphiquement si le grandissement transversal est inférieur ou supérieur à 1.

 Exercice 3 : Appareil photographique.

1. L'objectif d'un appareil photographique est assimilable à une lentille mince convergente (L_1) de 10 cm de distance focale. On photographie une tour de 50 m de haut située à 1 km.
 - (a) À quelle distance de l'objectif se situe l'image A_1B_1 obtenue ?
 - (b) Quelle est la taille de cette image ?
2. On associe à cet objectif une lentille mince divergente (L_2) de distance focale -4 cm. Le capteur est située à 12 cm de (L_2) on règle $\overline{O_1O_2}$ jusqu'à obtention, sur le capteur, d'une image finale $A'B'$ nette.
 - (a) Quelle est alors la distance $\overline{O_1O_2}$ entre (L_1) et (L_2) ?
 - (b) Quelle est la taille de l'image dans ce cas ?
 - (c) Quel est l'intérêt de (L_2) ?
 - (d) Sur un schéma à l'échelle 1/1, positionner les lentilles (L_1) et (L_2), les images A_1B_1 et $A'B'$ en utilisant les valeurs numériques précédentes. Mettre en évidence sur ce schéma α , l'angle apparent sous lequel on voit l'objet depuis le centre optique de (L_1).
 - (e) Sur le même schéma, tracer la marche, à travers (L_1) et (L_2), d'un faisceau lumineux incident couvrant toute la lentille (L_1) dans les deux cas suivants :
 - faisceau parallèle de même direction que l'axe optique du système.
 - faisceau parallèle, incliné selon l'angle apparent α .
3. On reprend l'appareil photographique de la question 1.

- (a) Quelle devrait être la distance focale d'une lentille convergente unique qui donnerait de la même tour, une image de même taille que celle donnée par le système $((L_1), (L_2))$ précédent ?
- (b) Pourquoi utilise-t-on la solution de la question 2. plutôt que celle de la question 3. pour fabriquer les appareils photographiques ?

Exercice 4 : Ouverture d'un appareil photographique.

Un appareil photographique argentique est constitué d'une lentille convergente de focale $f' = 50$ mm. La pellicule est placée à la distance d de la lentille. Les rayons incidents sont limités par un diaphragme de diamètre D et dont l'ouverture est circulaire.

1. On souhaite photographier des objets à une distance variant de $x = 0,6$ m à l'infini par rapport à la lentille. Calculer les distances $d_{\min}$ et $d_{\max}$ de la pellicule pour lesquelles l'image formée est nette.
2. On définit un nombre N appelé nombre d'ouverture vérifiant $\frac{1}{N} = \frac{D}{f'}$ (appelée ouverture relative). Sur les objectifs, on peut faire varier le diamètre du diaphragme d'entrée de manière discontinue, ce qui est repéré sur l'objectif par une série de nombres N dont les valeurs sont 2,8 ; 4 ; 5,6 ; 8 ; 11 ; 16. Sur les boîtiers d'appareils photographiques, on dispose d'autre part des temps d'exposition nécessaire respectifs (en s) : $t_e = \frac{1}{15} ; \frac{1}{30} ; \frac{1}{60} ; \frac{1}{125} ; \frac{1}{250} ; \frac{1}{500}$. Expliquez.
3. La pellicule est caractérisée par un grain $g = 0,02$ mm (taille du grain de l'émulsion de la pellicule). On souhaite que la taille de la tache image d'un objet A reste inférieure à g pour que l'image soit satisfaisante. La mise au point étant faite à l'infini, mettre en évidence à l'aide d'une construction géométrique, la distance minimale L_0 , dite "hyperfocale", qui sépare A de la lentille pour que l'image soit correcte. Exprimer L_0 en fonction de g , f' et N .
4. Soit P_f la profondeur du champ (zone de l'espace objet qui donne une image nette). Qualitativement, comment P_f varie-t-elle avec N , avec f' ?

Exercice 5 : Galilée, GPT, et vous

Dans cet exercice c'est vous le prof de physique. Voici l'énoncé que vous avez donné à vos étudiants, un PCSI-GPT vous a rendu sa copie. C'est à vous de la corriger :

- Il faut corriger ce qui est faux
- Il faut corriger la rédaction et la présentation

Bon courage !

Énoncé :

La lunette de Galilée est formée d'une lentille objectif $((L_1) : O_1, f'_1 = 20$ cm) et d'une lentille oculaire divergente $((L) : O, f' < 0)$. Le foyer objet F de (L) coïncide avec le foyer image F'_1 de (L_1) . La longueur $l = O_1O$ vaut 15 cm. On pointe un objet AB de 2 cm à 30 cm devant l'objectif.

1. Construire l'image $A'B'$ de AB . Est-elle réelle ou virtuelle ?
2. Calculer $p' = \overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$ (valeurs numériques).
3. Le grandissement de l'ensemble dépend-il de la position de AB ? On tracera un rayon issu de B et arrivant sur le système parallèlement à l'axe optique.
4. Cet appareil est destiné à voir des objets éloignés. En appelant α le diamètre angulaire apparent d'un objet à l'infini et α' celui de son image, calculer le grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de cette lunette.

1. Construction de l'image $A'B'$ de AB . Réalité ou virtualité ?

Image donnée par l'objectif (L_1). On applique la relation des lentilles fines pour (L_1) :

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{f'_1},$$

avec $p = 30$ cm et $f'_1 = 20$ cm. On trouve

$$\frac{1}{30} + \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{1}{p'_1} = \frac{1}{20} - \frac{1}{30} = \frac{1}{60},$$

donc

$$p'_1 = 60 \text{ cm.}$$

L'objectif forme donc une image intermédiaire A_1B_1 située à 60 cm à droite de O_1 . L'agrandissement par l'objectif vaut

$$\gamma_1 = -\frac{p'_1}{p} = -\frac{60}{30} = -2,$$

donc la hauteur A_1B_1 est

$$A_1B_1 = \gamma_1 \cdot AB = -2 \times 2 \text{ cm} = -4 \text{ cm},$$

c'est-à-dire une image renversée de hauteur 4 cm.

Placement de l'oculaire (L). On nous dit que le foyer objet F de l'oculaire coïncide avec F'_1 , le foyer image de (L_1). Le foyer image F'_1 du premier objectif est à $f'_1 = 20$ cm de O_1 , donc F est à 20 cm de O_1 . Comme O est à 15 cm de O_1 , on a $OF = 5$ cm. Par conséquent l'oculaire a une distance focale (algébrique) donnée par

$$f'_{\text{oculaire}} = OF = +5 \text{ cm.}$$

Construction finale. L'image A_1B_1 produite par l'objectif est donc située à 60 cm de O_1 , soit $60 - 15 = 45$ cm à droite de O . En tenant compte des propriétés des lentilles et de la nature divergente de l'oculaire on trouve que l'image finale $A'B'$ vue par l'observateur est *virtuelle* et située entre l'oculaire et l'objet intermédiaire. On conclut donc : **$A'B'$ est une image virtuelle.**

2. Calculs numériques : $p' = \overline{OA'}$ et $\overline{A'B'}$.

Nous voulons la position $p' = \overline{OA'}$ de l'image finale par rapport au centre O de l'oculaire et la taille $A'B'$.

Données synthétiques (utilisées ci-dessous).

$$O_1O = 15 \text{ cm}, \quad p = 30 \text{ cm}, \quad f'_1 = 20 \text{ cm}, \quad AB = 2 \text{ cm}.$$

Calcul de p' . On utilise la formule des lentilles pour l'oculaire. En prenant pour l'oculaire la valeur (erronée) $f'_{\text{oculaire}} = +5 \text{ cm}$, et en notant que l'objet pour l'oculaire (l'image A_1) est situé à 45 cm à droite de O , on pose la distance objet relative p_o (algébrique) égale à -45 cm (objet situé sur le côté image). La formule donne :

$$\frac{1}{p_o} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f'_{\text{oculaire}}} \Rightarrow \frac{1}{-45} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{5}.$$

D'où

$$\frac{1}{p'} = \frac{1}{5} + \frac{1}{45} = \frac{9+1}{45} = \frac{10}{45} = \frac{2}{9},$$

donc

$$p' = \frac{9}{2} = 4,5 \text{ cm}.$$

Ainsi la position de l'image relative à O serait $p' = 4,5 \text{ cm}$ à droite de O . * (Erreur volontaire : résultat numérique faux à cause de la mauvaise valeur de f' .)

Calcul de la hauteur $A'B'$. L'agrandissement total est le produit des deux agrandissements. Nous avons $\gamma_1 = -2$ pour l'objectif. L'oculaire (avec $f'_{\text{oculaire}} = +5 \text{ cm}$ erroné) donne un agrandissement

$$\gamma_2 = -\frac{p'}{p_o} = -\frac{4,5}{-45} = +\frac{4,5}{45} = 0,1.$$

Le grandissement total est donc

$$\Gamma = \gamma_1 \gamma_2 = (-2) \times 0,1 = -0,2.$$

La hauteur finale vaut

$$A'B' = \Gamma \cdot AB = -0,2 \times 2 \text{ cm} = -0,4 \text{ cm},$$

c'est-à-dire 0,4 cm et renversée.

3. Le grandissement dépend-t-il de la position de AB ?

Trace d'un rayon particulier.

Discussion. Pour une lunette classique l'agrandissement angulaire pour un objet à l'infini est $G = \frac{f'_1}{f'_{\text{oculaire}}}$ (rapport des focaux). Cependant pour un objet placé à distance finie (ici 30 cm) l'agrandissement linéique dépend effectivement de la position de l'objet : l'image intermédiaire fournie par l'objectif change de position et de taille quand l'objet varie, donc le grandissement total dépend de p . Ainsi **oui**, le grandissement linéique dépend de la position de AB .

Trace d'un rayon. On trace un rayon issu de B parallèle à l'axe optique arrivant sur le système : il est focalisé par l'objectif au foyer image F'_1 (à 20 cm de O_1), puis entre dans l'oculaire et en sort en divergeant comme s'il provenait du point A' déterminé ci-dessus.

4. Grossissement pour objets éloignés (lunette).

Pour un objet à l'infini le faisceau après l'objectif est dirigé vers le foyer image F'_1 . Dans une lunette de Galilée (objectif convergent, oculaire divergent) le grossissement angulaire vaut (formule usuelle)

$$G = \frac{\alpha'}{\alpha} = \frac{f'_1}{f'_{\text{oculaire}}}.$$

En prenant $f'_1 = 20$ cm et la valeur (erronée) $f'_{\text{oculaire}} = +5$ cm on obtient

$$G = \frac{20}{5} = 4.$$

Exercice 6 : Étude d'un microscope.

Un microscope peut être modélisé par deux lentilles convergentes (L_1) et (L_2) alignées sur le même axe optique, entourées d'air.

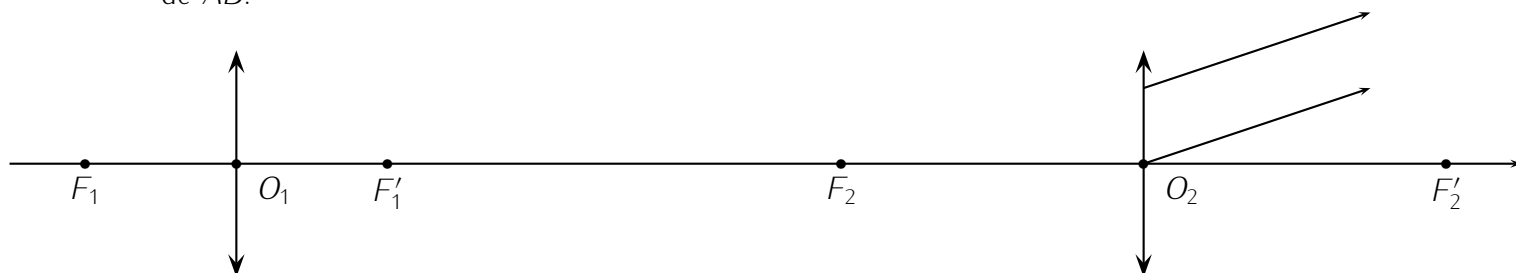
(L_1) modélise l'objectif et a une distance focale image $f'_1 = 2$ mm. (L_2) modélise l'oculaire et a une distance focale image $f'_2 = 30$ mm. La distance $\Delta = \overline{F'_1 F_2}$ entre le foyer image de (L_1) et le foyer objet de (L_2) vaut 160 mm, c'est l'intervalle optique du microscope.

La distance minimale de vision de l'œil est $d_m = 25$ cm : c'est le punctum proximum, la distance au dessous de laquelle l'œil n'arrive plus à accommoder : l'image n'est plus nette.

Par contre, l'œil normal voit net un objet situé à l'infini et cela sans accommoder.

On observe, à travers le microscope, un petit objet AB perpendiculaire à l'axe optique avec A et l'œil sur l'axe optique.

1. Rappeler la formule de conjugaison de Newton pour une lentille mince sphérique. Donner également les deux formules de Newton pour le grandissement γ .
2. Où doit être placé A pour que l'œil observe AB à travers le microscope sans accommoder ? Faire l'application numérique.
3. Les deux rayons sortant de la lentille (L_2) sur le dessin ci-dessous (qui n'est pas à l'échelle) sont issus de B . Dessiner leur trajet à travers le microscope et trouver ainsi graphiquement la position de AB .



4. Expression du grossissement :
 - (a) Sous quel angle maximal θ_0 un œil normal voit-il AB sans le microscope ? (on prendra $\tan \theta_0 \simeq \theta_0$).
 - (b) Sous quel angle θ l'œil voit-il AB à travers le microscope ? (on prendra $\tan \theta \simeq \theta$).
 - (c) On définit le grossissement par $G = \frac{\theta}{\theta_0}$. Calculer G en fonction de Δ , d_m , f'_1 et f'_2 . Faire l'application numérique.
5. Le cercle oculaire de centre C est l'image de la monture de (L_1) à travers (L_2).
 - (a) Que vaut $\overline{CF'_2}$.

- (b) Quel est le diamètre D' du cercle oculaire sachant que le diamètre de la monture de (L_1) est $D = 11 \text{ mm}$?
6. Comme la rétine est discontinue, granulaire, l'œil ne peut pas distinguer deux rayons lumineux l'un de l'autre s'ils font entre eux un angle inférieur à $\varepsilon = 1,5$ minute d'arc. Quelle est la taille du plus petit objet AB que l'on pourra distinguer ? On donnera son expression en fonction de Δ , ε , f'_1 et f'_2 . Faire l'application numérique.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'un courant électrique ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Définir l'intensité du courant électrique.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Justifier que même si la charge électrique est quantifiée, elle nous apparaît comme une grandeur continue.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'une tension électrique ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Citer quelques exemples d'ordres de grandeurs d'intensités de courants électriques.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Citer quelques exemples d'ordres de grandeurs de tensions électriques.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce que l'approximation des régimes quasi-stationnaires ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Un circuit de longueur L est alimenté par un courant de fréquence f . À quelle condition ce circuit est dans l'ARQS ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Énoncer la loi des nœuds.

Les courants macroscopiques mobilisent un très grand nombre d'électrons. Par exemple, un courant d'intensité $i = 1 \text{ mA}$ qui traverse un conducteur pendant $\tau = 1 \text{ ms}$ met en jeu $N = \frac{i\tau}{Ne} \simeq 6.10^{12}$ électrons.

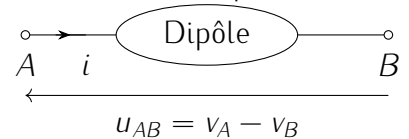
L'intensité d'un courant est définie par $i = \frac{dq}{dt}$, où dq est la charge qui traverse une section de conducteur pendant l'intervalle de temps dt .

Un courant électrique est un déplacement de particules chargées.

- En électronique : de quelques μV à quelques V.
- Pile électrique : de 1,5 V à 9V.
- Batterie de voiture : 12 V
- Usage domestique en France : 230 V, aux États-Unis ou au Canada 110 V.
- Alimentation d'un TGV : 25 kV.
- Foudre 100 000 V

- en électronique : de quelques pA à environ 1 A.
- seuil de perception au touché : 1 mA.
- fibrillation ventriculaire : 1s à 100 mA.
- contrat EDF : à partir de 30 A.
- industrie électrolytique : jusqu'à plusieurs milliers d'Ampères
- foudre : 5000 à 300 000 A.

Une tension est une différence de potentiel.



La somme algébrique des intensités des courants qui convergent vers un nœud est nulle :

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon_j i_j = 0$$

avec $\varepsilon_j = \pm 1$ selon l'orientation du courant

Il faut que $\tau = \frac{L}{c} \ll \frac{1}{f}$ soit

$$f \ll \frac{c}{L}$$

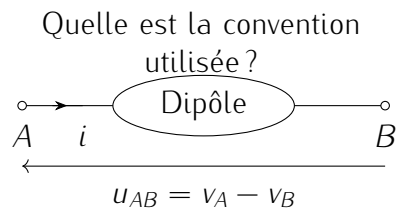
où c est la vitesse de la lumière.

Un circuit est dans l'approximation des régimes quasi-stationnaire si l'on peut négliger le temps de propagation de l'information le long du circuit.

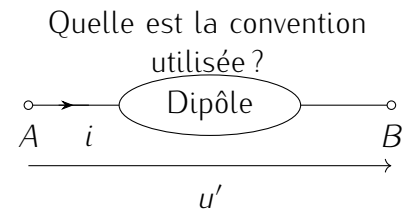
LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Énoncer la loi des nœuds.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE



LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE



LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Définir la puissance reçue par un dipôle.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce que la caractéristique d'un dipôle ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'un point de fonctionnement d'un dipôle ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'un dipôle symétrique ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'un dipôle passif ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODYNAMIQUE

Qu'est-ce qu'un dipôle actif ?

Convention générateur.

Convention récepteur.

La somme algébrique des tensions aux bornes des branches successives d'une maille (orientée) est nulle.

$$\sum_{j=1}^N \varepsilon_j u_j = 0$$

avec $\varepsilon_j = \pm 1$ selon l'orientation de la flèche de tension par rapport à celle de la maille.

Un point de fonctionnement est un point de la caractéristique du dipôle. Il s'agit du couple (u_p, i_p) de la tension à ses bornes et du courant le traversant.

La caractéristique d'un dipôle est le graphe représentant le courant traversant le dipôle en fonction de la tension à ses bornes ($i = f(u)$).

En convention récepteur, la puissance reçue par un dipôle est $\mathcal{P}_{\text{reçue}} = ui$

Un dipôle est passif si sa caractéristique ne passe pas par l'origine.

Un dipôle est passif si sa caractéristique passe par l'origine.

Un dipôle est symétrique si son fonctionnement n'est pas modifié lors qu'on permute ses bornes. Sa caractéristique admet l'origine comme point de symétrie.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Qu'est-ce qu'un dipôle linéaire ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Quelle est la relation constitutive d'un conducteur ohmique ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Quelle est la relation constitutive d'un générateur idéal de tension ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Quelle est la relation constitutive d'un générateur idéal de courant ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

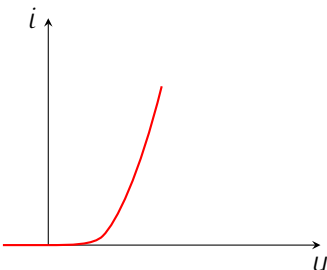
Quelle est la relation constitutive d'un générateur de Thévenin ?

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Tracer la caractéristique, en convention générateur, d'un générateur de Thévenin de force électromotrice E et de résistance interne r .

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

On donne ci-dessous la caractéristique d'une diode en convention récepteur. Trouver graphiquement le point de fonctionnement du circuit formé par cette diode et d'un générateur réel.



LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Exprimer la puissance dissipée par effet Joule dans un résistor.

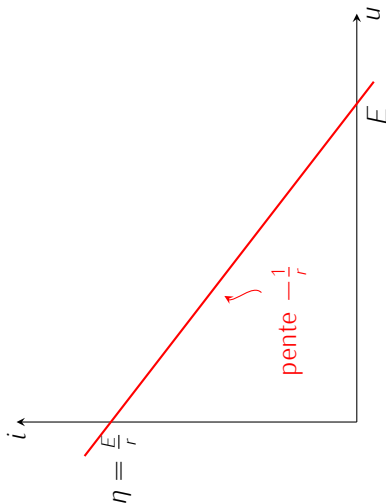
LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINAMIQUE

Soit N résistors de résistance $R_1, R_2, \dots, R_N$, branchés en série. Donner l'expression de la résistance équivalente.

$$u = E = cste.$$

En convention récepteur
 $u = Ri.$

Un dipôle est linéaire si sa relation constitutive (la relation liant i à u) est linéaire.



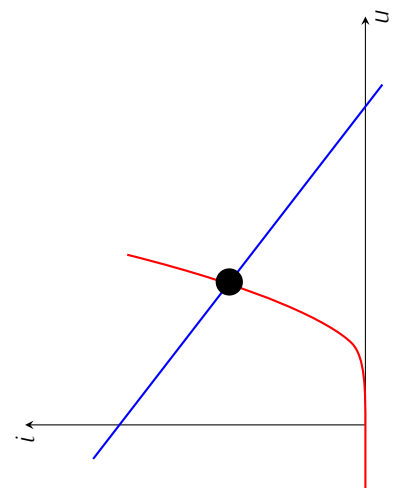
$$u = E - ri$$

$$i = \eta = cste.$$

La résistance équivalente est

$$R_{\text{éq}} = \sum_{i=1}^N R_i$$

La puissance dissipée est
 $\mathcal{P}_J = Ri^2 = \frac{u^2}{R}$



LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINÉMIQUE

Soit N résistors de résistance $R_1, R_2, \dots, R_N$, branchés en parallèle. Donner l'expression de la résistance équivalente.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINÉMIQUE

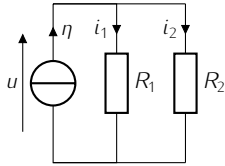
Soit deux résistances R_1 et R_2 branchées en série avec un générateur idéal de tension E . Établir l'expression de la tension U_1 aux bornes de la résistance R_1 . Généraliser ce résultat pour obtenir le théorème du diviseur de tension.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINÉMIQUE

Soit un circuit contenant deux résistances R_1 et R_2 en parallèle. Cette ensemble est branché en série avec un générateur idéal de courant η . Établir l'expression du courant i_1 aux traversant la résistance R_1 . Généraliser ce résultat pour obtenir le théorème du diviseur de courant.

LOIS GÉNÉRALES DE L'ÉLECTRODINÉMIQUE

Comment étudier un circuit électrique ?

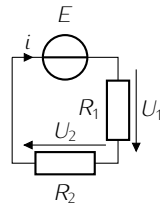


La loi des nœuds donne
 $i = i_1 + i_2 = \frac{u}{R_1} + \frac{u}{R_2}$ d'où

$$i_1 = \frac{\frac{1}{R_1}}{\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}} \eta$$

On généralise :

$$i_k = \frac{\frac{1}{R_k}}{\sum \frac{1}{R_j}} \eta$$



La loi des mailles donne
 $E = U_1 + U_2 = (R_1 + R_2)i$
 ainsi, $U_1 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$. On
 généralise ce résultat

$$U_k = \frac{R_k}{\sum R_j} E$$

La résistance équivalente est

$$\text{donnée par : } \frac{1}{R_{\text{éq}}} = \sum_{i=1}^N \frac{1}{R_i}$$

1. Faire un schéma
2. Simplifier le circuit
3. Représenter et nommer les courants et tensions
4. Diviseur de tension ou de courant ? Sinon :
5. Appliquer les lois de Kirchhoff
6. Écrire les relations constitutives des dipôles
7. Résoudre

E_{C1} – Lois générales de l'électrocinétique dans le cadre de l'ARQS

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- Savoir reconnaître sans hésitation des dipôles en série ou en parallèle et retenir que l'association en série de deux résistors R_1 et R_2 est équivalente à $R_{\text{série}} = R_1 + R_2$ alors qu'en parallèle $R_{\text{parallèle}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{R}{2}$ si $R_1 = R_2$.
- Faire bien attention à respecter la convention récepteur ou générateur quand on écrit une relation constitutive.
- Toujours chercher à simplifier le circuit en utilisant les associations de dipôles avant la mise en équation.

Autour du courant électrique

Entraînement 5.1 — Une bataille de courants.



Lequel de ces trois courants électriques présente la plus forte intensité ?

- (a) 5 000 électrons durant 1 ms (c) 20 milliards d'électrons durant 1 min
 (b) 0,2 mol d'électrons durant 1 an

.....

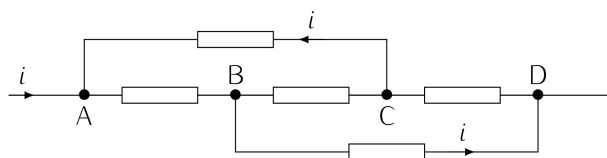
Entraînement 5.2



L'intensité du courant traversant un fil de cuivre vaut $I = 4,0 \text{ mA}$.

Combien d'électrons traversent la section du fil pendant 10 s ?

Entraînement 5.3 — Loi des nœuds.

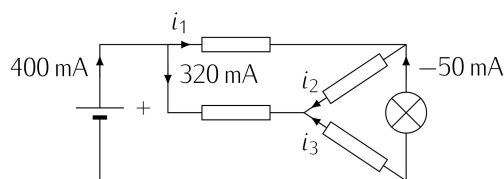


Les courants indiqués sur le schéma ci-dessus sont algébriques.

En utilisant la loi des nœuds, déterminer en fonction de i les courants suivants (on note i_{AB} le courant qui va de A vers B, etc) :

a) i_{AB}

- b) i_{BC}
- c) i_{CD}



On considère le circuit électrique représenté ci-dessus.

À partir de la loi des nœuds, calculer l'intensité des courants sans utiliser la calculatrice.

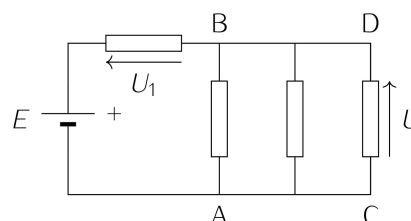
- a) i_1 b) i_2 c) i_3

Autour de la tension électrique

Entraînement 5.5 — Loi des mailles.

Un circuit électrique est formé d'une pile de f.é.m E et de quatre dipôles. Certaines tensions sont indiquées.

À partir de la loi des mailles, exprimer en fonction de E et U_1 les tensions suivantes :

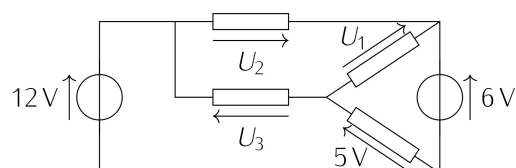


- a) U
- b) $U_{AB} = V(A) - V(B)$
- c) U_{DA}

Entraînement 5.6 — Calculer une tension.

On considère le circuit électrique formé de deux sources idéales de tension et de quatre dipôles, comme représenté ci-contre.

À partir de la loi des mailles, calculer les tensions :



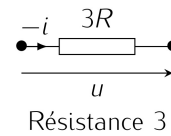
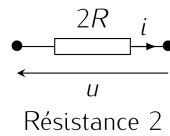
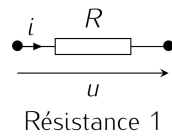
- a) U_1
- b) U_2
- c) U_3

Loi d'Ohm

Entraînement 5.7 — Caractéristiques.



On considère les cas suivants :



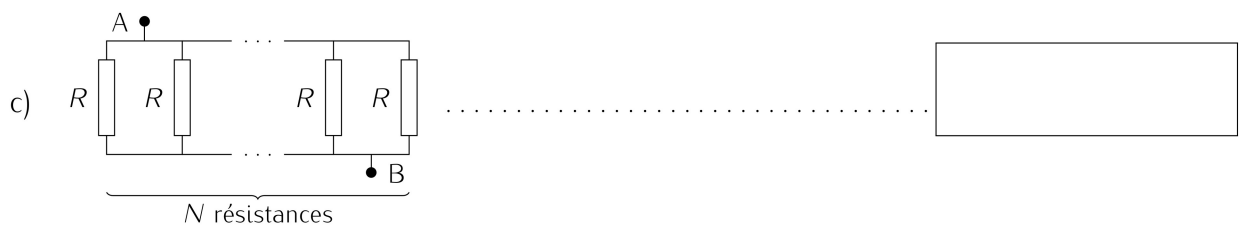
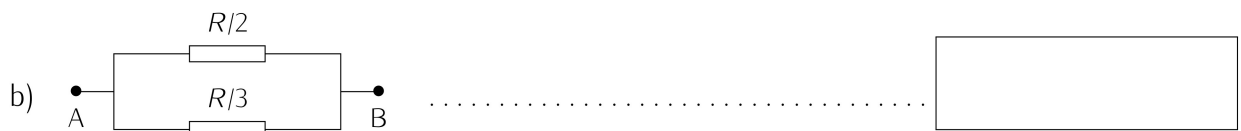
Dans chaque cas, exprimer i en fonction de u et R .

- a) Résistance 1
- b) Résistance 2
- c) Résistance 3

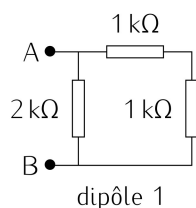
Entraînement 5.8 — Résistances associées.



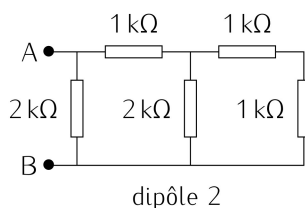
Exprimer la résistance équivalente des dipôles AB suivants :



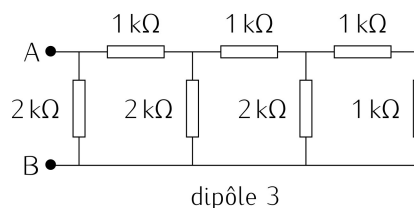
Entraînement 5.9 — Trois résistances équivalentes.



dipôle 1



dipôle 2



dipôle 3

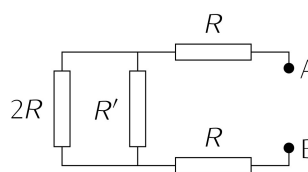
Sans utiliser la calculatrice, calculer la résistance équivalente

- a) du dipôle 1 ... b) du dipôle 2 ... c) du dipôle 3 ...

Entraînement 5.10 — Une autre résistance équivalente.



On considère le dipôle AB constitué uniquement de conducteurs ohmiques.



Exprimer la résistance équivalente du dipôle AB en fonction de R et R'



Entraînement 5.11 — Quelle résistance choisir ?



La résistance équivalente d'un dipôle s'écrit

$$R_{eq} = \frac{4R(R + R')}{2R + R'}.$$

Déterminer la valeur de R' pour que

- a) $R_{eq} = 3R$ b) $R_{eq} = \frac{8}{3}R$ c) $R_{eq} = 2R$

Résoudre une équation électrique



Entraînement 5.12 — Une équation de maille.



Dans un circuit, la loi des mailles se traduit par la relation $R_1 I + R_2 (I_0 + I) = 2R_2 I_0$.

- a) On suppose que $R_1 = 2R_2$. Exprimer I en fonction de I_0
- b) Exprimer I en fonction de R_1 , R_2 et I_0

Entraînement 5.13 — Circuit à 2 mailles.

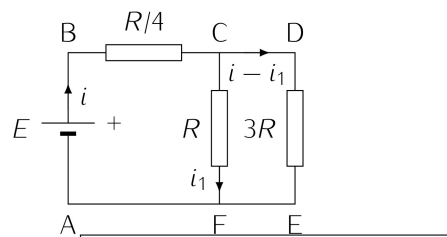


On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les courants algébriques i et i_1 comme indiqué ci-contre.

Exprimer E en fonction de i , i_1 et R en appliquant la loi des mailles dans la maille :

a) (ABCF) ...

b) (ABDE) ...



Entraînement 5.14



Dans l'entraînement précédent, les grandeurs i et i_1 vérifient le système
$$\begin{cases} Ri + 4Ri_1 = 4E \\ 13Ri - 12Ri_1 = 4E \end{cases}$$

a) Déterminer i en fonction de E et R

b) Déterminer i_1 en fonction de E et R

Diviseurs

Entraînement 5.15 — Un diviseur de tension.



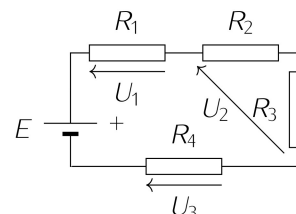
On forme un circuit avec une pile de f.é.m E et quatre conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 , U_2 et U_3 comme indiqué ci-contre.

Exprimer en fonction de E , R_1 , R_2 , R_3 et R_4 , les tensions :

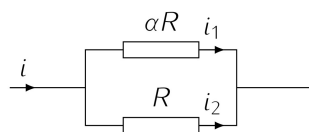
a) U_1 ...

b) U_2 ...

c) U_3 ...



Entraînement 5.16 — Un diviseur de courant.



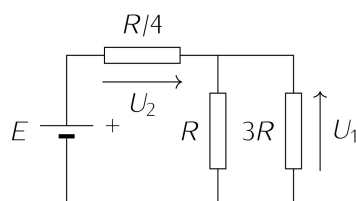
a) Pour quelle valeur de α , a-t-on $i_1 = i/3$?

b) Pour quelle valeur de α , a-t-on $i_2 = 3i_1$?

Entraînement 5.17 — Exercice de synthèse I.



On forme un circuit avec une pile et trois conducteurs ohmiques. On définit les tensions U_1 et U_2 comme indiqué ci-contre.

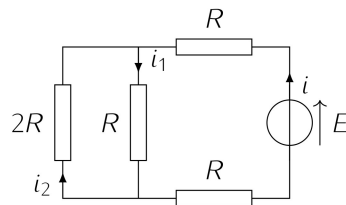


a) Calculer la résistance équivalente aux deux conducteurs ohmiques en parallèle.

b) À l'aide de la formule du diviseur de tension, exprimer U_1 en fonction de E et R .

c) Faire la même chose pour U_2 .

Entraînement 5.18 — Exercice de synthèse II.



a) Après avoir simplifié le circuit, calculer i en fonction de E et R

b) En déduire i_1 à partir de la formule du diviseur de courant

c) En déduire i_2

Réponses mélangées

2	30 mA	ⓑ	i	$-\frac{E}{4}$	$\frac{13}{4}Ri - 3Ri_1$	-6 V	$2i$
-350 mA	R	$\frac{3}{4}E$	$R\left(\frac{1-a^2}{3-a^2}\right)$	1 V	$\frac{3}{4}R$	$\frac{R}{5}$	$E - U_1$
$\frac{I_0}{3}$	$\frac{-ER_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	$\frac{5}{6}R$	$\frac{3E}{8R}$	$-\frac{u}{R}$	1 kΩ	$-\frac{E}{8R}$	
$\frac{4R(R+R')}{2R+R'}$	$\frac{ER_1}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	1 kΩ	$\frac{R}{N}$	$\frac{1}{4}Ri + Ri_1$	0	80 mA	
3	$\frac{3E}{4R}$	$2R$	$\frac{u}{2R}$	$2,5 \cdot 10^{17}$	$\frac{E}{R}$	1 kΩ	$U_1 - E$
		$\frac{E(R_2 + R_3)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}$	$\frac{R_2}{R_1 + R_2}I_0$	$E - U_1$	$\frac{u}{3R}$	0	

Exercice 1 : Feux avant d'une voiture

M. Percier vient au lycée en voiture. Malheureusement, il oublie très souvent d'éteindre les feux de sa Nissan X-trail lorsqu'il se gare sur le parking à 7h30. On veut savoir si la batterie sera vide lorsqu'il reprend sa voiture à 19h.

1. À partir des informations lisibles sur la photo de batterie ci-dessous, donner la charge électrique que celle-ci peut fournir.



2. Les lampes avant de la voiture ont les caractéristiques suivantes :



PHILIPS

PHILIPS 12972PRC1 Ampoule, projecteur longue portée
H7 12V 55W 3200K Halogène Vision

Réf.: 12972PRC1

Info complémentaire:	Vision
Type de lampe:	H7
Modèle de feu:	Halogène
Capacité nominale [W]:	55
Voltage [V]:	12
Type d'emballage:	Boîte
Température de couleur [K]:	3200
Type de culot de l'ampoule:	PX26d

Numéros de référence: PHILIPS H7, PHILIPS 40593760, PHILIPS
EAN: PHILIPS 8711500405937

- (a) Est-ce que les deux feux avant sont reliés en série ou en dérivation ?
 - (b) Le filament de la lampe se comporte comme un résistor de résistance R . Donner la valeur numérique de R pour l'ampoule H7.
3. Quelle est l'intensité électrique débitée par la batterie lorsque M. Percier laisse sa voiture avec les feux allumés ?
 4. M. Percier pourra-t'il redemarrer sa voiture à 19h ?

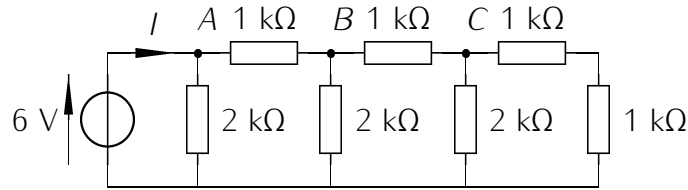
Exercice 2 : Continuité de la charge

La notice d'un ampèremètre numérique nous indique que le plus petit courant mesurable est de $0,1 \mu\text{A}$ et que son temps de réponse est de $100 \mu\text{s}$.

1. Quelle est la plus petite quantité de charges électriques que ce multimètre peut mesurer ? Peut-il détecter le passage d'un électron seul ?
2. Justifier l'affirmation suivante : « bien que la charge électrique soit quantifiée, il s'agit d'une grandeur continue à notre échelle. »

Exercice 3 : Application de la loi d'Ohm

Déterminer l'intensité I à la sortie du générateur présent dans le circuit suivant.



Exercice 4 : Association de dipôles, puissance.

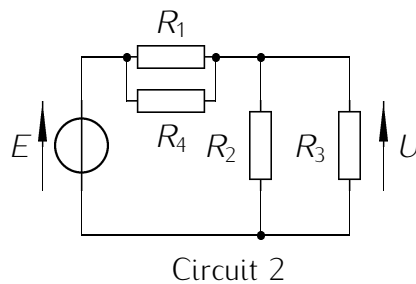
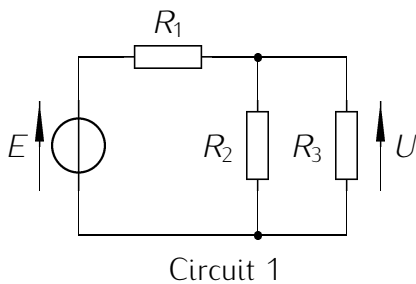
Soit un générateur de tension caractérisé par sa f.e.m. E et sa résistance interne r .
On branche entre ses bornes, une résistance réglable R .

1. Déterminer l'expression de l'intensité du courant qui circule dans le circuit.
2. Déterminer l'expression de la puissance $\mathcal{P}$ absorbée par R en fonction de E , r et R .
3. On considère la fonction $\mathcal{P}(R)$.

Montrer qu'elle passe par un maximum $\mathcal{P}_{\max}$ à déterminer et tracer son allure pour $E = 100 \text{ V}$ et $r = 10 \Omega$.

Exercice 5 : Ponts diviseurs de tension

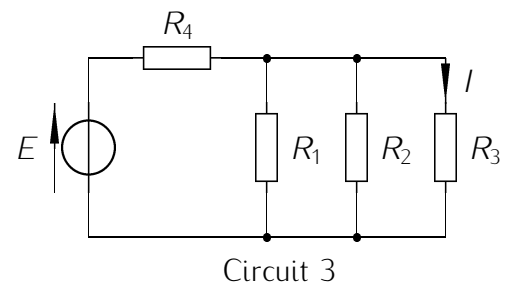
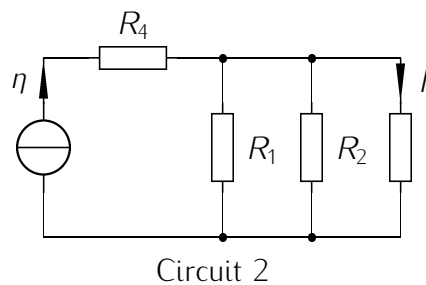
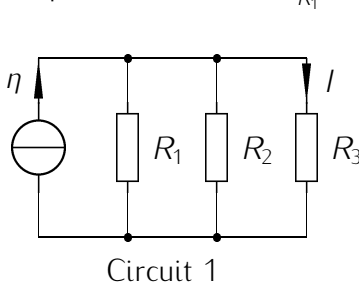
Utiliser les formules des diviseurs de tension pour déterminer la tension U aux bornes de R_3 dans les montages suivants.



Exercice 6 : Ponts diviseurs de courant

Utiliser les formules des diviseurs de courant pour déterminer l'intensité du courant I qui traverse R_3 dans les montages suivants.

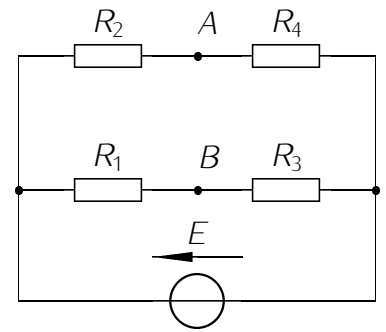
On pourra noter $G_i = \frac{1}{R_i}$ la conductance du résistor R_i .



Exercice 7 : Pont de Wheatstone et application

On considère le circuit suivant :

1. Calculer de U_{AB} par la méthode de votre choix.
2. À quelle condition sur les résistances, cette tension est-elle nulle ?
3. On prend maintenant $R_3 = R_4 = R$ et les résistors R_1 et R_2 sont en fait des jauges de contrainte fixées sur une barre métallique. Lorsque celle-ci se déforme, les résistances R_1 et R_2 varient suivant une loi du type $R_1 = R + x$ avec $x \ll R$ et $R_2 = R - x$. Exprimer alors U_{AB} , mesurée par un voltmètre, en fonction de R et x .

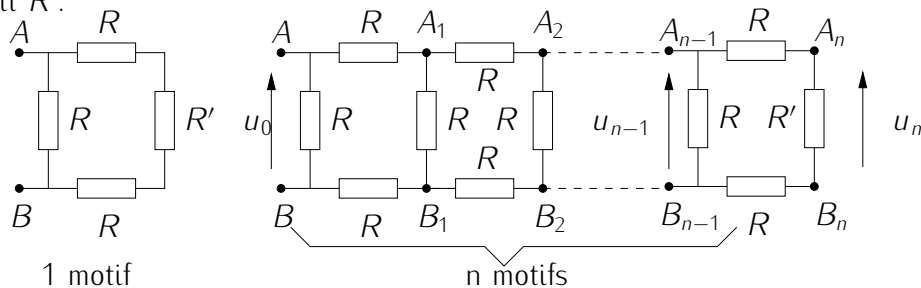


Montrer que dans la mesure où $x \ll R$, il y a proportionnalité entre la tension mesurée et x .

Voyez-vous une application ?

Exercice 8 : Résistance itérative

1. Déterminer la valeur du résistor R' telle que la résistance équivalente au réseau de gauche entre A et B soit R' .



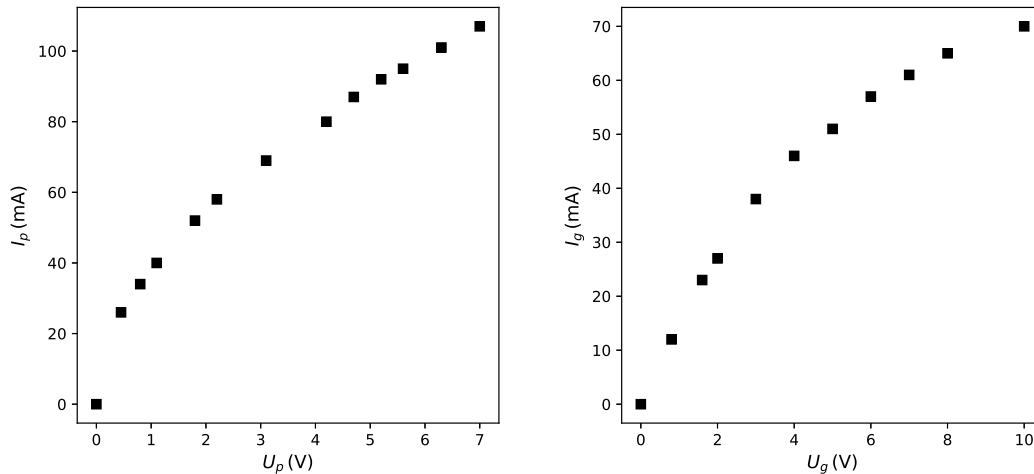
2. Dans le réseau de droite, R' a la valeur calculée précédemment. Quelle est la résistance R_{AB} du réseau entre les bornes A et B ?
3. On applique la tension u_0 entre A et B (réseau de droite).
 - (a) Exprimer u_n en fonction de u_{n-1} , R et R' puis u_{n-1} en fonction de u_{n-2} , R et R' .
 - (b) En déduire la valeur de la différence de potentiel u_n en fonction de u_0 et n .

Exercice 9 : Lampe magique



Deux lampes sont placées en séries. Lorsqu'on souffle sur le filament de la grosse lampe, la petite brille fortement. On cherche à comprendre pourquoi.

1. On considère que les deux lampes sont alimentées par un générateur idéal de tension $E = 14 \text{ V}$. Faire le schéma de l'expérience.
2. On donne ci-dessous les caractéristiques des deux lampes. Les grandeurs relatives à la petite lampe sont indicées par la lettre p , celles relatives à la grande sont indicées par la lettre g .



- (a) Comment a t'on fait pour relever expérimentalement ces deux caractéristiques ?
 - (b) Interpréter l'allure des courbes sachant que la résistance électrique augmente avec la température.
 - (c) On rappelle que les lampes sont constituées d'un filament de tungstène qui se comporte comme un résistor. Que vaut, pour chacune des lampes, le rapport $R = \frac{U}{I}$, pour I faible, puis pour $I \simeq 0,1$ A.
3. Tracer la caractéristique du dipôle équivalent résultant de la mise en série des deux lampes.
 4. En déduire le point de fonctionnement du circuit, puis la valeur de la tension aux bornes de la petite lampe.
 5. Quelle est la puissance dissipée dans la petite lampe ?
 6. En soufflant sur le filament de la grosse lampe, celui-ci refroidit, sa température reste constante et donc sa résistance reste constante, quel que soit le point de fonctionnement. On prendra pour R_g la valeur trouvée à la question 2c pour I faible. Tracer la caractéristique de l'association de E et R_g en série. En déduire le point de fonctionnement du circuit lorsqu'on souffle sur le filament.
 7. Quelle est la puissance dissipée dans la petite lampe lorsqu'on souffle sur la grande ?

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Donner la relation constitutive d'un condensateur.

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Donner la relation constitutive d'une bobine.

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur.

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Exprimer l'énergie stockée dans une bobine.

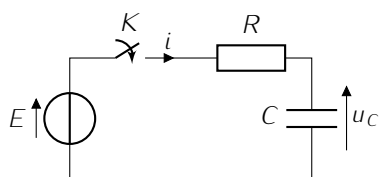
CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Comment interpréter le fait que la tension aux bornes d'un condensateur est une grandeur continue ?

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

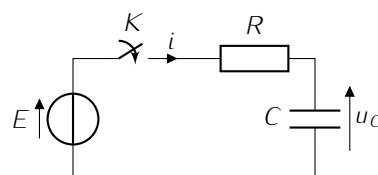
Comment interpréter le fait que le courant traversant une bobine est une grandeur continue ?

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE



Le condensateur est déchargé, aucun courant ne circule, on ferme le circuit à l'instant $t = 0$. Que valent $u_C(t = 0^+)$ et $i(t = 0^+)$.

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE



On ferme le circuit à l'instant $t = 0$. Établir l'équation différentielle qui régit l'évolution de u_C .

CIRCUITS DU 1^{er}
ORDRE

Résoudre

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec $u_C(t = 0) = 0$

En convention récepteur
 $\mathcal{P} = ui = Cu \frac{du}{dt}$ Soit $\mathcal{P} = \frac{dE_C}{dt}$
 avec

$$E_C = \frac{1}{2} Cu^2$$

En convention récepteur

$$u = L \frac{di}{dt}$$

En convention récepteur

$$i = C \frac{du}{dt}$$

Si le courant i traversant une bobine subissait une discontinuité alors, l'énergie qu'elle stocke serait aussi discontinue ($E_L = \frac{1}{2} Li^2$) et donc la bobine recevrait une puissance infinie, ce qui est impossible.

Si la tension u aux bornes d'un condensateur subissait une discontinuité alors l'énergie qu'il stocke serait aussi discontinue ($E_C = \frac{1}{2} Cu^2$) et donc le condensateur recevrait une puissance infinie, ce qui est impossible.

En convention récepteur
 $\mathcal{P} = ui = Li \frac{di}{dt}$ Soit $\mathcal{P} = \frac{dE_L}{dt}$
 avec

$$E_L = \frac{1}{2} Li^2$$

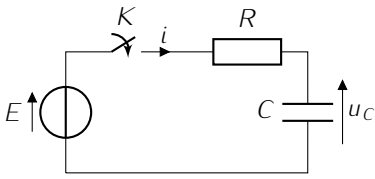
Les solutions de l'équation homogène sont
 $u_{C,h} = \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Une solution particulière est
 $u_{C,p} = E$ Donc
 $u_C = E + \lambda \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ or
 $u_C(t=0) = 0$ donc $\lambda = -E$ et
 $u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$.

Loi des mailles $u_R + u_C = E$
 Relations constitutives :
 $RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E$ Soit avec
 $\tau = RC$

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

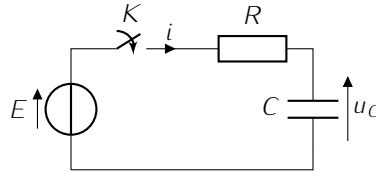
La tension aux bornes du condensateur est continue donc $u_C(t=0^+) = 0$. La loi des mailles appliqué à l'instant $t=0^+$ donne alors $E = Ri$ donc $i(t=0^+) = \frac{E}{R}$.

CIRCUITS DU 1^{er} ORDRE



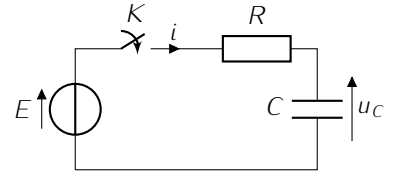
On ferme le circuit à l'instant $t = 0$ et pour $t \geq 0$ on a trouvé
 $u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$.
 Comment tracer proprement l'allure de u_C ?

CIRCUITS DU 1^{er} ORDRE



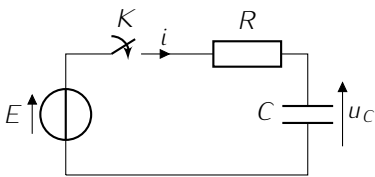
On ferme le circuit à l'instant $t = 0$ et pour $t \geq 0$ on a trouvé
 $u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$ et
 $i = E \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$. Exprimer l'énergie dissipée dans la résistance entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque.

CIRCUITS DU 1^{er} ORDRE



On ferme le circuit à l'instant $t = 0$ et pour $t \geq 0$ on a trouvé
 $u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$ et
 $i = E \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$. Exprimer l'énergie fournie par le générateur entre l'instant $t = 0$ et un instant t quelconque.

CIRCUITS DU 1^{er} ORDRE



On ferme le circuit à l'instant $t = 0$. Établir le bilan d'énergie pour ce circuit.

On intègre $\mathcal{P}_G = Ei$ entre 0 et t , on trouve :

$$E_G = CE^2 \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

On intègre $\mathcal{P}_J = Ri^2$ entre 0 et t , on trouve :

$$E_J = \frac{1}{2}CE^2 \left(1 - \exp \left(-2\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

1. On trace $u_C(t < 0)$ et on utilise la continuité de u_C pour placer $u_C(t = 0)$.
2. On trace l'asymptote en $t \rightarrow \infty$.
3. On trace la tangente à l'origine. Pour les systèmes d'ordre 1, elle coupe l'asymptote à $t = \tau$.
4. On finit le tracé en commençant **sur** la tangente et en finissant **sur** l'asymptote.

On multiplie terme à terme la loi des mailles par le courant i : $Ei = u_Ri + u_C * i$ Soit

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_C$$

Ainsi, l'énergie fournie par le générateur est pour partie stockée dans le condensateur, l'autre partie est dissipée par effet Joule dans la résistance.

E_{C2} – Circuits linéaires du premier ordre

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- On peut parfois encore simplifier le circuit en laissant la grandeur à calculer apparente pour se ramener à un cas classique.
- Pour déterminer l'évolution temporelle d'une grandeur ($u(t)$ pour $t \geq 0$ par exemple), la méthode doit être connue et maîtrisée :

★ Détermination des conditions initiales (CI) : représenter le circuit à $t = 0^-$ et utiliser la continuité de $u_C(t)$ et $i_L(t)$ pour en déduire son équivalent à $t = 0^+$ puis autant de CI que nécessaire ($u(0^+)$ si circuit du premier ordre, $u(0^+)$ et $\frac{du}{dt}\big|_{0^+}$ si second ordre).

★ Établir l'équation différentielle (en $u(t)$) : utiliser un minimum d'inconnues en écrivant la loi des nœuds sur la figure, attention aux conventions (générateur ou récepteur) pour écrire les relations constitutives. On se trouve en général face à un système d'équations différentielles il faut alors effectuer des substitutions ou même dériver certaines équations.

On doit obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants et **tous de même signe**. Une fois l'équation obtenue, il faut la mettre sous une forme canonique.

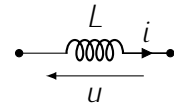
★ Résolution de l'équation différentielle : on utilisera $sol = sol_H + sol_P$ avec sol_H la solution de l'équation homogène (il FAUT la connaître : Cf cours) et sol_P la solution particulière (de "même nature" que le second membre de l'équation c'est à dire une constante lors de ce chapitre). Vérifier que sol_P correspond au régime permanent. On applique les CI à sol (et non sol_H !) pour déterminer les constantes d'intégrations. Vérifier la cohérence avec le régime permanent ($u(t \rightarrow \infty)$ d'après l'équation et en raisonnant sur le montage).

★ Effectuer enfin un tracé correct (valeur et tangente à l'origine, forme, asymptote).

- Attention, ne confondez pas $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+}$ et $\frac{du(0^+)}{dt}$! Par exemple lors de la charge du condensateur du circuit RC étudié en classe, on avait $u(0^+) = 0 \Rightarrow \frac{du(0^+)}{dt} = 0$ mais $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{E}{RC}$.

En convention récepteur, l'inductance L d'une bobine vérifie l'équation différentielle

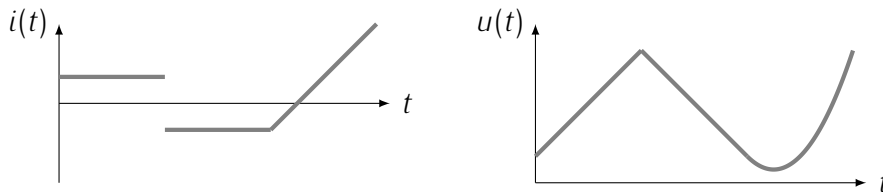
$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt}.$$



Entraînement 6.1 — Bobine ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme une bobine ?

(a) oui

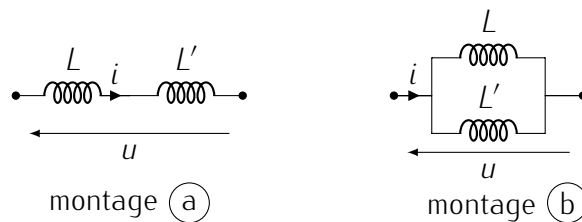
(b) non

.....

Entraînement 6.2 — Inductances équivalentes.



On considère deux bobines d'inductance L et L' regroupées dans les montages suivants :

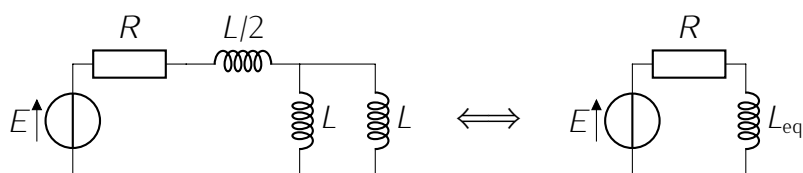


- a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)
- b) En déduire l'inductance équivalente du montage (a)
- c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)
- d) En déduire l'inductance équivalente du montage (b)

Entraînement 6.3 — Simplifions !



On souhaite remplacer les bobines par un dipôle équivalent.

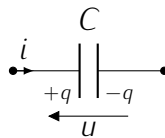


Déterminer L_{eq}

Condensateurs

En convention récepteur, la capacité C d'un condensateur vérifie l'équation différentielle

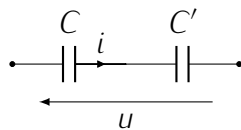
$$i(t) = \frac{dq(t)}{dt} = C \frac{du(t)}{dt}.$$



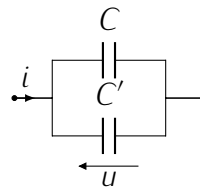
Entraînement 6.4 — Condensateurs équivalents.



On considère deux condensateurs de capacité C et C' regroupés dans les montages suivants :



montage (a)



montage (b)

a) Donner la relation entre u et i dans le montage (a)

b) En déduire la capacité équivalente du montage (a)

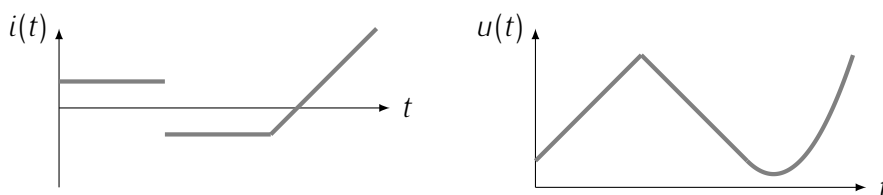
c) Donner la relation entre u et i dans le montage (b)

d) En déduire la capacité équivalente du montage (b)

Entraînement 6.5 — Condensateur ou pas ?



On donne l'évolution de l'intensité $i(t)$ et de la tension $u(t)$ aux bornes d'un dipôle inconnu.



Ce dipôle inconnu se comporte-t-il comme un condensateur ?

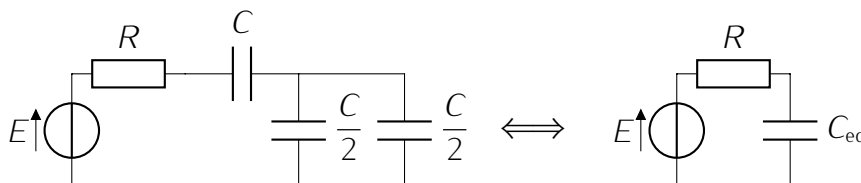
(a) oui

(b) non

Entraînement 6.6 — Simplifions !



On considère le montage suivant, constitué de plusieurs condensateurs, d'un générateur et d'un conducteur ohmique. On souhaite remplacer les condensateurs par un dipôle équivalent.



Déterminer C_{eq}

Conditions initiales et régime stationnaire

On utilisera dans cette partie les notations suivantes pour une grandeur donnée x :

• $x(0^-) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t < 0}} x(t)$

• $x(0^+) = \lim_{\substack{t \rightarrow 0 \\ t > 0}} x(t)$

• $x(+\infty) = \lim_{t \rightarrow +\infty} x(t)$.

Entraînement 6.7 — Condensateurs et bobines en régime stationnaire.



En régime stationnaire, toutes les grandeurs électriques sont indépendantes du temps.

a) Dans ce cas, un condensateur se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

(b) une source de tension

(c) un interrupteur ouvert

b) Quant à la bobine, elle se comporte comme :

(a) un interrupteur fermé

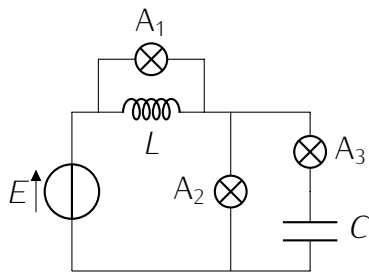
(b) une source de courant

(c) un interrupteur ouvert

Entraînement 6.8 — Éclairage en régime permanent.



On considère le circuit constitué de lampes (symbolisées par $\otimes$) que l'on peut assimiler à des résistances qui brillent quand elles sont parcourues par un courant électrique.



Le régime permanent étant établi, la ou les ampoules qui brillent sont :

- (a) l'ampoule A_1 (b) l'ampoule A_2 (c) l'ampoule A_3

.....

Entraînement 6.9 — Relations de continuité.



Dans ce QCM, plusieurs réponses sont possibles pour chaque question.

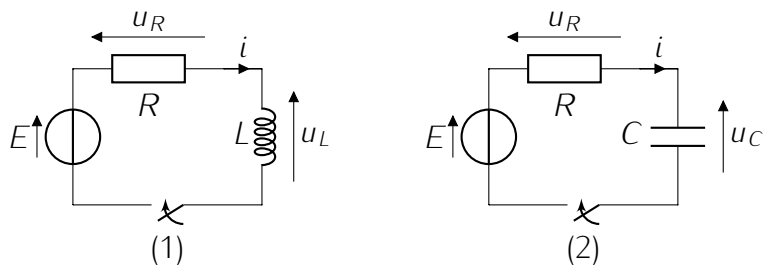
a) Aux bornes de quel(s) dipôle(s) la tension est-elle toujours continue ?

- (a) une résistance (c) un condensateur
(b) une bobine (d) un interrupteur fermé

.....

On considère les deux circuits (1) et (2) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$.

On suppose de plus que le condensateur est initialement déchargé.



b) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (1) ?

- (a) i (b) u_L (c) u_R

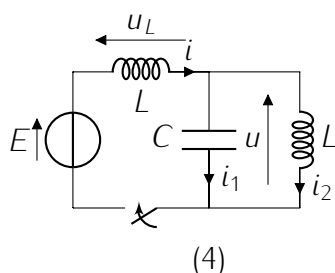
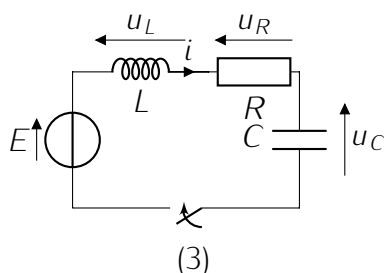
.....

c) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (2) ?

- (a) i (b) u_C (c) u_R

.....

On considère à présent les deux circuits (3) et (4) pour lesquels l'opérateur ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$. On suppose de plus que les condensateurs sont initialement déchargés.



d) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (3) ?

- (a) i (b) u_L (c) u_R (d) u_C

e) Quelles sont les grandeurs continues à $t = 0$ pour le circuit (4) ?

- (a) i (b) i_1 (c) u (d) u_L

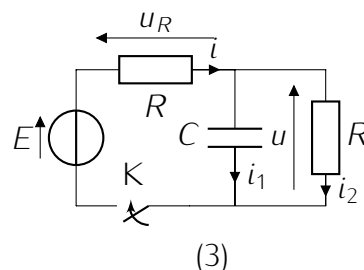
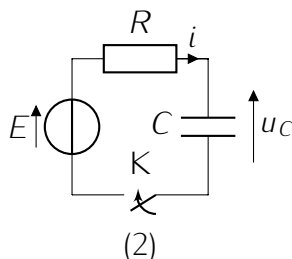
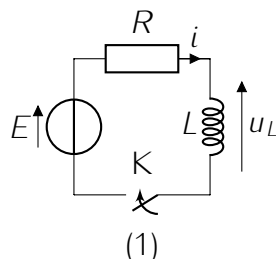
Entraînement 6.10 — Conditions initiales pour circuits du premier ordre.



On considère trois circuits constitués de générateurs de tension de fém constante E , de conducteurs de résistance R ainsi que de condensateurs de capacité C et d'une bobine d'inductance L .

L'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$.

Tous les condensateurs sont initialement déchargés.



On considère dans un premier temps le circuit (1).

- a) Exprimer $i(0^+)$ b) Exprimer $u_L(0^+)$

On considère à présent le circuit (2).

- c) Exprimer $i(0^+)$

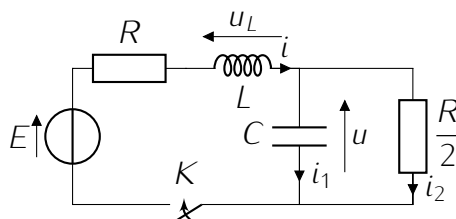
On considère finalement le circuit (3).

- d) Exprimer $u_R(0^+)$ e) En déduire $i_1(0^+)$

Entraînement 6.11 — Circuit à deux mailles.



Le circuit suivant, constitué de deux mailles indépendantes, est alimenté par un générateur de tension de fém E constante.



Pour ce circuit, on considère de plus que :

- l'interrupteur K est ouvert pour $t < 0$ et fermé pour $t > 0$;
- le condensateur est initialement déchargé.

Exprimer :

- | | |
|-------------------------------|----------------------|
| a) $u(0^+)$ | <input type="text"/> |
| b) $\frac{du}{dt}(0^+)$ | <input type="text"/> |
| c) $i(+\infty)$ | <input type="text"/> |
| d) $u(+\infty)$ | <input type="text"/> |

Circuits du premier ordre

On dit qu'un circuit est *du premier ordre* quand il est régi par une équation différentielle qui se met sous la forme canonique suivante :

$$\frac{dx(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}x(t) = f(t) \quad (*)$$

où τ est la constante de temps représentative de la durée du régime transitoire.

Quand l'équation différentielle est écrite comme dans (*), on dit qu'elle est *sous forme canonique*.



Entraînement 6.12 — Constantes de temps.



On donne des exemples d'équations différentielles régissant des grandeurs électriques d'un circuit.

Dans chaque cas, déterminer l'expression de la constante de temps τ .

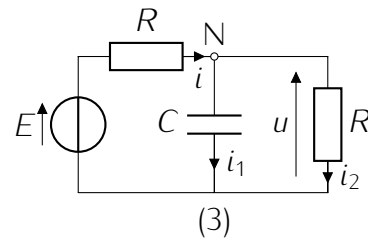
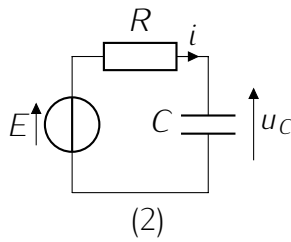
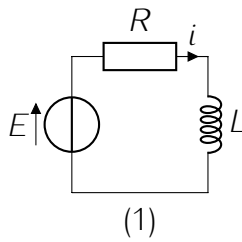
- | | |
|--|----------------------|
| a) $L \frac{di(t)}{dt} = E - Ri(t)$ | <input type="text"/> |
| b) $RC \frac{du_C(t)}{dt} = E - 2u_C(t)$ | <input type="text"/> |

Entraînement 6.13 — Des mises en équations.



On cherche à obtenir l'équation différentielle qui régit le comportement d'une grandeur électrique dans chacun des circuits suivants.

Cette équation devra être donnée sous forme canonique.



On considère le circuit (1).

a) À partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$

.....

On considère maintenant le circuit (2). Déterminer :

b) l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

c) l'équation différentielle pour le courant $i(t)$

On considère enfin le circuit (3) qui comporte deux mailles. En appliquant la loi des nœuds au point N, déterminer :

d) la relation entre le courant $i(t)$, la tension $u(t)$ et $\frac{du(t)}{dt}$

e) En déduire l'équation différentielle pour la tension $u(t)$



Entraînement 6.14 — Allez, on s'entraîne !



N'oubliez pas d'exprimer une solution particulière avant de déterminer la constante d'intégration !

a) Résoudre $\frac{du_C(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C(t) = \frac{E}{\tau}$ avec $u_C(0) = 0$

b) Résoudre $\frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}i(t) = 0$ avec $i(0) = \frac{E}{R}$

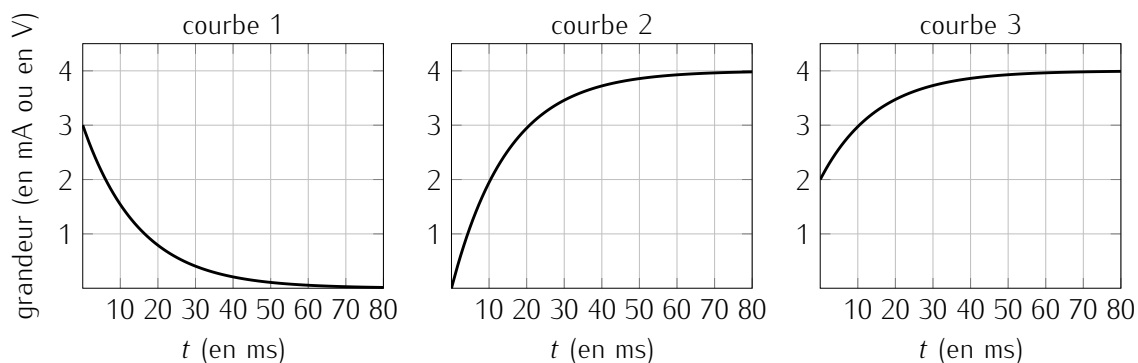
c) Résoudre $\frac{du(t)}{dt} + \frac{1}{\tau}u(t) = \frac{E}{2\tau}$ avec $u(0) = \frac{E}{2}$

 Entraînement 6.15 — Analyse de courbes.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois grandeurs au cours du temps :

- deux tensions $u_1(t)$ et $u_2(t)$;
- une intensité $i(t)$.



a) On a

$$u_1(t) = E_1(1 - e^{-t/\tau}).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a

$$u_2(t) = E_2 \left(1 - \frac{e^{-t/\tau}}{2} \right).$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a

$$i(t) = \frac{E_1}{R} e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

Déterminer les valeurs numériques de :

d) E_1

e) E_2

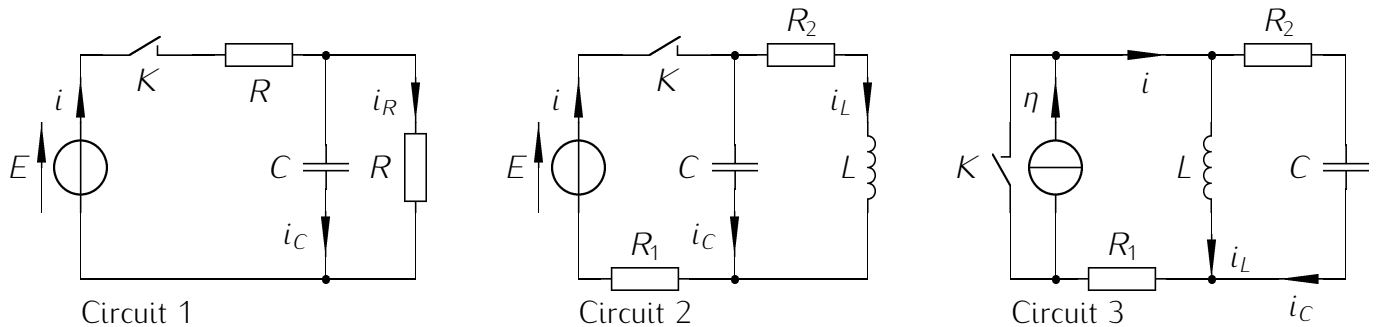
f) R

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 0 & 4\text{ V} & \frac{du}{dt} + \frac{2}{RC}u = \frac{E}{RC} & u_C(t) = \frac{1}{2}E \\
 & \textcircled{b} & \textcircled{c} & u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \\
 & \frac{LL'}{L+L'} & \textcircled{a}, \textcircled{b} \text{ et } \textcircled{c} & \frac{E}{R} \\
 & \textcircled{b} & \frac{CC'}{C+C'} & \frac{2E}{3R} \\
 & \frac{di(t)}{dt} + \frac{1}{RC}i(t) = 0 & 0 & 1,3\text{ k}\Omega \\
 \frac{du}{dt} = \left(\frac{1}{C} + \frac{1}{C'}\right)i & \textcircled{a}, \textcircled{c} \text{ et } \textcircled{d} & E & \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{1}{RC}E \\
 \frac{L}{R} & i(t) = \frac{E}{R}e^{-t/\tau} & \textcircled{c} \text{ et } \textcircled{d} & \frac{1}{3}E \\
 & & \textcircled{c} & E \\
 & & \textcircled{a} & C + C'
 \end{array}$$

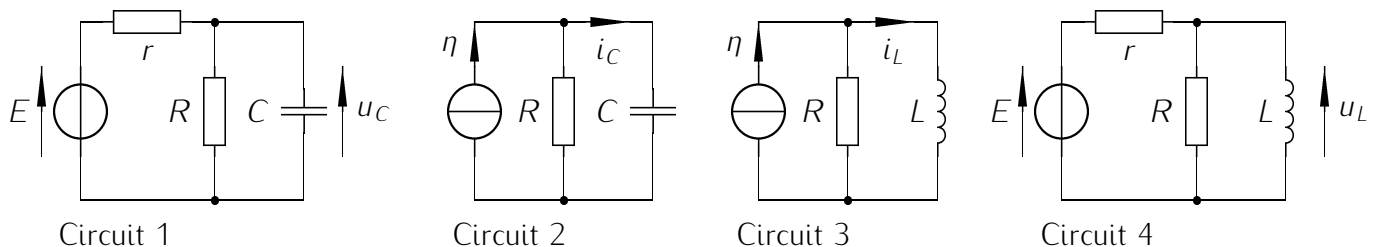
Exercice 1 : Comportement de C et L en RP et à l'instant initial.

Que vaut l'intensité du courant dans les différentes branches à $t = 0^+$ sachant qu'on ferme l'interrupteur K à $t = 0$ dans les deux premiers circuits alors qu'on l'ouvre à $t = 0$ dans le dernier ?
Même question en régime permanent.



Exercice 2 : Détermination rapide de la réponse d'un circuit

On considère les quatre circuits suivants :

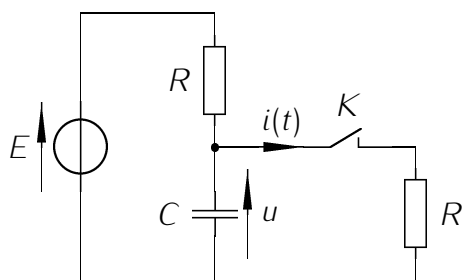


Pour $t < 0$, E et η sont nuls et pour $t \geq 0$, ils sont constants.

À $t = 0^-$, les condensateurs sont déchargés et les bobines ne sont parcourues par aucun courant.

Déterminer les réponses $u_C(t)$, $i_C(t)$, $i_L(t)$ et $u_L(t)$.

Exercice 3 : Réponse d'un circuit RC à un échelon de tension.



Soit le montage représenté ci-contre. Pour $t < 0$, le circuit est en régime permanent, c'est à dire que le générateur de tension est allumé depuis longtemps et K ouvert depuis longtemps.

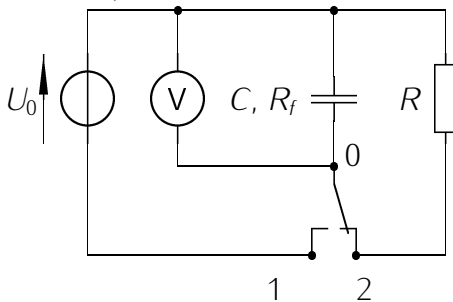
On ferme K à $t = 0$.

1. Donner les valeurs initiales $i(0^-)$, $i(0^+)$ et la valeur finale $i(\infty)$ de $i(t)$.
2. Déterminer $i(t)$.
3. Tracer son allure.



Exercice 4 : Mesure d'une résistance par la méthode de "perte de charge".

Pour mesurer une résistance R élevée de plusieurs mégaohms, on réalise le montage électrique ci-dessous où C est un condensateur réel de résistance de fuite R_f non représentée sur la figure, on donne $C = 10 \mu\text{F}$.

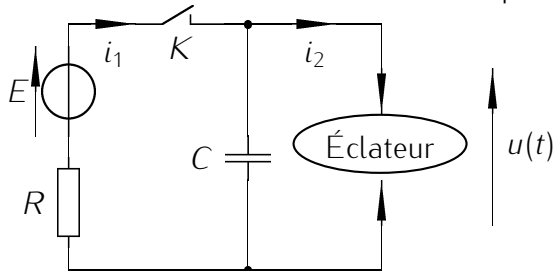


- On abaisse l'interrupteur double en position 1 ; lorsque le condensateur est chargé, le voltmètre numérique V (supposé parfait) indique la tension $U_0 = 6,00 \text{ V}$.
 - On ouvre l'interrupteur (position intermédiaire) ; au bout du temps $t_1 = 20 \text{ s}$, le voltmètre V indique $U_1 = 5,10 \text{ V}$.
 - On charge de nouveau le condensateur sous la tension U_0 (interrupteur dans la position 1) puis on l'abaisse brusquement dans la position 2 ; au bout du temps $t_2 = 20 \text{ s}$, le voltmètre indique $U_2 = 4,60 \text{ V}$.
1. En déduire les valeurs de la résistance de fuite R_f du condensateur et de la résistance R .
 2. Dans la dernière expérience, déterminer à quel instant le condensateur est déchargé de la moitié de son énergie initiale ?



Exercice 5 : Éclateur

Un éclateur est connecté comme indiqué sur la figure ci-dessous. Il fonctionne de la manière suivante :



- Dans un premier temps, tant que $u < U_a$ (tension d'amorçage), alors $i_2 = 0$, l'éclateur se comporte comme un interrupteur ouvert.
- Puis, si $u > U_e$ (tension d'extinction $U_e < U_a$), l'éclateur se comporte comme un conducteur ohmique de résistance r et u décroît.
- Enfin, si $u < U_e$ alors $i_2 = 0$, l'éclateur se comporte à nouveau comme un interrupteur ouvert et u croît jusqu'à u_a .

À $t = 0$, C est déchargé et on ferme K , on observe alors une suite d'allumages et d'extinctions de période T .

1. Déterminer t_a , la date du premier allumage.
2. Déterminer t_e , la date de la première extinction. On posera $\alpha = \frac{r}{R+r}$
3. Représenter l'allure de $u(t)$ et déterminer la période T du phénomène.

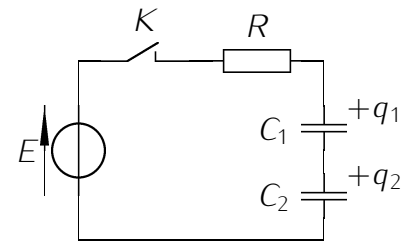


Exercice 6 : Réponse d'un circuit $RC1C2$ série à un échelon de tension

On considère le circuit de la figure ci-dessous. À l'instant initial, les condensateurs C_1 et C_2 sont déchargés. On ferme l'interrupteur à $t = 0$.

1. Association série.

- Établir la relation entre $q_1(t)$ et $q_2(t)$ à tout instant.
- Déterminer $q_1(\infty)$ et $q_2(\infty)$ la charge des condensateurs au bout d'une durée très longue devant le temps caractéristique du circuit.
- Quelle est l'expression de $q_1(t)$ et $q_2(t)$,
- Comparer l'énergie contenue dans chaque condensateur à l'instant t .



2. Reprendre la question 1.c. si les condensateurs sont montés en parallèle.



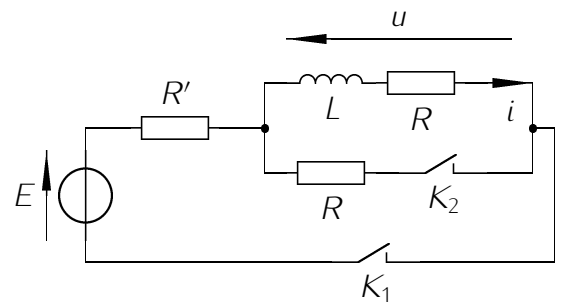
Exercice 7 : Réponse d'un circuit RL à un échelon de tension.

Soit le circuit représenté ci-dessous et pour lequel, $E = 30$ V, $L = 0,1$ H, $R' = 10 \Omega$ et $R = 20 \Omega$.

- Avant $t = 0$, K_1 et K_2 sont ouverts depuis longtemps,
- à $t = \tau_1 = 100$ ms, on ferme K_1 et K_2 reste ouvert,
- à $t = \tau_2 = 200$ ms, on ferme K_2 et K_1 reste fermé.

1. Déterminer $i(\tau_1)$ et $u(\tau_1)$.

2. Déterminer $i(t)$ et représenter son allure.



CINÉMATIQUE DU POINT

Qu'est-ce qu'un référentiel ?
Donnez trois exemples de référentiels courants.

CINÉMATIQUE DU POINT

Comment définit-on la trajectoire d'un point matériel ? Pourquoi dit-on que le mouvement est relatif ?

CINÉMATIQUE DU POINT

Donner l'expression du vecteur position en coordonnées cartésiennes.
Faire le schéma associé.

CINÉMATIQUE DU POINT

Donner l'expression du vecteur position en coordonnées cylindriques.
Faire le schéma associé.

CINÉMATIQUE DU POINT

Donner l'expression du vecteur position en coordonnées sphériques. Faire le schéma associé.

CINÉMATIQUE DU POINT

Donner la définition du vecteur vitesse. Qu'appelle-t-on « vitesse » d'un point matériel ?

CINÉMATIQUE DU POINT

Exprimez le vecteur vitesse en coordonnées cartésiennes, puis en coordonnées cylindriques.

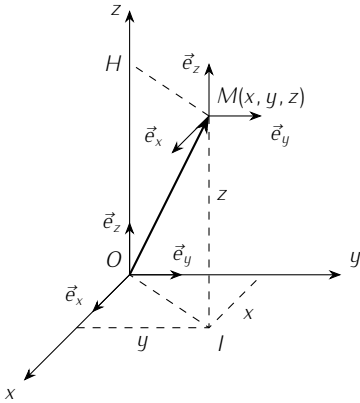
CINÉMATIQUE DU POINT

Construire graphiquement l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes.

CINÉMATIQUE DU POINT

Construire graphiquement l'expression du vecteur déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques.

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{e}_x + y\vec{e}_y + z\vec{e}_z$$



La trajectoire d'un point matériel est l'ensemble des positions successives occupées par ce point au cours du temps. Le mouvement est relatif car il dépend du référentiel choisi.

Un référentiel est un système de coordonnées dans l'espace et le temps permettant de décrire le mouvement d'un point. Exemples : référentiel terrestre, géocentrique, héliocentrique.

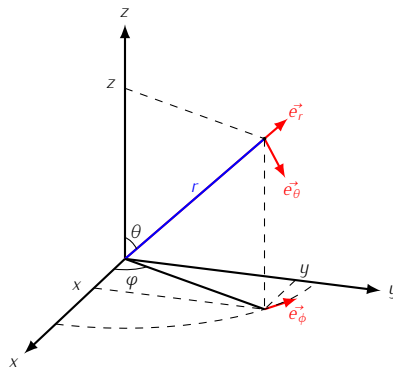
Le vecteur vitesse est la dérivée temporelle du vecteur position

$$\vec{v}(M) = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

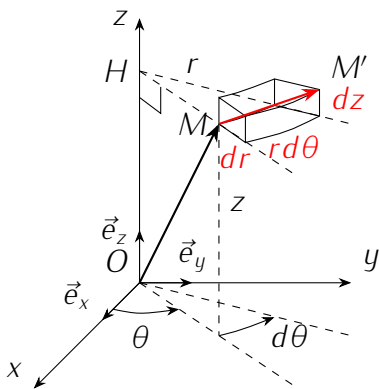
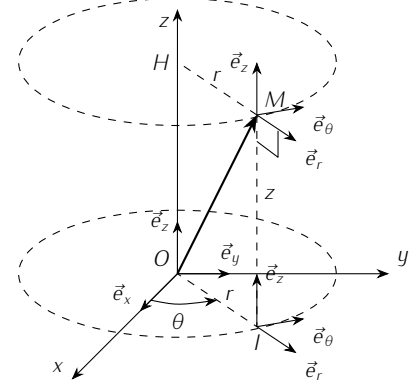
La vitesse est la norme du vecteur vitesse.

$$v = \|\vec{v}\|$$

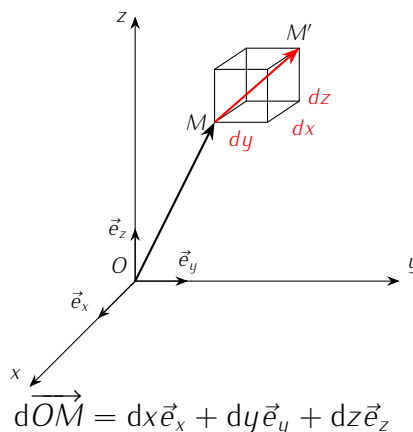
$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r$$



$$\overrightarrow{OM} = r\vec{e}_r + z\vec{e}_z$$



$$d\overrightarrow{OM} = dr\vec{e}_r + r d\theta\vec{e}_\theta + dz\vec{e}_z$$



$$d\overrightarrow{OM} = dx\vec{e}_x + dy\vec{e}_y + dz\vec{e}_z$$

Coordonnées cartésiennes :
 $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$.
 En coordonnées cylindriques,
 $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{z}\vec{e}_z$.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Donner l'expression de la
vitesse en coordonnées
cartésiennes.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Donner l'expression de la
vitesse en coordonnées
cylindriques.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Comment obtient-on le
vecteur accélération à partir
du vecteur vitesse ?

CINÉMATIQUE DU
POINT

Donner l'expression du
vecteur accélération en
coordonnées cartésiennes.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Donner l'expression du
vecteur accélération en
coordonnées cylindriques.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Quelles sont les composantes
du vecteur vitesse dans le cas
d'un mouvement circulaire ?

CINÉMATIQUE DU
POINT

Quelles sont les composantes
du vecteur accélération dans
le cas d'un mouvement
circulaire ? Démontrer leur
expression.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Quelles sont les composantes
du vecteur accélération dans
le cas d'un mouvement
circulaire uniforme ?
Démontrer leurs expressions.

CINÉMATIQUE DU
POINT

Citer une expérience qui met
en défaut la mécanique
classique ?

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$v = \sqrt{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 + \dot{z}^2}$$

$$v = \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}$$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta = v\vec{e}_\theta$$

$$\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta})\vec{e}_\theta + \ddot{z}\vec{e}_z$$

$$\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$$

L'expérience de Frisch et Smith montre que, dans le référentiel terrestre, les muons ont une durée de vie plus longue que dans leur référentiel propre. La relativité galiléenne ne rend pas compte des phénomènes dès lors que la vitesse des particules est comparable à la vitesse de la lumière.

Pour un mouvement circulaire uniforme $z = cste$, $r = cste$ et $\dot{\theta} = cste$, ainsi $v = \omega R = cste$ donc : $\omega = \frac{v}{R}$
Et ainsi :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{e}_r$$

On dérive l'expression de la vitesse par rapport au temps.

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(R\omega)\vec{e}_\theta + R\omega\frac{d}{dt}(\vec{e}_\theta) \text{ Soit : } \vec{a} = -R\omega^2\vec{e}_r + R\frac{d\omega}{dt}\vec{e}_\theta$$

CINÉMATIQUE DU POINT

Établir un lien entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées cylindriques.

CINÉMATIQUE DU POINT

Dans le cas d'un projectile lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan (xOz) faisant un angle θ avec l'horizontale, et subissant une accélération constante $\vec{a} = -g\vec{e}_z$, quelles sont les équations horaires $x(t)$ et $z(t)$?

CINÉMATIQUE DU POINT

Pourquoi dit-on que le mouvement est relatif ? Illustrez avec un exemple concret.

CINÉMATIQUE DU POINT

Dans le cas général, que peut-on dire de l'orientation du vecteur accélération ?

CINÉMATIQUE DU POINT

Exprimer les vecteurs $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ des coordonnées cylindriques en fonction de $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$

CINÉMATIQUE DU POINT

Exprimer $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ et $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$ en fonction de $\dot{\theta}$, $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$.

Le mouvement est relatif car il dépend du référentiel dans lequel se trouve l'observateur.

Pour un voyageur dans un train, celui-ci est immobile, alors que pour une vache qui rumine dans son champ, le train avance.

Il faut intégrer successivement le vecteur accélération puis le vecteur vitesse **sans oublier les constantes d'intégration**.

$$x(t) = v_0 \cos(\theta)t + x_0$$

$$z(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin(\theta)t + z_0$$

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

$$z = z$$

$$\frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta \text{ et } \frac{d\vec{e}_\theta}{dt} = -\dot{\theta}\vec{e}_r$$

$$\begin{aligned}\vec{e}_r &= \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y \\ \vec{e}_\theta &= -\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y\end{aligned}$$

Le vecteur accélération est orienté vers l'intérieur des courbures.

TD n° 7

M_1 – Cinématique

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- Retrouvez rapidement l'expression des vecteurs vitesse et accélération selon la base polaire dans le cas d'un mouvement circulaire.
- Faites de belles figures sur lesquelles vous représenterez les vecteurs à projeter. Évitez les cas particuliers (angles de 45° par exemple).
- Faites bien la différence entre vecteur, norme du vecteur (scalaire positif) et projection du vecteur sur un axe (scalaire positif ou négatif).
- Vérifiez systématiquement l'homogénéité et la cohérence de vos résultats.

Déplacements rectilignes

Entraînement 7.1 — Distance et temps de parcours.



Une voiture se déplace en ligne droite à $90 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Toutes les réponses seront exprimées en « heures-minutes-secondes », par exemple « 2 h 32 min 12 s ».

a) Combien de temps faut-il à cette voiture pour parcourir 100 km ? ...

b) Quel serait l'allongement du temps de trajet si elle roulait à $80 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$?

Entraînement 7.2 — Distance parcourue.



Une voiture se déplace en ligne droite. Initialement à l'arrêt, elle subit une accélération constante valant a_0 pendant une durée τ_1 , puis continue à vitesse constante pendant une durée τ_2 .

a) Quelle est la vitesse v_1 du véhicule à la date $t = \tau_1$?

b) Quelle est la distance parcourue durant τ_1 ?

c) Quelle est la distance totale parcourue en fonction de a_0 , τ_1 et τ_2 ?

Entraînement 7.3 — Longueur d'une piste de décollage.



Pour décoller un avion doit atteindre la vitesse de $v_d = 180 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en bout de piste.

Quelle est la longueur minimale L de la piste de décollage si l'avion accélère uniformément à la valeur $a = 2,5 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$?

(a) 300 m

(b) 450 m

(c) 500 m

(d) 650 m

.....



Entraînement 7.4 — Distance de freinage.



Une voiture roule à $110 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en ligne droite. En supposant que les freins imposent une décélération constante de norme $a = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$, déterminer la distance d'arrêt de la voiture.

(a) 37,8 m

(b) 46,7 m

(c) 55,9 m

(d) 63,5 m

.....

Coordonnées et projections de vecteurs

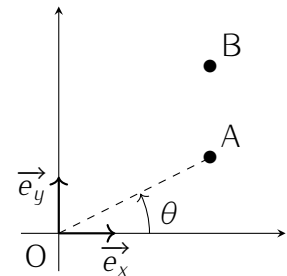


Entraînement 7.5 — Composantes de vecteurs.



On considère deux points A et B tels que la droite (AB) est parallèle à la droite (Oy). Le vecteur $\vec{OA}$ fait un angle θ avec l'axe (Ox).

Exprimer les composantes des vecteurs suivants dans le repère $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$ en fonction de $a = \|\vec{OA}\|$, $b = \|\vec{AB}\|$ et de l'angle θ .



a) $\vec{OA}$

b) $\vec{OB}$

c) $\vec{OA} + \vec{OB}$

d) $\vec{OA} - \vec{OB}$



Entraînement 7.6 — Les coordonnées cylindriques.

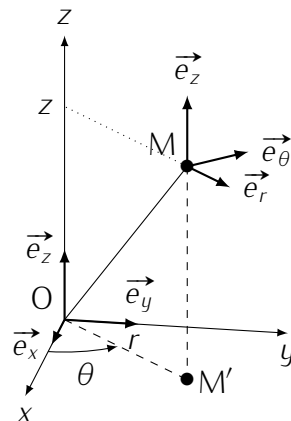


On considère le schéma ci-contre, dans lequel

- la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$
- et la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

sont définies.

Le point M est repéré par la donnée de r , θ et z .



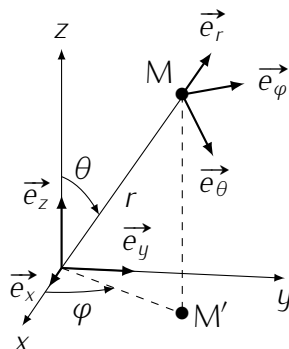
a) Écrire le vecteur $\vec{OM'}$ dans la base cartésienne

- b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cylindrique
- c) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne
- d) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cylindrique

Entraînement 7.7 — Les coordonnées sphériques.



On considère le schéma ci-dessous, dans lequel la base cartésienne $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ et la base sphérique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$ sont définies.



Le point M est repéré par la donnée de r , θ et φ .

- Écrire la norme de $\overrightarrow{OM'}$ en fonction de r et θ
- Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM'}$ dans la base cartésienne
- Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base cartésienne
- Écrire le vecteur $\overrightarrow{OM}$ dans la base sphérique
- Écrire le vecteur $\vec{e}_z$ dans la base sphérique

Entraînement 7.8 — Jouons au tennis.



Un élève regarde un match de tennis. Il filme un des échanges et décide d'étudier le mouvement de la balle pour en déduire sa vitesse et son accélération.

Pour cela, il utilise un logiciel d'exploitation de vidéo et remplit le tableau suivant :

t (en s)	0	0,05	0,10	0,15	0,20
x (en m)	0	0,35	0,70	1,05	1,40
y (en m)	1,5	2,09	2,66	3,21	3,74

- Déterminer la vitesse v_0 (en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$) de la balle à l'instant initial
- Déterminer l'accélération (en $\text{m} \cdot \text{s}^{-2}$) de la balle à l'instant initial

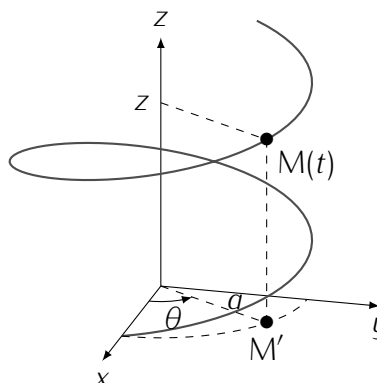
Dérivée de vecteurs

Entraînement 7.9 — Étude d'un mouvement hélicoïdal.



Le point matériel M de coordonnées cartésiennes (x, y, z) décrit une trajectoire hélicoïdale, définie par les équations :

$$\begin{cases} x(t) = a \times \cos(\omega t) \\ y(t) = a \times \sin(\omega t) \\ z(t) = b \times t. \end{cases}$$



a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ dans la base cartésienne

b) Déterminer la norme de la vitesse

c) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$ dans la base cartésienne ...

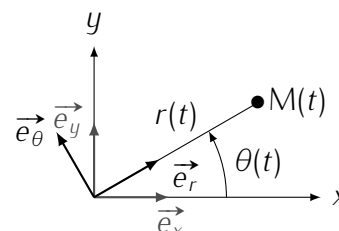
d) Déterminer la norme de l'accélération

Entraînement 7.10 — Dérivation des vecteurs unitaires de la base polaire.



On considère un point $M(t)$ en mouvement dans le plan (xOy) .

On note $r(t)$ et $\theta(t)$ les coordonnées de $M(t)$ dans le repère polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.



a) Exprimer le vecteur $\vec{e}_r$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$.

b) En déduire la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Exprimer le vecteur $\vec{e}_x$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

d) Exprimer le vecteur $\vec{e}_y$ dans la base polaire $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$

e) En déduire l'expression de la dérivée $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ dans la base polaire

Entraînement 7.11 — Calcul d'une vitesse en coordonnées polaires.



On considère un point M dont les coordonnées polaires sont $\begin{cases} r(t) = a \times t \\ \theta(t) = b \times t^2. \end{cases}$

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{v}(M) = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta,$$

où $\dot{r} \vec{e}_r$ est appelée *vitesse radiale* et $r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ *vitesse orthoradiale*.

a) Déterminer la dimension de a

b) Déterminer la dimension de b

c) Déterminer la vitesse radiale en fonction de a

d) Déterminer la vitesse orthoradiale en fonction de a , b et t

e) En déduire l'expression de $\vec{v}(M)$

Entraînement 7.12 — Mouvement en spirale.



Un point M(t) décrit une trajectoire en forme de spirale. Dans le repère polaire (O, $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$), les coordonnées de M(t) sont :

$$\begin{cases} r(t) = r_0 e^{-t/\tau} \\ \theta(t) = \omega t \end{cases}$$

où r_0 , τ et ω sont des constantes positives.

a) Déterminer la vitesse $\vec{v}(M)$ en coordonnées polaires.

On pourra utiliser la formule donnée dans l'entraînement précédent ..

L'accélération en coordonnées polaires s'écrit :

$$\vec{a}(M) = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta.$$

b) Déterminer l'accélération $\vec{a}(M)$

On donne les valeurs suivantes : $\omega = 4,78 \text{ tour} \cdot \text{min}^{-1}$, $\tau = 2,0 \text{ s}$ et $r_0 = 4,0 \text{ cm}$.

c) Dans ces conditions, l'accélération est-elle radiale ou orthoradiale ?

d) Le mouvement de M est-il accéléré ou décéléré ?

e) Déterminer l'équation polaire de la trajectoire de M ..

Étude de quelques mouvements

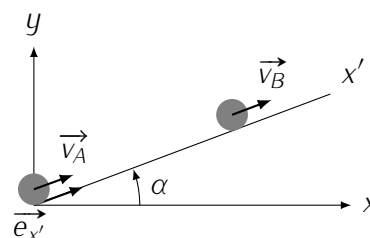
Entraînement 7.13 — Collision sur plan incliné.



Deux billes évoluent sur un plan incliné faisant un angle $\alpha = 20^\circ$ par rapport à l'horizontale.

À $t = 0$, elles sont distantes d'une longueur L .

- La bille A possède une vitesse initiale $v_0 \vec{e}_{x'}$.
Son accélération $\vec{a}(A) = -a \vec{e}_{x'}$ est constante au cours du temps.
Nous noterons $v_A(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .
- La bille B quant à elle, n'a pas de vitesse initiale mais possède une accélération constante $\vec{a}(B) = a \vec{e}_{x'}$.
Nous noterons $v_B(t) \vec{e}_{x'}$ sa vitesse à l'instant t .



On donne $a = 3,35 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ et $v_0 = 3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

- Exprimer $v_A(t)$ en fonction a , t et v_0
- Exprimer $v_B(t)$ en fonction a et t
- Déterminer la position x'_A de A en fonction du temps
- Déterminer la position x'_B de B en fonction du temps
- Déterminer la distance L minimale (en cm) pour qu'une collision puisse avoir lieu.
.....

Entraînement 7.14 — Chute libre.



On considère le point M de masse m et de coordonnées (x, y, z) dans la base cartésienne $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

Il est lancé avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_{0x} \vec{e}_x + v_{0z} \vec{e}_z$ à partir de l'origine O du repère dans le champ de pesanteur uniforme $\vec{g} = -g \vec{e}_z$.

Tout frottement étant négligé, l'accélération de M est égale à $\vec{g}$ à tout instant.

- Exprimer $x(t)$ en fonction de v_{0x} et t
- Exprimer $z(t)$ en fonction de v_{0z} , g et t
- En déduire l'équation cartésienne de la trajectoire z en fonction de x ,
c'est-à-dire une relation entre $x(t)$ et $z(t)$

Entraînement 7.15 — Pauvre gazelle.



Un lion chasse une gazelle. Il court à la vitesse constante de $5,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$. La gazelle aperçoit le lion quand il est à 10 m de distance. Elle se met alors en fuite en accélérant à $2,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Pour rattraper la gazelle, le lion se met aussi à accélérer au même instant à $3,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

a) Combien de temps mettra le lion à rattraper la gazelle?

b) Quelle distance aura parcourue la gazelle avant de se faire dévorer? ..

Réponses mélangées

$$\begin{array}{ccccccc}
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) + z\vec{e}_z & r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) + r \cos(\theta)\vec{e}_z & & & & & \\
 \text{orthoradiale} & 8 \text{ min } 20 \text{ s} & \frac{1}{2}at^2 + L & -\frac{1}{2}gt^2 + v_{0z}t & 2abt^2\vec{e}_\theta & & \\
 r_0e^{-t/\tau} \left(-\frac{1}{\tau}\vec{e}_r + \omega\vec{e}_\theta \right) & at & \text{décéléré} & r \sin(\theta)(\cos(\varphi)\vec{e}_x + \sin(\varphi)\vec{e}_y) & & & \\
 r\vec{e}_r & r\vec{e}_r + z\vec{e}_z & \sqrt{(a\omega)^2 + b^2} & \textcircled{b} & \cos \theta \vec{e}_x + \sin \theta \vec{e}_y & & \\
 49,4 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} & \frac{1}{T^2} & r_0e^{-t/\tau} \left(\left(\frac{1}{\tau^2} - \omega^2 \right) \vec{e}_r - \left(2\frac{\omega}{\tau} \right) \vec{e}_\theta \right) & 8,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} & & & \\
 a \left(\cos(\theta)\vec{e}_x + \left(\sin(\theta) + \frac{b}{a} \right) \vec{e}_y \right) & \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}(-\sin \theta \vec{e}_x + \cos \theta \vec{e}_y) & & & & & \\
 v_{0x}t & 2,9 \text{ m} & -\frac{1}{2}at^2 + v_0t & a\vec{e}_r & \vec{e}_y = \sin \theta \vec{e}_r + \cos \theta \vec{e}_\theta & & \\
 z = -\frac{g}{2v_{0x}^2}x^2 + \frac{v_{0z}}{v_{0x}}x & 1,7 \text{ s} & \vec{e}_x = \cos \theta \vec{e}_r - \sin \theta \vec{e}_\theta & r = r_0e^{-\theta} & & & \\
 r(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) & \frac{a_0 \times \tau_1^2}{2} & a \left(2 \cos(\theta)\vec{e}_x + \left(2 \sin(\theta) + \frac{b}{a} \right) \vec{e}_y \right) & & & & \\
 a\vec{e}_r + 2abt^2\vec{e}_\theta & \cos(\theta)\vec{e}_r - \sin(\theta)\vec{e}_\theta & -a\omega^2(\cos(\omega t)\vec{e}_x + \sin(\omega t)\vec{e}_y) & & & & \\
 a\omega(-\sin(\omega t)\vec{e}_x + \cos(\omega t)\vec{e}_y) + b\vec{e}_z & \textcircled{c} & |r \sin(\theta)| & r\vec{e}_r & & & \\
 -at + v_0 & 1 \text{ h } 6 \text{ min } 40 \text{ s} & a_0 \times \tau_1 \times \left(\frac{\tau_1}{2} + \tau_2 \right) & a_0 \times \tau_1 & & & \\
 \frac{d\vec{e}_r}{dt} = \dot{\theta}\vec{e}_\theta & a(\cos(\theta)\vec{e}_x + \sin(\theta)\vec{e}_y) & -b\vec{e}_y & a\omega^2 & 67 \text{ cm} & \frac{L}{T} &
 \end{array}$$

Exercice 1 : Avion de chasse

Un avion de chasse volant à vitesse constante $v = 1500 \text{ km/h}$ effectue un demi-tour en forme de demi-cercle de rayon $R = 6 \text{ km}$. Calculer l'accélération de l'avion pendant son virage. Illustrer sur un schéma la trajectoire de l'avion, sa vitesse et son accélération à un instant donné.

Exercice 2 : Test d'accélération d'une voiture

Une voiture est chronométrée pour un test d'accélération en ligne droite avec départ arrêté.

1. Elle est chronométrée à $26,6 \text{ s}$ au bout d'une distance $D = 180 \text{ m}$. Déterminer l'accélération (supposée constante) et la vitesse atteinte à la distance D .
2. Quelle est la distance d'arrêt pour une décélération de 7 m.s^{-2} .

Exercice 3 : Terre autour du Soleil

1. On suppose que le mouvement de la Terre autour du Soleil est suivi par une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ constante. Donner la valeur numérique de $\dot{\theta}$.
2. L'étude dynamique de la Terre montre que la quantité $r^2\dot{\theta}$ est constante, où r est la distance Terre-Soleil. Montrer alors que le mouvement de la Terre est circulaire. Quelle est la vitesse de la Terre.
3. Exprimez la position, la vitesse et l'accélération de la Terre en coordonnées polaires puis cartésiennes.

Exercice 4 : Interpellation pour vitesse excessive

Un conducteur roule à vitesse constante v_0 sur une route rectiligne. Comme il est en excès de vitesse à 100 km/h , un gendarme à moto démarre à l'instant où la voiture passe à sa hauteur et accélère uniformément. Le gendarme atteint la vitesse de 90 km/h au bout de 10 s .

1. Quel sera le temps nécessaire au motard pour rattraper la voiture ?
2. Quelle distance aura-t-il parcourue ?
3. Quelle vitesse aura-t-il atteinte ?

Exercice 5 : Courses entre véhicules radio-commandés

Deux modèles réduits de voitures radio-commandées ont des performances différentes : le premier a une accélération de $4,0 \text{ m.s}^{-2}$, le second de $5,0 \text{ m.s}^{-2}$. Cependant l'utilisateur de la première voiture a plus de réflexes que celui de la seconde, ce qui lui permet de la faire démarrer 1 s avant le second.

1. Déterminer le temps nécessaire au deuxième véhicule pour rattraper l'autre ?
2. Les deux modèles réduits participent à des courses de 100 m et 200 m . Est-il possible que le perdant du 100 m prenne sa revanche au 200 m .
3. Calculer pour les deux courses la vitesse finale de chacun des véhicules.

Exercice 6 : Laboratoire spatial

Un laboratoire spatial, constitué de deux anneaux concentriques de même axe, est en rotation uniforme autour de cet axe de manière à créer une gravité artificielle. Sa période de rotation T est choisie de manière à ce que l'accélération soit égale à $\vec{g}_T$ l'accélération de pesanteur sur Terre ($9,81 \text{ m.s}^{-2}$) au niveau de l'un des anneaux (de rayon $r_1 = 2,15 \text{ km}$) et à $\vec{g}_M$ l'accélération de la pesanteur sur Mars ($3,72 \text{ m.s}^{-2}$) au niveau de l'autre.

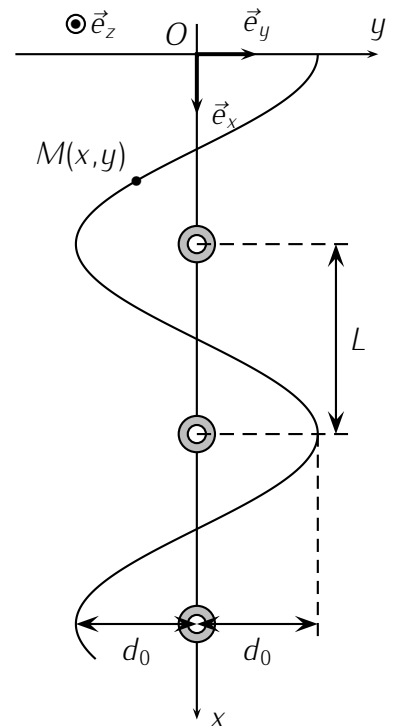
Déterminer la valeur de T et le rayon r_2 du second anneau.

Exercice 7 : Super G

Lors d'une descente de super G, le skieur, repéré par le point M de coordonnées (x, y) dans le référentiel $\mathcal{R}(0, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, part du point $(0, d_0)$ puis est astreint à suivre une trajectoire sinusoïdale de slalom entre des portes espacées d'une distance L de manière à conserver à tout moment une vitesse dont la composante suivant Ox est constante : $\dot{x} = v_0 = 40 \text{ km.h}^{-1}$.

On s'intéresse dans cette partie à la cinématique du skieur.

1. La trajectoire se met sous la forme $y(x) = A \cos(Bx)$.
Préciser la dimension (ou l'unité) de A et celle de B .
2. Exprimer A et B en fonction de d_0 et L .
3. Déterminer l'expression de $x(t)$ puis $y(t)$.
4. En déduire les expressions des vecteurs vitesse $\vec{v}(t)$ et accélération $\vec{a}(t)$ du skieur.
5. Pour que le skieur reste en piste, il doit conserver à tout moment une accélération inférieure à $0,7g$. À quelle distance minimum $L_{\min}$ doit-on placer les portes.
6. On donne $g = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$ et $d_0 = 3 \text{ m}$. Faire l'application numérique.

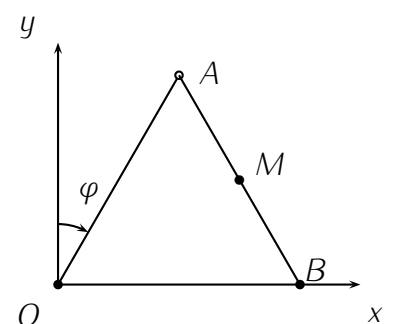


Exercice 8 : Chute d'un homme sur un escabeau

Un homme est situé en M à mi hauteur d'un escabeau dont un pied noté O est appuyé contre un mur. Le pied B se met à glisser sur le sol.

On pose $AB = OA = 2b$ et l'angle $(Oy, \vec{OA}) = \varphi = \omega t$ et on prendra ω constante.

1. Déterminer l'équation cartésienne de la trajectoire de M et la représenter.
2. Déterminer son accélération dans le référentiel lié au sol.



 Exercice 9 : Optimisation d'un trajet

Soit une plage P , séparation entre deux milieux différents : le sable (milieu (1)) et la mer (milieu (2)).

Un point A_1 sur le sable est à la distance $A_1H_1 = a_1$ de P . Un point A_2 en mer est à la distance $A_2H_2 = a_2$ de P . On pose $H_1H_2 = d$.

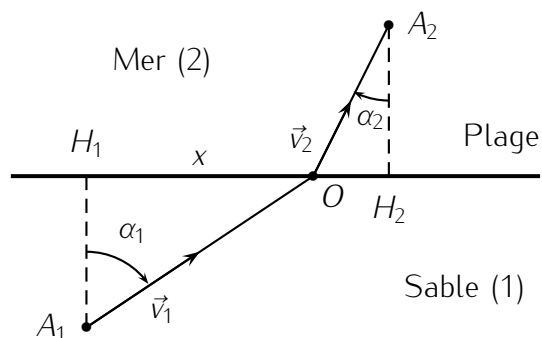
Un maître nageur I est en A_1 au moment où il repère une jolie nageuse en difficulté en A_2 .

Il peut courir sur le sable à la vitesse v_1 et nager à la vitesse $v_2 < v_1$, on notera τ la durée du parcours A_1OA_2 .

Quel trajet doit-il emprunter pour rejoindre A_2 le plus rapidement possible ?

On déterminera d'abord l'équation que doit vérifier $x = H_1O$, puis on simplifiera l'expression obtenue en introduisant les angles $\alpha_1 = (\overrightarrow{A_1H_1}, \overrightarrow{A_1O})$ et $\alpha_2 = (\overrightarrow{A_2H_2}, \overrightarrow{A_2O})$

À quelle loi physique l'expression obtenue vous fait-elle penser ?



DYNAMIQUE DU POINT

Qu'est-ce qu'une force ?
Comment la modélise-t-on ?

DYNAMIQUE DU POINT

Citer deux modèles de forces
de frottements fluides ? Quand
utilise-t-on l'un ou l'autre de
ces modèles.

DYNAMIQUE DU POINT

Citer les lois de Coulomb du
frottement solide.

DYNAMIQUE DU POINT

Que peut-on dire de la force
exercée par un fil idéal (sans
masse ni raideur) sur un point
matériel ?

DYNAMIQUE DU POINT

Qu'est-ce qu'une déformation
élastique ?

DYNAMIQUE DU POINT

Qu'est-ce que le domaine
d'élasticité linéaire d'un
matériau ?

DYNAMIQUE DU POINT

Donner l'expression de la
force exercée par un ressort
de raideur k , de longueur à
vide l_0 et colinéaire à $\vec{e}_x$.

DYNAMIQUE DU POINT

Définir l'impulsion ou
quantité de mouvement d'un
point M de masse m et de
vitesse $\vec{v}$.

DYNAMIQUE DU POINT

Énoncer la première loi de
Newton.

La force de contact entre deux solides s'écrit $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ avec $\vec{N}$ normal au plan du contact et $\vec{T}$ tangent au contact.

- En l'absence de glissement

$$\|\vec{T}\| \leq \mu_s \|\vec{N}\|$$

- En présence de glissement

$$\|\vec{T}\| = \mu_d \|\vec{N}\|$$

- Pour les *faibles* vitesses $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$
- Pour les vitesses *élevées* $\vec{f} = -\beta v \vec{v}$

Une force caractérise l'action subie par un système. On la modélise par

- un vecteur dont la direction et le sens sont ceux de la force, la norme du vecteur donne l'intensité de la force (en N)
- un point d'application.

On parle d'élasticité linéaire lorsque la déformation élastique est proportionnelle à la contrainte appliquée au matériau.

Une déformation élastique est une déformation réversible, c'est-à-dire que le matériau reprend sa forme initiale et la déformation disparaît lorsque les forces appliquées au matériau disparaissent.

La force exercée par le fil est colinéaire à celui-ci et toujours orienté du point vers le fil.

Il existe une classe de référentiel, dit référentiels Galiléens, par rapport auquel un objet isolé ou pseudo-isolé possède un mouvement rectiligne uniforme.

$$\vec{F} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$\vec{F} = \pm k (l - l_0) \vec{e}_x$ avec l la longueur du ressort et le signe $\pm$ selon le sens de $\vec{e}_x$ vis-à-vis de celui du ressort.

DYNAMIQUE DU POINT

Énoncer la deuxième loi de Newton.

DYNAMIQUE DU POINT

Énoncer la troisième loi de Newton.

DYNAMIQUE DU POINT

Comment traiter un problème de mécanique ?

DYNAMIQUE DU POINT

Donner l'expression de la force de gravitation. En déduire l'expression du poids.

- Faire un dessin
- Définir le système étudié
- Définir un repère et un référentiel
- Faire un inventaire des actions mécaniques qui agissent sur le système
- Appliquer une loi ou théorème de mécanique
- Projeter les relations vectorielles
- Résoudre

Soit deux points A et B en interaction, si A exerce sur B une force $F_{A \rightarrow B}$ alors B exerce sur A une force de même intensité, même direction et de sens contraire. $\vec{F}_{B \rightarrow A} = -\vec{F}_{A \rightarrow B}$, de plus ces deux forces sont portées par la droite (AB)

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement d'un point matériel est égal à la somme des forces qui lui sont appliquées.

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

$\vec{F} = -\mathcal{G} \frac{m_A m_B}{AB^3} \vec{AB}$. Pour un point de masse m au voisinage de la terre (masse M_T) alors

$$F = \mathcal{G} \frac{m M_T}{(R_T + z)^2} \simeq m \mathcal{G} \frac{M_T}{R_T^2} = mg$$

M_2 – Dynamique du point matériel

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_1 .
- Toujours préciser le référentiel d'étude et le système étudié.
- Faire une belle figure et y placer les forces (vecteurs) en respectant la direction, le sens voire la norme.
- Faire ensuite le bilan des forces exercées sur le système, donner leur expression dans la base vectorielle la plus adaptée.
- On procède ensuite souvent par projection sur un système d'axes : faites bien la différence entre un vecteur $\vec{F}$ (ne pas oublier les flèches), ses composantes dans une base (F_x et F_y tels que $\vec{F} = F_x \cdot \vec{e}_x + F_y \cdot \vec{e}_y$) qui sont des scalaires positifs ou négatifs et sa norme $\|\vec{F}\| = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$ qui est un scalaire positif ou nul.
- Lors de la projection d'un vecteur sur un axe, vérifier systématiquement le signe de la cohérence de la composante obtenue. On aura intérêt à effectuer les tracés avec des angles très différents de 45° .
- Lorsque la réaction $\vec{R}$ d'un support s'annule le mobile décolle du support.
- Dans le cas particulier d'un objet en équilibre sous l'action de trois forces dont deux sont perpendiculaires (cas assez courant), il suffit en général de travailler dans le triangle rectangle défini par $\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 = \vec{0}$ pour résoudre le problème.

Pour commencer



Entraînement 8.1 — Une relation algébrique.



La vitesse v (en régime permanent) d'un mobile vérifie l'équation

$$m_1(v - v_1) + m_2(v - v_2) = p.$$

Donner l'expression de v (en fonction de m_1 , m_2 , v_1 , v_2 et p)



Entraînement 8.2 — Un système de deux équations.



Un problème de mécanique fait intervenir une force d'intensité F et un angle $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. En projetant la seconde loi de Newton sur deux axes, on aboutit au système d'équations suivant :

$$\begin{cases} T + F \sin \alpha = mR\omega^2 \\ F \cos \alpha = mg. \end{cases}$$

a) Déterminer F en fonction des données T, m, R, ω et g

b) Déterminer α en fonction des données T, m, R, ω et g



Entraînement 8.3 — Quelques équations différentielles.



Résoudre les équations différentielles suivantes, sachant que $v = 0$ à $t = t_0$, et que les paramètres a_0 et k sont des constantes.

a) $\frac{dv}{dt} = a_0$

b) $\frac{dv}{dt} = -kv$

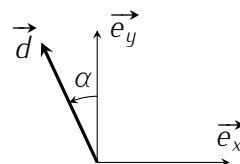
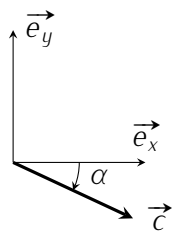
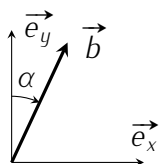
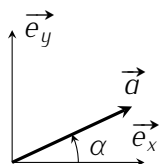
c) $\frac{dv}{dt} = -kv + a_0$

Décomposition de vecteurs

Entraînement 8.4 — Des projections.



On considère les vecteurs suivants :



Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs :

a) $\vec{a}$

c) $\vec{c}$

b) $\vec{b}$

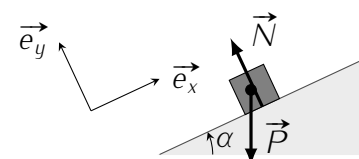
d) $\vec{d}$

Entraînement 8.5 — Sur un plan incliné.



On considère la situation représentée ci-contre.

Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ les vecteurs suivants.



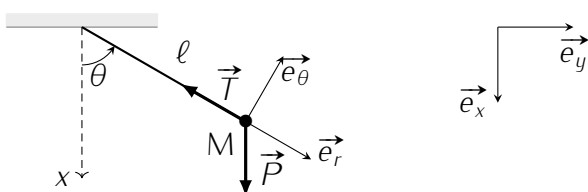
a) $\vec{P}$

b) $\vec{N}$

Entraînement 8.6 — Avec un pendule simple.



On considère la situation



Décomposer dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ les vecteurs suivants :

a) $\vec{P}$

c) $\vec{P} + \vec{T}$

b) $\vec{T}$

Entraînement 8.7 — Avec un pendule simple (suite).



On se place dans la même situation que ci-dessus. Décomposer dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$:

- a) $\vec{P}$ c) $\vec{P} + \vec{T}$
- b) $\vec{T}$

Entre accélération et position

Entraînement 8.8 — Du vecteur position au vecteur accélération.



On considère un point M en mouvement dont les coordonnées cartésiennes dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ sont, à chaque instant $x(t) = \frac{1}{2}a_0t^2 + x_0$, $y(t) = -v_0t$ et $z(t) = z_0$.

Donner les expressions du vecteur :

- a) position b) vitesse c) accélération

Entraînement 8.9 — Du vecteur accélération au vecteur position.



On considère un point M de masse m en chute libre soumis à son poids $\vec{P} = mg\vec{e}_z$. Ce point M a été lancé avec une vitesse initiale $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$ et une position initiale $M_0 \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

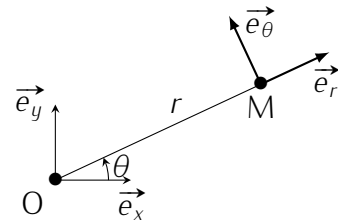
Donner l'expression des vecteurs :

- a) accélération c) position
- b) vitesse

Around polar coordinates

In this paragraph, we consider a point M represented by the distance r and the angle θ in polar coordinates. The distance r and the angle θ depend on time t : the point M is mobile.

We represent the situation by the scheme below.



Entraînement 8.10 — Trois calculs fondamentaux.



Decompose in the base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ the vectors :

- a) $\vec{e}_r$ b) $\vec{e}_\theta$

En déduire (en dérivant) l'expression dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ des vecteurs :

- c) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ d) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

En déduire l'expression, dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$, des vecteurs :

- e) $\frac{d\vec{e}_r}{dt}$ f) $\frac{d\vec{e}_\theta}{dt}$

Entraînement 8.11 — Vecteur position en coordonnées polaires.



How is the position vector $\vec{OM}$ expressed in polar coordinates ?

- (a) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \theta\vec{e}_\theta$
 (b) $\vec{OM} = r\vec{e}_r + \frac{\theta\vec{e}_\theta}{\theta}$
 (c) $\vec{OM} = r\vec{e}_r$
 (d) $\vec{OM} = \theta\vec{e}_\theta$

.....

Entraînement 8.12 — Accélération en coordonnées polaires.



Derive from what precedes the expression, in function of $\vec{e}_r$ and $\vec{e}_\theta$:

- a) du vecteur vitesse $\vec{v}$
- b) du vecteur accélération $\vec{a}$

Étude de systèmes en équilibre

Entraînement 8.13 — Tension d'un fil.

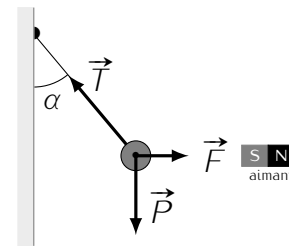


Une bille d'acier de poids $P = 2,0 \text{ N}$, fixée à l'extrémité d'un fil de longueur $\ell = 50 \text{ cm}$ est attirée par un aimant exerçant une force $F = 1,0 \text{ N}$. À l'équilibre, le fil s'incline d'un angle α et l'on a

$$\vec{T} + \vec{F} + \vec{P} = \vec{0},$$

où $\vec{T}$ est la tension exercée par le fil.

Calculer les valeurs numériques de :



- a) la tension T du fil
- b) l'angle α (en radian)

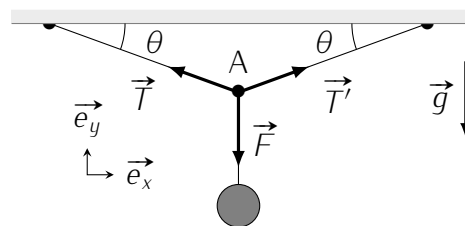
Entraînement 8.14 — Masse suspendue.



Un objet qui pèse 800 N est suspendu en équilibre à l'aide de deux cordes symétriques qui font un angle $\theta = 20^\circ$ avec la direction horizontale.

Le point A est soumis à trois forces :

$$\vec{T}, \vec{T}' \text{ et } \vec{F}.$$



On note $\vec{R}$ la résultante des forces.

- a) Exprimer la composante horizontale R_x en fonction de T , T' et θ
- b) Exprimer la composante verticale R_y en fonction de T , T' , F et θ
- c) Déterminer la tension T en résolvant l'équation $\vec{R} = \vec{0}$

Mouvements rectilignes

Entraînement 8.15 — Chute avec frottement.



Un corps de masse $m = 2 \text{ kg}$ tombe verticalement avec une accélération de $a = 9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. Lors de sa chute il subit la force de pesanteur ainsi qu'une force de frottement due à l'air.

On prendra $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de la force de frottement ?

Entraînement 8.16 — Contact dans un ascenseur.



Un homme de masse $m = 80\text{ kg}$ est dans un ascenseur qui monte avec une accélération $a = 1\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$. On note $\vec{F}$ la force exercée par l'homme sur le plancher de l'ascenseur.

On prendra $g = 9,8\text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ pour l'intensité du champ de pesanteur.

Combien vaut l'intensité de $\vec{F}$?

Entraînement 8.17 — Calcul d'une action de contact.

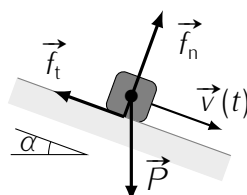


Un bloc de masse m , de poids $\vec{P}$ glisse à une vitesse $v(t)$, variable au cours du temps, sur un support plan qui exerce une action de contact.

Celle-ci se décompose en deux actions :

- une action normale à la surface $\vec{f}_n$;
- une action de frottement $\vec{f}_t$ opposée à la vitesse de glissement.

Le plan est incliné d'un angle α , comme figuré ci-dessous.



Déterminer (en fonction d'au moins une des données P , $v(t)$, m et α) :

a) l'intensité de l'action normale f_n

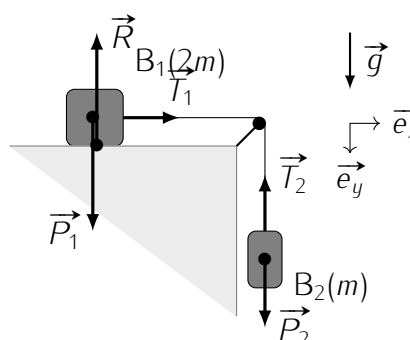
b) l'intensité du frottement f_t

Entraînement 8.18 — Calcul d'une accélération.



Deux blocs B_1 et B_2 de masse respective $2m$ et m sont reliés par un fil. On passe le fil dans la gorge d'une poulie, puis on maintient le bloc B_1 sur la table alors que l'autre est suspendu dans l'air. On libère le bloc B_1 qui glisse alors sur la table. On note T_1 et T_2 les tensions exercées par le fil sur les blocs, a_1 et a_2 les accélérations respectives des blocs B_1 et B_2 , et g le champ de pesanteur.

Les frottements sont négligeables.



a) Exprimer a_1 en fonction de m et T_1

b) Exprimer l'accélération a_2 de B_2 en fonction de m , g et T_2

Le fil étant inextensible et sans masse on a $a_1 = a_2$ et $T_1 = T_2$.

c) En déduire l'accélération en fonction uniquement de g

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 \frac{a_0}{k} [1 - e^{-k(t-t_0)}] & (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \vec{e}_\theta & \dot{\theta} \vec{e}_\theta & \\
 -\dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_x - \dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_y & \arctan\left(\frac{mR\omega^2 - T}{mg}\right) & 0 & \\
 -\dot{\theta} \sin(\theta) \vec{e}_x + \dot{\theta} \cos(\theta) \vec{e}_y & 864 \text{ N} & (T' - T) \cos \theta & -\dot{\theta} \vec{e}_r \\
 \cos(\theta) \vec{e}_x + \sin(\theta) \vec{e}_y & (T' + T) \sin \theta - F & -T \vec{e}_r & -m \frac{dv}{dt} + P \sin \alpha \\
 2,2 \text{ N} & g - \frac{T_2}{m} & \frac{p + m_1 v_1 + m_2 v_2}{m_1 + m_2} & c \cos(\alpha) \vec{e}_x - c \sin(\alpha) \vec{e}_y \\
 r \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta & -\sin(\theta) \vec{e}_x + \cos(\theta) \vec{e}_y & -T \cos(\theta) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y & \\
 -d \sin(\alpha) \vec{e}_x + d \cos(\alpha) \vec{e}_y & g \vec{e}_z & 1,6 \text{ N} & (P - T \cos(\theta)) \vec{e}_x - T \sin(\theta) \vec{e}_y \\
 \frac{T_1}{2m} & -P \sin(\alpha) \vec{e}_x - P \cos(\alpha) \vec{e}_y & P \cos \alpha & b \sin(\alpha) \vec{e}_x + b \cos(\alpha) \vec{e}_y \\
 P \vec{e}_x & (P \cos(\theta) - T) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta & N \vec{e}_y & 1,17 \text{ kN} \\
 a_0(t - t_0) & \left(\frac{1}{2} a_0 t^2 + x_0\right) \vec{e}_x - v_0 t \vec{e}_y + z_0 \vec{e}_z & P \cos(\theta) \vec{e}_r - P \sin(\theta) \vec{e}_\theta & \\
 a \cos(\alpha) \vec{e}_x + a \sin(\alpha) \vec{e}_y & (v_0 t + x_0) \vec{e}_x + y_0 \vec{e}_y + \frac{1}{2} g t^2 \vec{e}_z & \sqrt{(mR\omega^2 - T)^2 + (mg)^2} & \\
 a_0 \vec{e}_x & 0,46 \text{ rad} & \frac{g}{3} & a_0 t \vec{e}_x - v_0 \vec{e}_y \quad v_0 \vec{e}_x + g t \vec{e}_z \quad \textcircled{c}
 \end{array}$$

Exercice 1 : Glissement d'un objet sur un plan incliné

Soit un objet de centre d'inertie M et de masse m posé sur un plan incliné qui fait l'angle α avec l'horizontale. On note f_0 le coefficient de frottement statique et f le coefficient de frottement dynamique. On rappelle que d'après les lois de Coulomb sur le frottement solide, si on décompose la réaction du support $\vec{R} = \vec{T} + \vec{N}$ où $\vec{T}$ est la réaction tangentielle et $\vec{N}$ la réaction normale, $T < f_0 N$ au repos et $T = f.N$ lors du glissement.

1. Pour quelle valeur α_0 de α l'objet va-t-il commencer à glisser sur le plan incliné (mouvement de translation) ?
2. Étudier le mouvement ultérieur, $x(t)$ où x est le déplacement de l'objet sur le plan incliné.

Exercice 2 : Parabole de sûreté

Une particule (projectile) est lancée depuis un point O pris pour origine des espaces et des temps. La vitesse initiale $\vec{v}_0$ fait avec l'horizontale de O un angle $\alpha > 0$.

1. Établir l'équation de la trajectoire.
2. Déterminer les coordonnées du sommet S et la portée OB , les dates T_S et t_B auxquels sont atteints les points S et B .
3. Montrer que l'ensemble des points de l'espace que l'on peut atteindre dans les conditions précédentes est située sous une courbe dont on établira une équation en $\tan \alpha$.

Exercice 3 : Coulisement sur une tige en rotation

Une tige $\mathcal{T}$ horizontale passant par O tourne autour de l'axe vertical (Oz) à la vitesse angulaire ω constante.

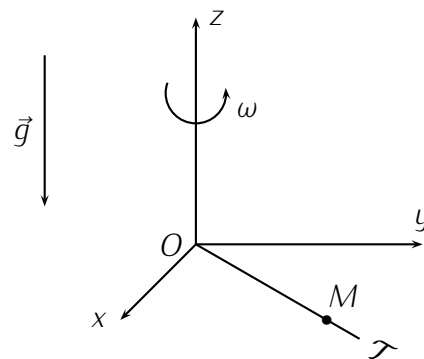
Un point matériel M de masse m peut coulisser sans frottement sur la tige. Il est repéré par ses coordonnées polaires (r, θ) dans le plan (Oxy) .

À l'instant $t = 0$, le point M est abandonnée sans vitesse initiale par rapport à la tige à la distance r_0 de l'origine O ; on a donc

$$r(t = 0) = r_0 \text{ et } \dot{r}(t = 0) = 0$$

On suppose de plus qu'à ce même instant, la tige est confondue avec l'axe (Ox) : $\theta(t = 0) = 0$.

1. Ecrire le principe fondamental de la dynamique en projection dans la base cylindrique $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$.
2. En déduire l'équation différentielle du second ordre vérifiée par $r(t)$.
3. Déterminer la loi horaire $r(t)$ en fonction de r_0 et ω . Tracer l'allure de $r(t)$ pour $t \geq 0$.
4. Reprendre la question précédente pour la trajectoire $r(\theta)$.



Exercice 4 : Bon à savoir ...

Une voiture M de masse m suit une trajectoire rectiligne sur le sol horizontal à une vitesse constante $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_y$ jusqu'à l'instant $t = 0$ où le conducteur aperçoit un mur (!) infini (!!) perpendiculaire à $\vec{v}_0$ à la distance D . On suppose pour simplifier que seulement deux choix s'offrent au conducteur :

- soit il freine brutalement en bloquant les roues (la voiture n'a pas d'ABS) tout en gardant une trajectoire rectiligne.
- soit il tourne sans freiner et à la limite du dérapage sur une trajectoire circulaire pour essayer d'éviter le mur (considéré comme infini).

On supposera que la nature du contact des roues avec le sol est telle que dans les deux cas, la composante tangentielle de la force de frottement est proportionnelle (facteur f) à sa composante normale $T = f.N$ (loi de Coulomb sur les frottements). Quel est le meilleur choix ?

Exercice 5 : Frottements quadratiques

Un solide modélisé par un point matériel M de masse $m = 20$ kg est lâché sans vitesse initiale dans le champ de pesanteur uniforme.

L'air exerce sur lui une force de frottement opposée à la vitesse et de norme $f = \alpha v^2$ ($\alpha > 0$).

1. On constate que le solide atteint au bout d'un certain temps une vitesse limite constante $v_l = 45$ m.s⁻¹. Calculer α (on précisera bien son unité).
2. Au bout de combien de temps cette vitesse est-elle atteinte à 0,1 % près ?

On posera $u = v/v_l$ et on rappelle que $\int \frac{du}{1-u^2} = \frac{1}{2} \ln \left| \frac{1+u}{1-u} \right| + cte$.

Exercice 6 : Enroulement d'un fil

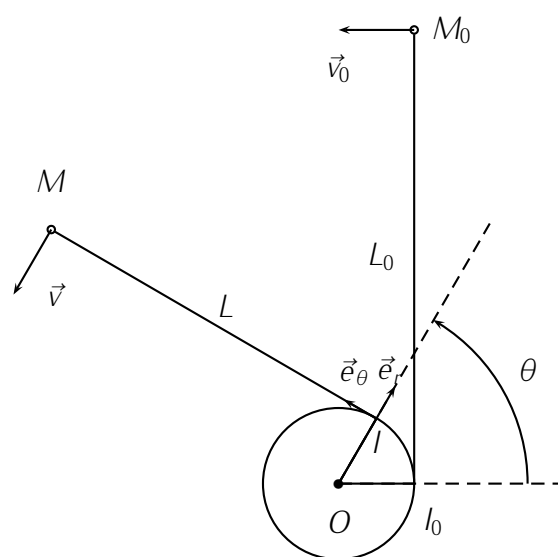
Un cylindre d'axe vertical et de rayon R , repose sur un plan horizontal.

On attache en un point l_0 du cylindre un fil sans masse qui peut s'enrouler autour de la base du cylindre (cercle de centre O). La longueur du fil est constante et égale à L_0 . L'autre extrémité du fil est fixée à un point matériel M de masse m glissant sans frottement sur le plan horizontal. Le point M est initialement en M_0 tel que le fil soit tendu et tangent à la base en l_0 . On communique alors au point M une vitesse $\vec{v}_0$, horizontale et perpendiculaire à la droite $(l_0 M_0)$.

On suppose que le fil reste tendu au cours du mouvement et on note $L(t)$ la longueur de la partie IM non enroulée du fil à l'instant t .

On donne $R = 0,2$ m ; $L_0 = 0,5$ m ; $m = 0,04$ kg et $v_0 = 0,1$ m.s⁻¹.

On travaillera dans la base polaire $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ définie par la position du point I (Cf. figure ci-contre).



1. Donner la relation entre L , L_0 , R et l'angle θ repérant la position du point I .
2. Calculer $\overrightarrow{OM}$ en fonction de $\vec{e}_r$, $\vec{e}_\theta$, L_0 , R et θ .
3. En déduire l'expression de la vitesse $\vec{v}$ du point matériel M à la date t , dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.
4. Montrer par utilisation du principe fondamental de la dynamique que $\|\vec{v}\| = Cte$.
5. Déduire des questions 3. et 4. la relation entre $\dot{\theta}$, θ , L_0 , R et v_0 .
6. Exprimer θ en fonction de t , L_0 , R et v_0 .
7. Calculer t_f , la date à laquelle le fil est entièrement enroulé autour du cylindre. Faire l'application numérique.
8. Calculer la tension du fil T à la date t en fonction de t , m , L_0 , R et v_0 . Que se passe-t-il quand $t \rightarrow t_f$? Commenter.

OSCILLATEURS LIBRES

Qu'est-ce qu'un oscillateur harmonique ?

OSCILLATEURS LIBRES

Soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \text{qqchose}$$

Comment s'appelle ω_0 ?
Quelle est sa dimension ? En quelle unité s'exprime t-elle ?

OSCILLATEURS LIBRES

Soit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

Donner l'expression des solutions de cette équation différentielle.

OSCILLATEURS LIBRES

Retrouver l'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ dans un circuit RLC série alimenté par un échelon de tension E .

OSCILLATEURS LIBRES

Mettre l'équation différentielle

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{E}{LC}.$$

sous forme canonique en introduisant ω_0 et Q . Donner les expressions de ω_0 et Q .

OSCILLATEUR LIBRE

Donner la condition sur Q qui caractérise le régime apériodique.

OSCILLATEUR LIBRE

Exprimer les deux racines r_1 et r_2 de l'équation caractéristique dans le régime apériodique.

OSCILLATEUR LIBRE

Donner la solution générale de $u_C(t)$ (réponse à un échelon E d'un circuit RLC série) dans le régime apériodique.

OSCILLATEUR LIBRE

Donner la forme générale de la solution $u_C(t)$ en régime critique (réponse à un échelon E d'un circuit RLC série).

$$x(t) = \lambda \cos(\omega_0 t) + \mu \sin(\omega_0 t)$$

ou

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t + \varphi)$$

ou

$$x(t) = C \sin(\omega_0 t + \psi)$$

ω_0 est la pulsation propre.
Elle est homogène à l'inverse
d'un temps et s'exprime en
 rad.s^{-1}

Un oscillateur harmonique est
un système pouvant être
décrit par l'équation
différentielle suivante :

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \text{qqchose}$$

Le régime est *apériodique* si

$$Q < \frac{1}{2}.$$

$$\ddot{u}_C + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_C + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E,$$

où

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}, \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

La loi des mailles et les
relations constitutives des
dipôles conduisent à

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C(t) = \frac{E}{LC}.$$

La solution s'écrit :

$$u_C(t) = E + (\lambda t + \mu) e^{-t/\tau},$$

$$\text{avec } \tau = \frac{2Q}{\omega_0}.$$

avec λ et μ fixés par les
conditions initiales.

La solution générale s'écrit

$$u_C(t) = E + \lambda e^{-\frac{t}{\tau_1}} + \mu e^{-\frac{t}{\tau_2}},$$

où λ et μ se déterminent à
partir des conditions initiales
(continuité de u_C et de
 $i = C \dot{u}_C$ à $t = 0$).

Dans ce régime les racines
réelles de l'équation
caractéristique sont

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

On les notes respectivement
 $-\frac{1}{\tau_1}$ et $-\frac{1}{\tau_2}$

OSCILLATEURS LIBRES

Exprimer la pseudo-pulsation ω dans le régime pseudo-périodique.

OSCILLATEURS LIBRES

Donner la solution générale de $u_C(t)$ dans le régime pseudo-périodique (réponse à un échelon E d'un circuit RLC série).

OSCILLATEURS LIBRES

Établir l'équation différentielle du mouvement pour un pendule simple de longueur l et de masse m en l'absence de frottement.
Est-ce un oscillateur harmonique ?

OSCILLATEURS LIBRES

Simplifier l'équation différentielle suivante dans l'approximation des petits angles

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

Exprimer alors ω_0 , la pulsation propre, en fonction de g et l .

OSCILLATEURS LIBRES

Établir le bilan énergétique du circuit RLC série soumis à un échelon de tension E .

On étudie la masse dans un référentiel galiléen, elle soumise à son poids et à la tension du fil. La projection de la seconde loi de Newton selon $\vec{e}_\theta$ donne

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{l} \sin \theta = 0$$

La solution s'écrit :

$$u_C(t) = E + e^{-t/\tau} \left(\lambda \cos(\omega t) + \mu \sin(\omega t) \right)$$

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}, \omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Dans le régime pseudo-périodique la pseudo-pulsation vaut

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

On multiplie terme à terme la loi des mailles par le courant i . On obtient

$$Ei = u_C i + u_L i + u_R i$$

Soit

$$Ei = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) + R i^2$$

Ainsi, la puissance fournie par le générateur sert, pour partie, à faire varier l'énergie stockée dans le condensateur et la bobine ; l'autre partie est dissipée par effet Joules dans la résistance.

Aux petits angles $\sin \theta \simeq \theta$ et

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

OS_1 – Oscillateurs libres

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- On peut parfois encore simplifier le circuit en laissant la grandeur à calculer apparente pour se ramener à un cas classique (vu en classe).
- Pour déterminer l'évolution temporelle d'une grandeur ($u(t)$ pour $t \geq 0$ par exemple), la méthode doit être connue et maîtrisée :

★ Détermination des conditions initiales (CI) : représenter le circuit à $t = 0^-$ et utiliser la continuité de $u_C(t)$ et $i_L(t)$ pour en déduire son équivalent à $t = 0^+$ puis autant de CI que nécessaire ($u(0^+)$ si circuit du premier ordre, $u(0^+)$ et $\frac{du}{dt}\big|_{0^+}$ si second ordre).

★ Établir l'équation différentielle (en $u(t)$) : utiliser un minimum d'inconnues en écrivant la loi des nœuds sur la figure, attention aux conventions (générateur ou récepteur) pour écrire les relations constitutives. On se trouve en général face à un système d'équations différentielles il faut alors effectuer des substitutions ou même dériver certaines équations.

On doit obtenir une équation différentielle linéaire à coefficients constants et **tous de même signe**. Une fois l'équation obtenue, il faut la mettre sous une forme canonique pour faire apparaître τ ou ω_0 et Q .

★ Résolution de l'équation différentielle : on utilisera $sol = sol_H + sol_P$ avec sol_H la solution de l'équation homogène (il FAUT la connaître : Cf cours) et sol_P la solution particulière (de "même nature" que le second membre de l'équation c'est à dire une constante lors de ce chapitre). Vérifier que sol_P correspond au régime permanent. On applique les CI à sol (et non sol_H !) pour déterminer les constantes d'intégrations. Vérifier la cohérence avec le régime permanent ($u(t \rightarrow \infty)$) d'après l'équation et en raisonnant sur le montage).

★ Effectuer enfin un tracé correct (valeur et tangente à l'origine, forme, asymptote).

- Attention, ne confondez pas $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+}$ et $\frac{du(0^+)}{dt}$! Par exemple lors de la charge du condensateur du circuit RC étudié en classe, on avait $u(0^+) = 0$ mais $\left[\frac{du(t)}{dt}\right]_{0^+} = \frac{i(0^+)}{C} = \frac{E}{RC}$. $\frac{du(0^+)}{dt}$ n'a aucun sens, on ne dérive pas un nombre, mais une fonction.

Circuits du second ordre

Entraînement 9.1 — Équation canonique.



De nombreux circuits du second-ordre sont en fait des oscillateurs dont l'équation canonique est de la forme

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = f(t),$$

où ω_0 est appelée *pulsation propre* et Q *facteur de qualité*.

Donner la dimension de :

a) ω_0 b) Q

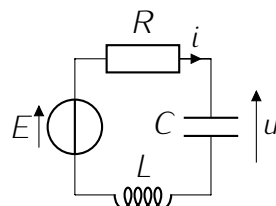
On considère l'équation $RC \frac{d^2i(t)}{dt^2} + \frac{di(t)}{dt} + \frac{R}{L}i(t) = 0$. Exprimer :

c) ω_0 d) Q

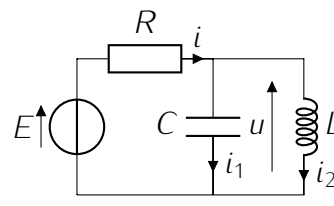
Entraînement 9.2 — Mise en équation.



On considère les deux circuits suivants, pour lesquels les fém des générateurs de tension E sont constantes.



montage 1



montage 2

À l'aide de la loi des mailles et des nœuds, établir l'équation différentielle vérifiée par la tension u :

a) Dans le montage 1

b) Dans le montage 2

Entraînement 9.3 — Équations type « oscillateur harmonique ».



a) Résoudre $\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2(u_C(t) - E) = 0$ avec $\begin{cases} u_C(0) = 0 \\ \frac{du_C}{dt}(0) = 0 \end{cases}$

b) Résoudre $\frac{d^2i(t)}{dt^2} + \omega_0^2 i(t) = 0$ avec $\begin{cases} i(0) = 0 \\ \frac{di}{dt}(0) = \frac{E}{L} \end{cases}$

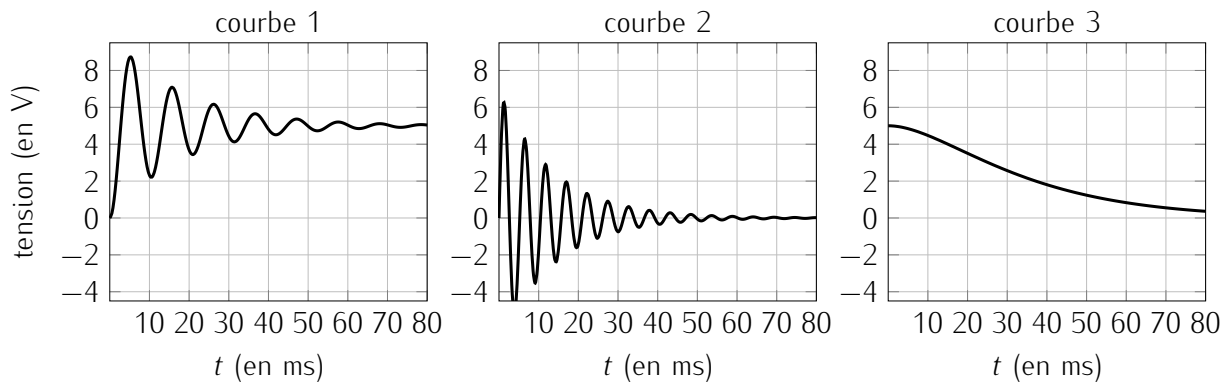
Entraînement 9.4 — Réponses d'un circuit du second-ordre.



Les graphes ci-dessous représentent l'évolution de trois tensions $u_1(t)$, $u_2(t)$, et $u_3(t)$ au cours du temps.

Toutes ces grandeurs évoluent suivant une équation différentielle du type

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx(t)}{dt} + \omega_0^2 x(t) = C^{te}.$$



a) Quelle courbe est associée au plus grand facteur de qualité Q ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

b) On a

$$u_1(t) = ae^{-t/\tau_1} - be^{-t/\tau_2}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

c) On a

$$u_2(t) = E \sin(\Omega t) e^{-t/\tau}.$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

d) On a

$$u_3(t) = E \left[1 - (\cos(\Omega' t) + a \sin(\Omega' t)) e^{-t/\tau'} \right].$$

Quelle est la courbe correspondante ?

(a) courbe 1

(b) courbe 2

(c) courbe 3

.....

e) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-pulsation Ω qui intervient dans $u_2(t)$

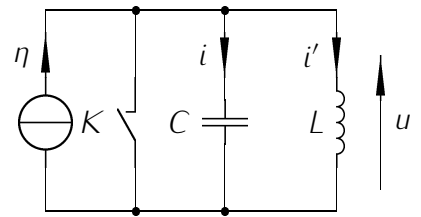
.....

Réponses mélangées

$$\begin{array}{llll}
 \textcircled{c} & [\omega_0] = T^{-1} & \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = 0 & \textcircled{a} \quad \textcircled{b} \quad R\sqrt{\frac{C}{L}} \\
 \frac{E}{L\omega_0} \sin(\omega_0 t) & E \times (1 - \cos(\omega_0 t)) & \textcircled{b} & \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du}{dt} + \frac{1}{LC} u = \frac{E}{LC} \\
 \frac{1}{\sqrt{LC}} & 1,2 \times 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} & & Q \text{ est sans dimension}
 \end{array}$$

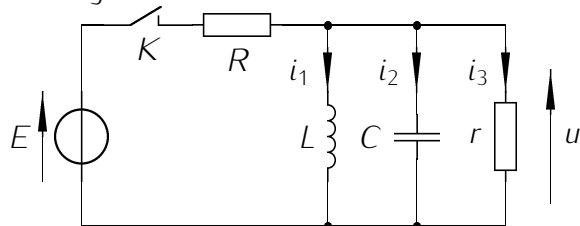
✎ Exercice 1 : Circuit LC parallèle

Dans le circuit représenté ci-dessous, à l'instant $t = 0$, on ouvre l'interrupteur K , le condensateur C étant déchargé. Déterminer les intensités $i(t)$ et $i'(t)$ ainsi que la réponse du circuit $u(t)$.



✎ Exercice 2 : Régime transitoire d'un circuit RLC

À l'instant initial, ($t = 0$), le condensateur C est déchargé et tous les

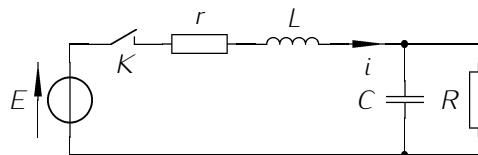


courants sont nuls. On ferme alors l'interrupteur.

1. Déterminer u , i_1 , i_2 et i_3 juste après la fermeture de l'interrupteur puis au bout d'un temps très long.
2. Établir l'équation différentielle vérifiée par $i_3(t)$ sous forme littérale puis numérique sachant que $R = 2,5 \text{ k}\Omega$, $r = 1,25 \text{ k}\Omega$, $C = 1 \text{ }\mu\text{F}$, $L = 20 \text{ mH}$ et $E = 6 \text{ V}$.
3. À quel type de régime a-t-on à faire? (justifier).
4. Déterminer l'expression littérale approchée $u(t)$ et calculer sa valeur numérique maximale.

✎ Exercice 3 : Réponse d'un circuit du 2nd ordre.

Soit le circuit représenté ci-dessous..



À $t = 0$, on ferme K alors que le condensateur est déchargé et les intensités nulles dans toutes les branches.

1. Déterminer la valeur littérale de $i(t)$ et de sa dérivée temporelle à $t = 0^+$.
2. Déterminer la valeur littérale de $i(t)$ au bout d'un temps infini.
3. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ et la mettre sous une forme canonique qui fasse apparaître le facteur de qualité Q .
4. On suppose que $Q = 5$.
5. Tracer l'allure du $i(t)$.

✎ Exercice 4 : Autour du pendule

On considère un pendule simple constitué d'un fil inextensible, de longueur l , de masse négligeable, fixé en O et auquel on a accroché une petite bille de masse m assimilable à un point matériel M . O est fixe dans le référentiel du laboratoire $\mathcal{R}$ galiléen.

- Étude statique : dans un premier temps, on accroche à M un ressort horizontal de masse négligeable, de constante de raideur k et de longueur à vide d_0 .
À l'équilibre dans $\mathcal{R}$, la longueur du ressort prend la valeur d quand le fil s'écarte de l'angle θ_0 par rapport à la verticale tout en restant dans le plan Oyz (figure 1).
En déduire l'expression de m en fonction des autres données.

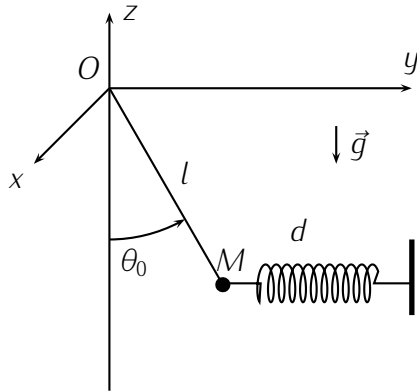


Figure 1

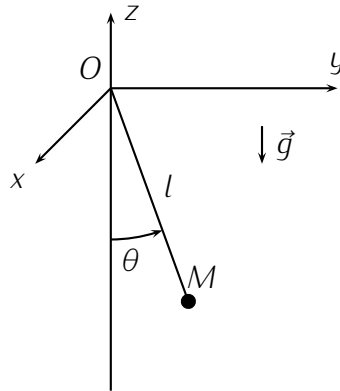


Figure 2

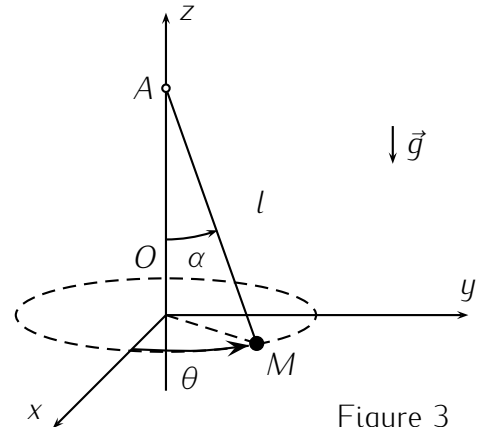


Figure 3

- Première étude dynamique : à l'instant initial, le ressort se détache de M (figure 2.).
 - Établir l'équation différentielle reliant θ à ses dérivées temporelles (on néglige tout frottement).
 - En déduire $\theta(t)$ pour les petites oscillations ($\sin \theta \simeq \theta$ et $\cos \theta \simeq 1 - \frac{\theta^2}{2}$).
 - Exprimer la tension du fil en fonction du temps toujours dans le cas des petites oscillations.
- Autre type de mouvement : le fil est accroché en A et le point matériel M , tourne maintenant dans le plan xOy avec une vitesse angulaire constante $\omega = \dot{\theta}$ autour de l'axe OA (figure 3) $\alpha = Cte$ étant l'angle que forme AM avec la verticale.
Calculer la tension du fil T puis l'angle α en fonction de m, g, l et ω , montrer que ω doit respecter une certaine condition.

Exercice 5 : Ressort vertical.

Retrouver l'équation différentielle qui décrit le mouvement d'une masse suspendue à un ressort vertical de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k .

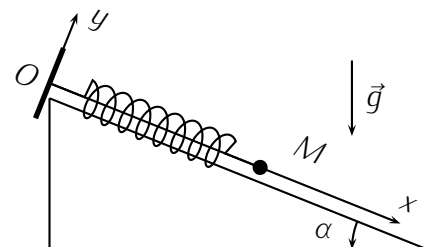
Exercice 6 : Masse liée à un ressort sur un plan incliné

On considère un ressort de longueur à vide l_0 et de raideur k , dont les extrémités sont reliées à un point fixe O et un point matériel M de masse m .

On néglige tout frottement.

Soit un axe Ox sur le plan incliné (voir figure).

- Déterminer l_e , la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de l_0, m, g, k et α .
- À partir de la position d'équilibre M est déplacé d'une distance $d < l_e$ comptée algébriquement sur Ox et lâché sans vitesse initiale à $t = 0$.
Établir, pour $t \geq 0$, l'équation horaire du mouvement de M en fonction de d, k, m et l_e .



OSCILLATEURS FORCÉS

Qu'est-ce qu'un signal
sinusoïdal ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Soit

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

écrire le signal complexe qui
lui est associé. Que vaut son
amplitude complexe ?

OSCILLATEURS FORCÉS

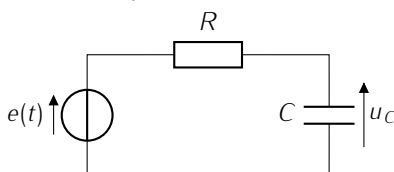
Dériver un signal complexe
revient à ...

OSCILLATEURS FORCÉS

Intégrer un signal complexe
revient à ...

OSCILLATEURS FORCÉS

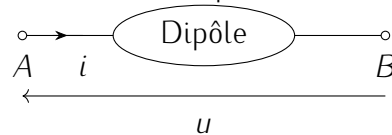
On considère le circuit RC
série alimenté par une
tension sinusoïdale
 $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ en régime
permanent.



La tension u_C est solution de
 $\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$, trouver
l'expression de son amplitude
complexe $\underline{U}_C$.

OSCILLATEURS FORCÉS

Définir l'impédance complexe
d'un dipôle.



OSCILLATEURS FORCÉS

Exprimer l'impédance d'une
résistance.

OSCILLATEURS FORCÉS

Exprimer l'impédance d'une
bobine.

OSCILLATEURS FORCÉS

Exprimer l'impédance d'un
condensateur.

... le multiplier par $j\omega$

À $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$ on associe

$\underline{x} = X_m \exp(j(\omega t + \varphi))$. Son amplitude complexe est

$$\underline{X}_m = X_m \exp(j\varphi)$$

Un signal sinusoïdal s'écrit :

$$x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$$

L'impédance est $\underline{Z} = \frac{\underline{u}}{\underline{i}}$

On transpose l'équation différentielle dans les complexes :

$$\frac{d\underline{u}_C}{dt} + \frac{\underline{u}_C}{\tau} = \frac{e}{\tau}$$

donc

$$j\omega \underline{u}_C \exp(j\omega t) + \frac{1}{\tau} \underline{u}_C \exp(j\omega t) = \frac{E_0 \exp(j\omega t)}{\tau}$$

soit

$$\underline{u}_C = \frac{E_0}{1 + j\omega\tau}$$

... le diviser par $j\omega$

Si le condensateur est parfait et en convention récepteur,

$$i(t) = C \frac{du(t)}{dt} \Rightarrow u(t) = \frac{1}{C} \int i(t) dt \Rightarrow \underline{i(t)} = jC\omega \underline{u(t)} \\ \text{et } \underline{u(t)} = \underline{Z}_C \underline{i(t)} \text{ en posant}$$

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}$$

Il y a donc un déphasage $-\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature retard sur le courant (en convention récepteur).

Si la bobine est parfaite et en convention récepteur,

$$u(t) = L \frac{di(t)}{dt} \Rightarrow \underline{u(t)} = L \frac{d\underline{i(t)}}{dt} = jL\omega \underline{i(t)} = \underline{Z}_L \underline{i(t)} \text{ soit}$$

$$\underline{Z}_L = jL\omega = L\omega e^{j\frac{\pi}{2}}$$

il y a donc un déphasage de $+\frac{\pi}{2}$ de $u(t)$ par rapport à $i(t)$, on dit que la tension est en quadrature avance sur le courant (en convention récepteur).

D'après la loi d'Ohm :

$$u(t) = Ri(t) \text{ donc}$$

$$\underline{u(t)} = R \underline{i(t)} = \underline{Z}_R \underline{i(t)} \Rightarrow \underline{Z}_R = R$$

L'impédance étant réelle, il n'y a pas de déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$, on dit qu'ils sont en phase :

$$\arg(\underline{u(t)}) = \arg(\underline{i(t)}) + \arg(R) = \arg(\underline{i(t)})$$

OSCILLATEURS FORCÉS

Comment se comporte une bobine en haute fréquence ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Comment se comporte une bobine en basse fréquence ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Comment se comporte un condensateur en basse fréquence ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Comment se comporte un condensateur en haute fréquence ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Que deviennent les lois et théorèmes de l'électrocinétique en régime sinusoïdal forcé ?

OSCILLATEURS FORCÉS

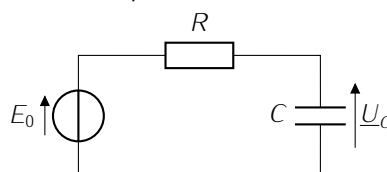
Quelle est l'impédance équivalente à n impédances en série ?

OSCILLATEURS FORCÉS

Quelle est l'impédance équivalente à n impédances en dérivation ?

OSCILLATEURS FORCÉS

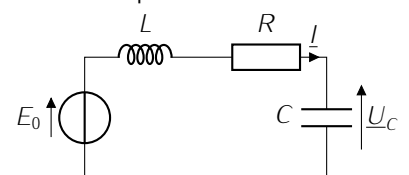
On considère le circuit RC série alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ en régime permanent.



Retrouver l'expression de $\underline{U}_C$ en appliquant le théorème des diviseurs de tension.

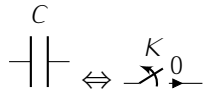
OSCILLATEURS FORCÉS

On considère le circuit RLC série alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ en régime permanent.

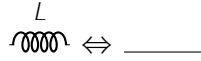


Retrouver l'expression de l'amplitude complexe du courant $\underline{I}$.

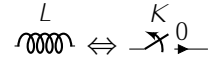
Si $\omega \rightarrow 0$, alors
 $|\underline{Z}_C| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow \infty$: en basses
 fréquences, le condensateur
 se comporte comme un
 interrupteur ouvert :



Si $\omega \rightarrow 0$, alors
 $|\underline{Z}_L| = L\omega \rightarrow 0$: en hautes
 fréquences, la bobine se
 comporte comme un fil :



Si $\omega \rightarrow \infty$, alors
 $|\underline{Z}_L| = L\omega \rightarrow \infty$ et donc
 $i \rightarrow 0$: en hautes fréquences,
 la bobine se comporte comme
 un interrupteur ouvert :



$$\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 + \dots + \underline{Z}_n = \sum_{k=1}^n \underline{Z}_k$$

En régime sinusoïdal forcé, on
 peut écrire les lois et
 théorèmes de
 l'électrocinétique à l'aide des
 amplitudes complexes.

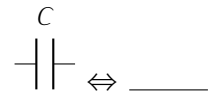
Loi des nœuds :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{I}_k = 0$$

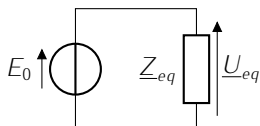
Loi des mailles :

$$\sum_{k=1}^n \varepsilon_k \underline{U}_k = 0$$

Si $\omega \rightarrow \infty$, alors
 $|\underline{Z}_C| = \frac{1}{C\omega} \rightarrow 0$: en hautes
 fréquences, le condensateur
 se comporte comme un fil :



On commence par simplifier
 le circuit



Où $\underline{Z}_{eq} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$ et
 donc $\underline{U}_{eq} = E_0 = \underline{Z}_{eq} \underline{I}$, soit

$$\underline{I} = \frac{\frac{E_0}{R}}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

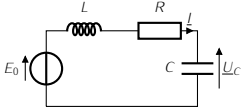
$$\underline{u}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R} E_0 \text{ soit}$$

$$\underline{u}_C = \frac{E_0}{1 + j\omega RC}$$

$$\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} + \dots + \frac{1}{\underline{Z}_n} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{\underline{Z}_k}$$

OSCILLATEURS FORCÉS

Soit le circuit suivant en RSF.



On a

$$\underline{I} = \frac{\frac{E_0}{R}}{1 + j\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{jRC\omega}}$$

que l'on réécrit

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

Identifier I_0 , ω_0 et Q .

OSCILLATEURS FORCÉS

Exprimer le module et l'argument de

$$\underline{I} = \frac{I_0}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

OSCILLATEURS FORCÉS

Tracer l'allure de l'amplitude du courant $|\underline{I}|$ en fonction de ω .

$$|\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

OSCILLATEURS FORCÉS

Tracer l'allure de la phase à l'origine du courant dans un circuit RLC série en RSF

$$\varphi = -\arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)$$

OSCILLATEURS FORCÉS

Définir le phénomène de résonance.

OSCILLATEURS FORCÉS

Définir la bande passante à -3 dB.

OSCILLATEURS FORCÉS

On rappelle que l'amplitude du courant circulant dans un circuit RLC série en RSF est

$$|\underline{I}| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

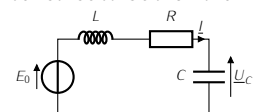
Exprimer la largeur de la bande passante.

OSCILLATEURS FORCÉS

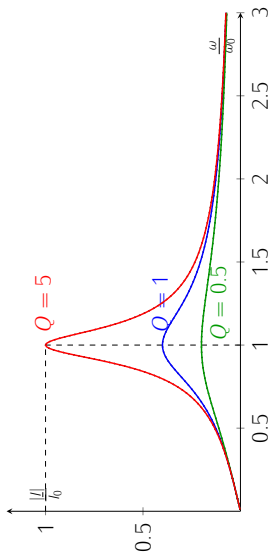
Définir l'acuité d'une résonance.

OSCILLATEURS FORCÉS

Soit le circuit suivant en RSF.



Exprimer l'amplitude complexe de la tension u_c aux bornes du condensateur.



$$|I| = \frac{I_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

$$\arg(I) = -\arctan \left(Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right)$$

$$I_0 = \frac{E_0}{R} \text{ et}$$

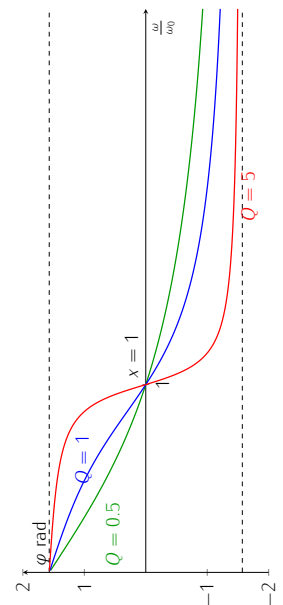
$$\begin{cases} \frac{Q}{\omega_0} = \frac{R}{L} \\ Q\omega_0 = \frac{1}{RC} \end{cases}$$

Soit

$$\begin{cases} Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \end{cases}$$

La bande passante à -3dB est l'intervalle dans lequel le signal est supérieur à sa valeur maximale divisée par $\sqrt{2}$. Par exemple, pour la résonance en courant dans un circuit RLC, il s'agit de la bande de pulsation telle que $|I| \geq \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$

La résonance, désigne le phénomène par lequel un système oscille avec une amplitude particulièrement grande lorsqu'il est soumis à une excitation périodique dont la fréquence est égale ou très proche de sa fréquence propre.



Le théorème du diviseur de tension donne directement

$$\underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R + \underline{Z}_L} E_0$$

Soit

$$\underline{U}_C = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

L'acuité d'une résonance désigne la finesse du pic de résonance dans un système oscillant. Si $\Delta\omega \ll \omega_0$ on parle de résonance aiguë, si $\Delta\omega \geq \omega_0$ on parle de résonance floue.

On résout

$$|I| = \frac{I_0}{\sqrt{2}}$$

ce qui conduit à résoudre deux équations du second degré :

$$Q\omega^2 \pm \omega_0\omega - Q\omega_0^2 = 0$$

Il y a 2 fois 2 racines réelles, et parmi ces quatre solutions seules deux sont positives.

Ainsi :

$$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

OSCILLATEURS FORCÉS

L'amplitude complexe de la tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC série en RSF est donné par

$$\underline{U}_C = \frac{E_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

. Montrer qu'il y a résonance à une pulsation ω_r à condition que $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

OSCILLATEURS FORCÉS

L'amplitude de la tension aux bornes du condensateur d'un circuit RLC série en RSF est

$$|\underline{U}_C| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

Tracer son évolution en fonction de ω pour différentes valeurs du facteurs de qualité.

OSCILLATEURS FORCÉS

L'amplitude complexe de la tension aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC série en RSF est donné par

$$\underline{U}_C = \frac{E_0}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

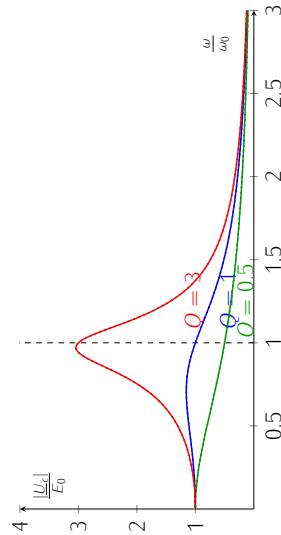
Calculer $\arg(\underline{U}_C)$

OSCILLATEURS FORCÉS

On donne $\arg(\underline{U}_C) = \arctan\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{\omega}{Q\omega_0}}\right) + \frac{\pi}{2}$ tracer son allure en fonction de ω .

On a $\arg(\underline{U}_c) = \arg(E_0) - \arg\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$
 Il faut faire attention, la partie imaginaire de ce dernier terme change de signe selon la valeur de ω , l'astuce consiste à multiplier par $1 = -jj$, et on trouve :

$$\arctan\left(\frac{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{\omega}{Q\omega_0}}\right) + \frac{\pi}{2}$$

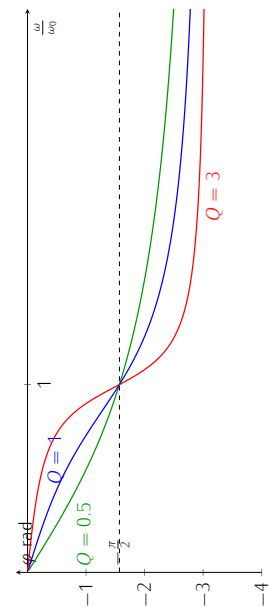


On calcule le module de $\underline{U}_c$:
 $|\underline{U}_c| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$ Il est maximal si le terme sous la racine est minimale. On étudie ses variations, sa dérivée vaut :

$$2\left(-2\frac{\omega}{\omega_0^2}\right)\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right) + 2\frac{\omega}{Q^2\omega_0^2}$$

et on trouve que si $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il y a résonance à la pulsation

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$



OS_2 – Oscillateurs forcés

Conseils pour ce TD

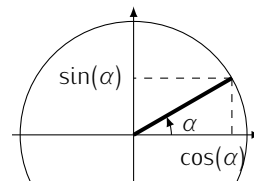
- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- Attention à bien respecter les notations : une grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, d'amplitude X_m peut être représentée par l'intermédiaire de calcul $\underline{x(t)} = \underline{X_m} \cdot e^{j\omega t} = X_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ d'amplitude complexe $\underline{X_m} = X_m \cdot e^{j\varphi}$. Il ne faut pas confondre ces différentes expressions.
On a par exemple $x(t) = \text{Re}(\underline{x(t)}) \neq |\underline{x(t)}|$, $X_m = |\underline{X_m}|$ et $\varphi = \arg(\underline{X_m})$.
- On peut utiliser la loi d'Ohm généralisée directement sur les amplitudes complexes $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \iff \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$.
- Revoir si nécessaire les lois d'associations de résistors : chapitre EC_1 .

Autour des fonctions trigonométriques

Entraînement 10.1 — Cercle trigonométrique.



Sur le cercle trigonométrique ci-contre, $\cos(\alpha)$ se lit sur l'axe des abscisses et $\sin(\alpha)$ se lit sur l'axe des ordonnées. Exprimer les fonctions suivantes en fonction de $\cos(\alpha)$ et $\sin(\alpha)$.



- | | | | |
|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\sin(\alpha + \pi)$ | <input type="text"/> | c) $\sin(\alpha + \pi/2)$ | <input type="text"/> |
| b) $\cos(\alpha + \pi/2)$ | <input type="text"/> | d) $\sin(\pi/2 - \alpha)$ | <input type="text"/> |

Entraînement 10.2 — Dérivée de signaux.



Pour chaque signal ci-dessous, calculer sa dérivée par rapport à t .

- | | | | |
|--------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\sin(2t)$ | <input type="text"/> | c) $\cos(t) \times \sin(t)$... | <input type="text"/> |
| b) $\cos^2(t + 4)$ | <input type="text"/> | | |

Entraînement 10.3 — Transformer des sommes de signaux en produits.



On rappelle les formules trigonométriques :

$\cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b)$	$\sin(a + b) = \sin(a) \cos(b) + \cos(a) \sin(b)$
$\cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b)$	$\sin(a - b) = \sin(a) \cos(b) - \cos(a) \sin(b)$

Mettre les signaux suivants sous la forme $C \cos(\Omega t) \cos(\omega t)$ ou $C \sin(\Omega t) \sin(\omega t)$ (où les constantes C , Ω et ω s'exprimeront en fonction de A , ω_1 et ω_2).

a) $A \cos(\omega_1 t) + A \cos(\omega_2 t)$

b) $A \cos(\omega_1 t) - A \cos(\omega_2 t)$



Entraînement 10.4 — Formules d'addition.



Mettre le signal $A \sin(\omega t + \varphi)$ sous la forme $B \cos(\omega t) + C \sin(\omega t)$, où B et C sont des constantes à exprimer en fonction de A et φ .

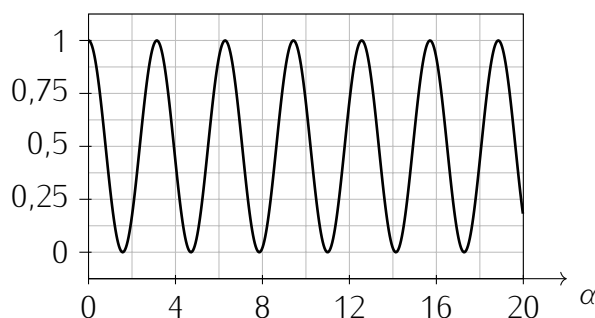
.....



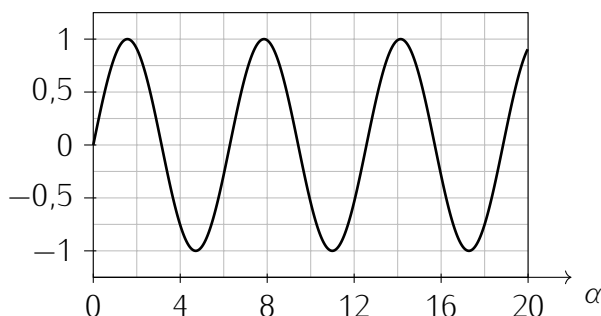
Entraînement 10.5 — Représentations graphiques.



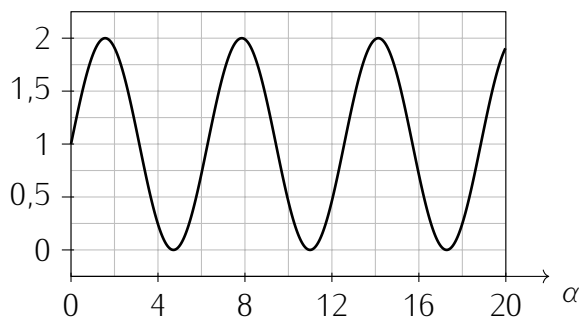
courbe 1



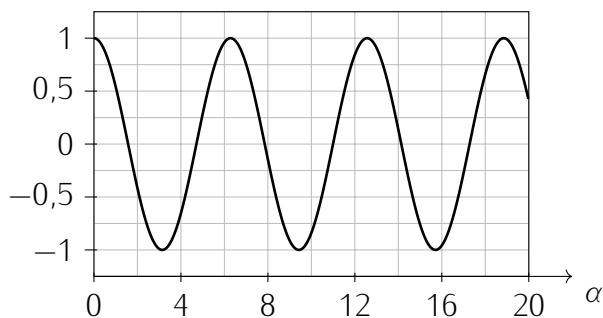
courbe 2



courbe 3



courbe 4



Pour les quatre graphiques ci-dessus, α est exprimé en radians.

Associer chaque fonction à sa courbe représentative.

- a) $\sin(\alpha)$ c) $1 + \sin(\alpha)$
- b) $\cos(\alpha)$ d) $\cos^2(\alpha)$

Entraînement 10.6 — Formules trigonométriques.



Le signal $\cos(\omega t) + \sin(\omega t)$ peut s'écrire sous la forme :

- (a) $\cos^2(\omega t + \pi/4)$ (b) $2 \cos(\omega t + \pi/4)$ (c) $\sqrt{2} \sin(\omega t + \pi/4)$

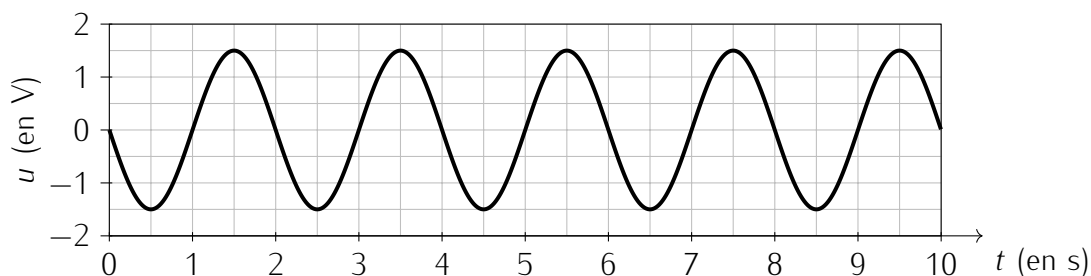
.....

Étude graphique

Entraînement 10.7 — Paramètres d'un signal sinusoïdal.



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition d'une tension sinusoïdale $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t + \varphi\right)$ et obtenez l'oscillogramme ci-dessous.



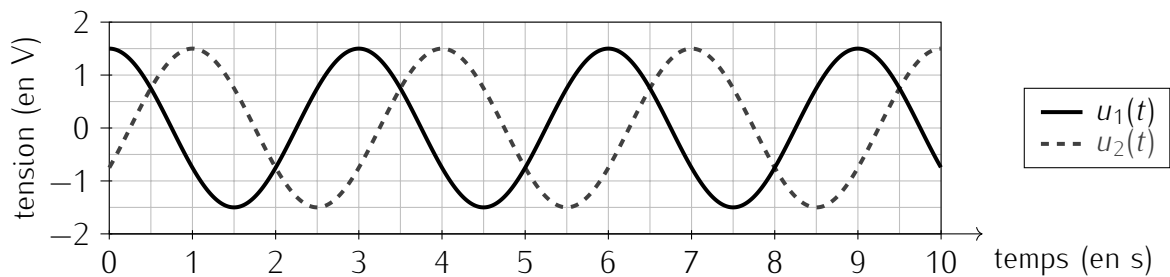
Par lecture graphique ou par le calcul, déterminer :

- a) l'amplitude U_0 d) la fréquence f
- b) la phase à l'origine φ e) la pulsation ω
- c) la période T

Entraînement 10.8 — Différence de phase.



La figure ci-dessous donne les représentations graphiques de deux signaux : le signal $u_1(t) = U_0 \cos(\omega t)$ et le signal $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$, où on a $\omega = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



a) Le signal $u_2(t)$ est-il en avance ou en retard sur $u_1(t)$?

b) En déduire le signe de φ

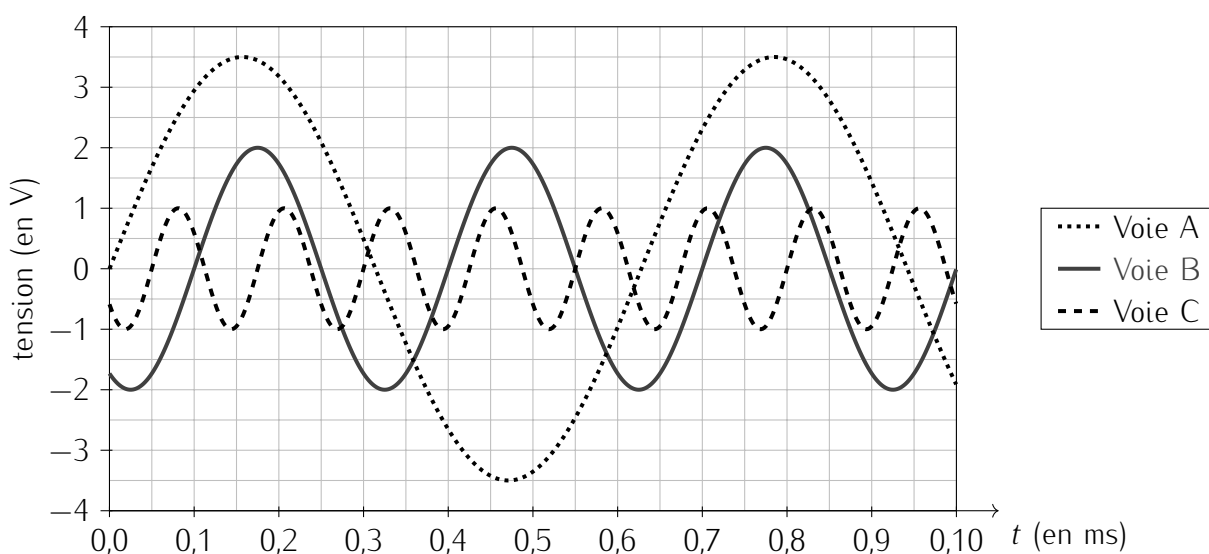
c) Déterminer graphiquement φ

Entraînement 10.9 — Qui est qui ?



En travaux pratiques, vous faites l'acquisition de trois signaux périodiques : $u_1(t)$, $u_2(t)$ et $u_3(t)$. Malheureusement, vous ne vous souvenez pas quelle voie d'acquisition vous avez utilisée pour chaque signal !

Vous savez que la tension $u_1(t)$ a pour période $300\mu\text{s}$, que la tension $u_2(t)$ a pour fréquence $8,0\text{ kHz}$ et que la tension $u_3(t)$ a pour pulsation $1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.



Attribuer chacun des graphes au signal qui lui correspond.

a) Voie A

b) Voie B

c) Voie C

Valeur moyenne et valeur efficace

La valeur moyenne U_{moy} et la valeur efficace U_{eff} d'un signal $u(t)$ périodique de période T sont définies par les formules :

$$U_{\text{moy}} = \frac{1}{T} \int_0^T u(t) dt \quad \text{et} \quad U_{\text{eff}} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T u(t)^2 dt}.$$

 Entraînement 10.10 — Signal sinusoïdal.



On considère le signal sinusoïdal $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T}t\right)$.

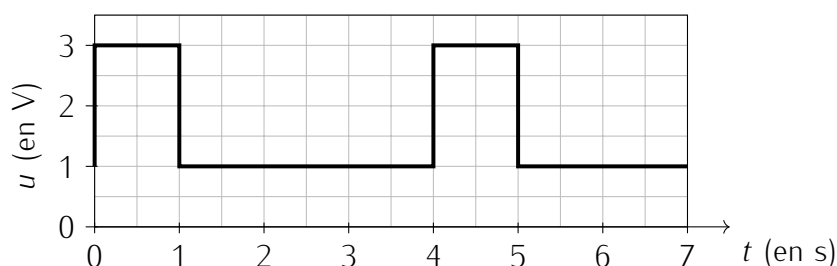
a) Calculer la valeur moyenne de $u(t)$

b) Calculer la valeur efficace de $u(t)$

Entraînement 10.11 — Un signal carré.



On considère le signal périodique carré dissymétrique $u(t)$ représenté ci-dessous.



Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$..

b) la valeur efficace de $u(t)$...

Entraînement 10.12 — Un signal carré, sans son dessin.



On considère le signal périodique carré défini par $u(t) = \begin{cases} U_0 & \text{si } 0 < t \leq T/2 \\ 0 & \text{si } T/2 < t \leq T. \end{cases}$

Calculer :

a) la valeur moyenne de $u(t)$..

b) la valeur efficace de $u(t)$...

Nombres complexes et association de dipôles

Entraînement 10.13 — Un entraînement fondamental.



Un nombre complexe peut se mettre sous les formes suivantes :

- $\underline{Z} = a + jb$ avec a sa partie réelle et b sa partie imaginaire ;
- $\underline{Z} = Z_0 \exp(j\varphi) = Z_0(\cos(\varphi) + j\sin(\varphi))$ avec $Z_0 \geq 0$ son module et $\varphi \in \mathbb{R}$ un argument.

a) Exprimer Z_0 en fonction de a et b

b) On suppose $a \neq 0$. Exprimer $\tan(\varphi)$ en fonction de a et b . ..

On suppose que $\varphi \in]-\pi, \pi]$.

c) Si $a \geq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....

d) Si $a > 0$ et $b \leq 0$, que peut-on dire de φ ?

(a) $\varphi \in [0, \pi]$

(c) $\varphi \in [\pi/2, \pi]$

(e) $\varphi \in [-\pi/2, \pi/2]$

(b) $\varphi \in [0, \pi/2]$

(d) $\varphi \in]-\pi, 0]$

(f) $\varphi \in]-\pi/2, 0]$

.....



Entraînement 10.14 — Impédances complexes des composants de base.



Les impédances complexes d'un résistor de résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C auxquels on impose une pulsation ω sont respectivement :

$$\underline{Z}_R = R, \quad \underline{Z}_L = jL\omega \quad \text{et} \quad \underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}.$$

Calculer le module Z_0 et l'argument $\varphi \in]-\pi, \pi]$ de chacune de ces impédances.

- | | | |
|---|---|---|
| a) Z_0 de $\underline{Z}_R$.. <input type="text"/> | c) Z_0 de $\underline{Z}_L$.. <input type="text"/> | e) Z_0 de $\underline{Z}_C$.. <input type="text"/> |
| b) φ de $\underline{Z}_R$.. <input type="text"/> | d) φ de $\underline{Z}_L$.. <input type="text"/> | f) φ de $\underline{Z}_C$.. <input type="text"/> |

Entraînement 10.15 — Associations de dipôles.

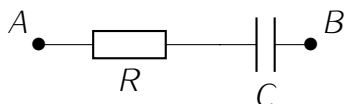


On rappelle la règle pour déterminer l'impédance complexe équivalente à celle de dipôles associés :

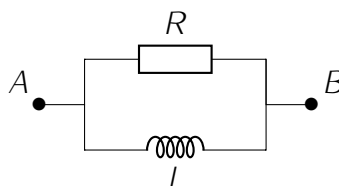
- si les dipôles sont en série : $\underline{Z}_{eq} = \sum_i \underline{Z}_i$
- si les dipôles sont en parallèle : $\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{\sum_i 1/\underline{Z}_i}$.

À l'aide de ces règles, déterminer l'impédance complexe $\underline{Z}_{AB}$ des associations de dipôles suivants :

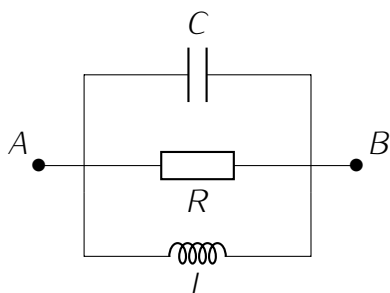
a)



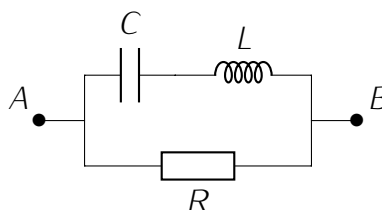
b)



c)



d)



a) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

b) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

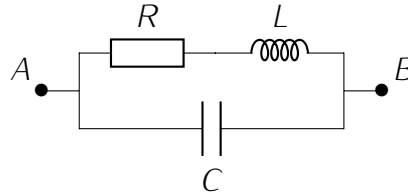
c) $\underline{Z}_{AB} = \dots\dots\dots$

d) $Z_{AB} = \dots\dots\dots$

Entraînement 10.16 — À la recherche de la bonne impédance.



Un groupe d'étudiants doit trouver l'impédance Z_{AB} du dipôle AB ci-dessous :



Quelle proposition correspond à l'impédance du dipôle AB ?

- (a) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$
 (b) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 + jRC\omega}$
 (c) $Z_{AB} = \frac{R + jL\omega}{1 + LC\omega^2 - jRC\omega}$

.....

Signaux périodiques

Entraînement 10.17 — Analyse du signal provenant d'un GBF.

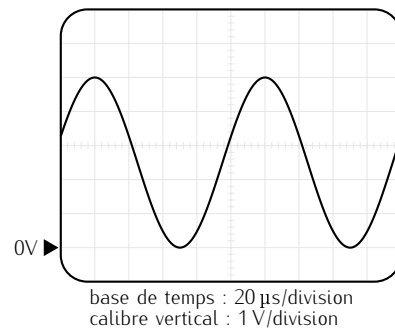


En TP, un élève observe à l'oscilloscope la tension délivrée par un générateur de basses fréquences (GBF).

Aider cet élève à analyser le signal de tension mesuré ci-contre en déterminant sa fréquence f_0 et son amplitude U_0 .

a) f_0

b) U_0



Entraînement 10.18 — Expression d'une tension.



Nous disposons d'une tension sinusoïdale $u(t)$ de période $T_0 = 1$ ms, d'amplitude $U_0 = 2$ V et de phase à l'origine $\varphi = 0$ rad.

Parmi les propositions ci-dessous laquelle correspond à l'expression littérale de cette tension $u(t)$?

- (a) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$
 (c) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{t}{T_0}\right)$
 (b) $u(t) = \frac{U_0}{2} \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$
 (d) $u(t) = U_0 \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t\right)$

.....

 Entraînement 10.19 — Modulation d'amplitude.



On considère un signal modulé, de la forme

$$s(t) = S_0 \cos(2\pi f_p t) \times \left(1 + m \cos(2\pi f_0 t)\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 0 < m < 1 \\ f_p > f_0. \end{cases}$$

a) On rappelle que

$$\begin{cases} \cos(a + b) = \cos(a) \cos(b) - \sin(a) \sin(b) \\ \cos(a - b) = \cos(a) \cos(b) + \sin(a) \sin(b). \end{cases}$$

En calculant $\cos(a + b) + \cos(a - b)$, trouver une formule pour $\cos(a) \cos(b)$.

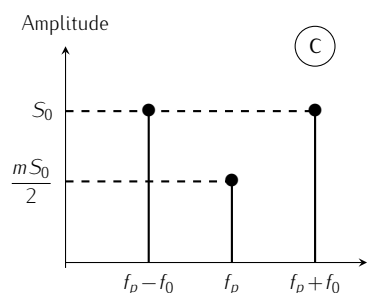
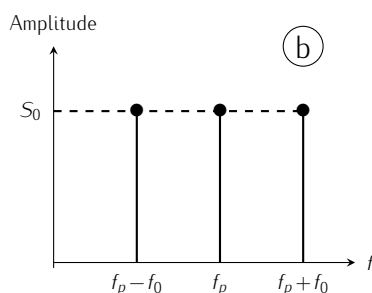
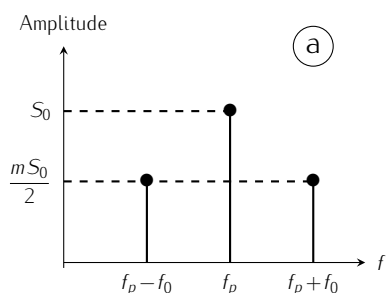
.....

b) Développer $s(t)$ et faire apparaître des sommes de cosinus.

.....

On constate que le signal $s(t)$ peut s'écrire comme la somme de trois signaux sinusoïdaux d'amplitudes et de fréquences spécifiques. On représente les différentes amplitudes des composantes de $s(t)$ en fonction de leur fréquence. Cette représentation est appelée spectre en amplitude de $s(t)$.

Le but de cet entraînement est de déterminer lequel des spectres ci-dessous ((a), (b) ou (c)) est celui du signal $s(t)$.



c) Donner l'amplitude de la composante de fréquence f_p de $s(t)$

d) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p + f_0$ de $s(t)$

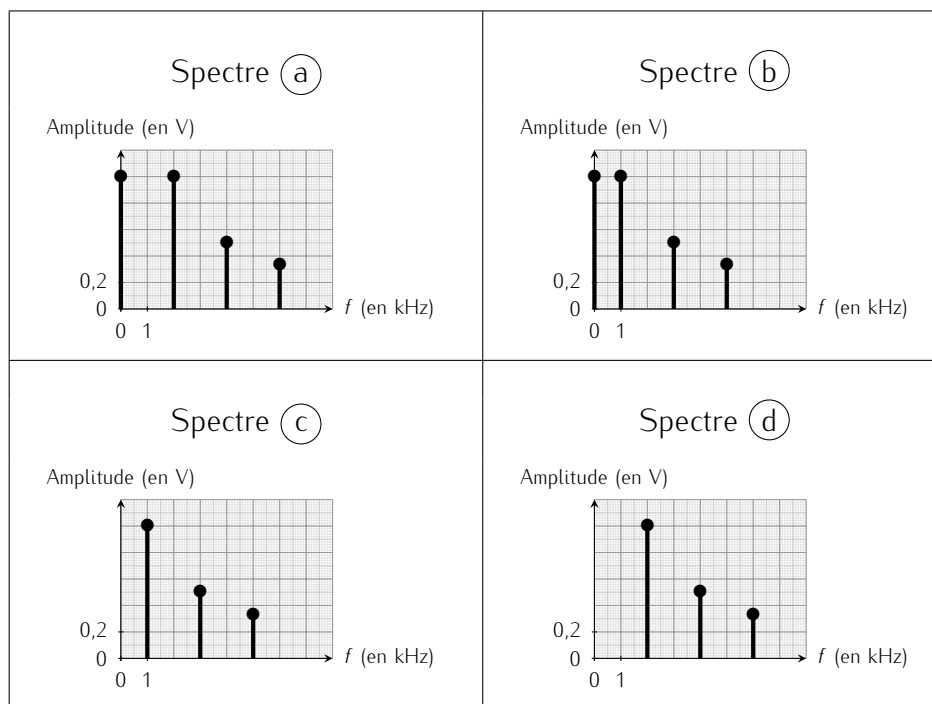
e) Donner l'amplitude de la composante de fréquence $f_p - f_0$ de $s(t)$

f) Déterminer le spectre ((a), (b) ou (c)) correspondant à $s(t)$

Entraînement 10.20 — Pêle-mêle.



Un étudiant dispose de quatre spectres en amplitude et de quatre signaux. Malheureusement, l'ensemble est mélangé. Pouvez-vous l'aider à associer le bon signal au bon spectre ((a), (b), (c) ou (d)) ?



Signal n° 1 $A_1 \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \cos(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \cos(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_1 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 2 $A_2 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(2\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(3\omega_0 t) \right)$ avec $A_2 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 2 \text{ kHz}$
Signal n° 3 $A_3 \left(\cos((\omega_0 - \omega_1)t) + \frac{1}{2} \cos((\omega_0 + \omega_1)t) + \frac{1}{3} \cos((\omega_0 + 3\omega_1)t) \right)$ avec $A_3 = 1 \text{ V}$, $f_0 = 3 \text{ kHz}$ et $f_1 = 1 \text{ kHz}$	Signal n° 4 $A_4 \left(1 + \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{2} \sin(3\omega_0 t) + \frac{1}{3} \sin(5\omega_0 t) \right)$ avec $A_4 = 1 \text{ V}$ et $f_0 = 1 \text{ kHz}$

- | | |
|--|--|
| a) Spectre du signal n° 1 ... <input type="text"/> | c) Spectre du signal n° 3 ... <input type="text"/> |
| b) Spectre du signal n° 2 ... <input type="text"/> | d) Spectre du signal n° 4 ... <input type="text"/> |

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 R + \frac{1}{jC\omega} & u_3(t) & \textcircled{b} & \textcircled{a} & \frac{RjL\omega}{R + jL\omega} & \textcircled{d} & R & 0 \\
 L\omega & \text{Courbe 3} & \textcircled{e} & \textcircled{f} & \cos(\alpha) & b/a & \frac{1}{C\omega} & \sqrt{3} \text{ V} \\
 & & & & S_0 \cos(2\pi f_p t) & & & \\
 1,5 \text{ V} & mS_0/2 & 2 \text{ s} & S_0 & + \frac{mS_0}{2} \left(\cos(2\pi(f_p + f_0)t) \right. & & & \\
 & & & & \left. + \cos(2\pi(f_p - f_0)t) \right) & & & \\
 A \sin(\varphi) \cos(\omega t) + A \cos(\varphi) \sin(\omega t) & \frac{U_0}{2} & -\sin(\alpha) & \frac{\pi}{2} \text{ rad} & & & & \\
 u_1(t) & u_2(t) & \pi/2 & 0,5 \text{ Hz} & \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} & \textcircled{c} & & \\
 -2 \sin(t + 4) \cos(t + 4) = -\sin(2t + 8) & \cos^2(t) - \sin^2(t) = \cos(2t) & & & & & 10 \text{ kHz} & \\
 -\pi/2 & \textcircled{c} & -\sin(\alpha) & \frac{U_0}{\sqrt{2}} & \sqrt{a^2 + b^2} & \textcircled{d} & \textcircled{a} & \\
 \textcircled{a} & \frac{1}{2} \cos(a + b) + \frac{1}{2} \cos(a - b) & 2 \cos(2t) & \frac{R(1 - LC\omega^2)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} & & & & \\
 \frac{U_0}{\sqrt{2}} & \text{En retard} & 2A \sin\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{2}t\right) \sin\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) & 2,5 \text{ V} & 1,5 \text{ V} & & & \\
 \cos(\alpha) & -\frac{2\pi}{3} \text{ rad} & 2A \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) & 0 & \varphi < 0 & & & \\
 \text{Courbe 1} & \text{Courbe 4} & \text{Courbe 2} & mS_0/2 & \frac{RjL\omega}{R + jL\omega - RLC\omega^2} & & &
 \end{array}$$

RÉGIME SINUSOÏDAL FORCÉ

Conseils pour ce TD :

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- Attention à bien respecter les notations : une grandeur sinusoïdale $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$, d'amplitude X_m peut être représentée par l'intermédiaire de calcul $\underline{x(t)} = \underline{X_m} \cdot e^{j\omega t} = X_m \cdot e^{j(\omega t + \varphi)}$ d'amplitude complexe $\underline{X_m} = X_m \cdot e^{j\varphi}$. Il ne faut pas confondre ces différentes expressions. On a par exemple $x(t) = \Re(\underline{x(t)}) \neq |\underline{x(t)}|$, $X_m = |\underline{X_m}|$ et $\varphi = \arg(\underline{X_m})$.
- On peut utiliser la loi d'Ohm généralisée directement sur les amplitudes complexes $\underline{U} = \underline{Z} \cdot \underline{I} \iff \underline{I} = \underline{Y} \cdot \underline{U}$.
- Revoir si nécessaire les lois d'associations de résistors : chapitre EC₁.

Exercice 1 : Résonance en tension

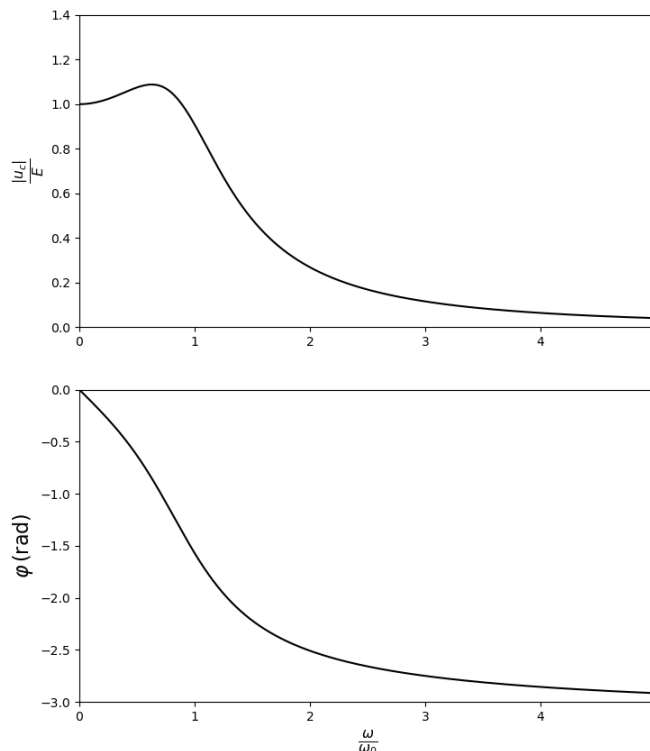
On considère un circuit RLC série alimenté par une tension $e(t) = E \cos(\omega t)$.

1. Établir l'expression de l'amplitude complexe, $\underline{U_c}$, de la tension aux bornes du condensateur.
2. On écrit $\underline{U_c}$ sous la forme :

$$\underline{U_c} = \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

Exprimer ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

3. Montrer qu'il y a résonance à une pulsation ω_r à condition que $Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donner l'expression de ω_r en fonction de ω_0 et Q .
4. On représente ci-dessous l'allure de $|\underline{U_c}|$ et de $\varphi = \arg(\underline{U_c})$ en fonction de $\frac{\omega}{\omega_0}$.



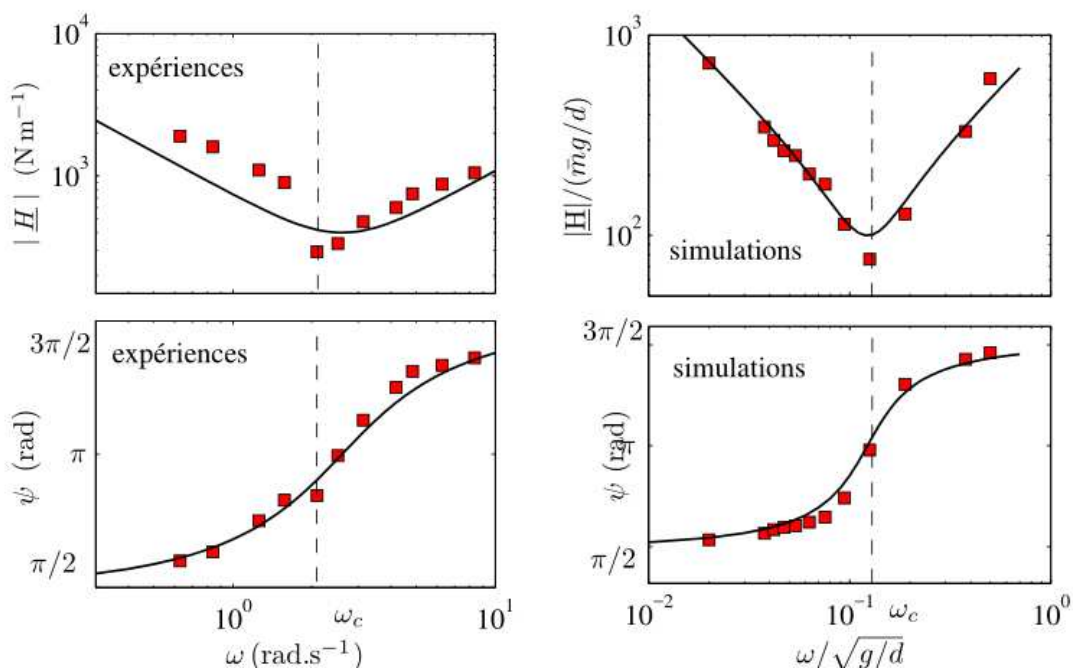
Évaluer la valeur du facteur de qualité Q .

Exercice 2 : Bulldozer

On considère un bulldozer muni d'une lame inclinée raclant un lit de sable en avançant selon un axe horizontal à vitesse constante. On note y l'altitude de la lame et on impose à celle-ci un mouvement sinusoïdal : $y(t) = y_0 \cos(\omega t)$. De plus, une jauge de contrainte mesure la composante verticale de la force exercée par le tas de sable sur la lame. On peut voir ci-dessous, un schéma de principe, une photo de l'expérience et un résultat de simulation numérique.



En régime permanent cette force est sinusoïdale et s'exprime sous la forme $h(t) = H \cos(\omega t + \varphi)$. On représente ci-dessous l'allure de H et de φ en fonction de la pulsation ω (pour les expériences et les simulations).



1. Soit $\underline{H}$ l'amplitude complexe de la force h . Compte tenu de l'allure des courbes, quelle expression pour $\underline{H}$ convient :

(a) $\underline{H} = a + b(j\omega)$

(b) $\underline{H} = a + \frac{b}{j\omega} + \frac{c}{-\omega^2}$

(c) $\underline{H} = a + \frac{b}{j\omega} + c(j\omega)$

(d) $\underline{H} = a + b(j\omega) + c(-\omega^2)$

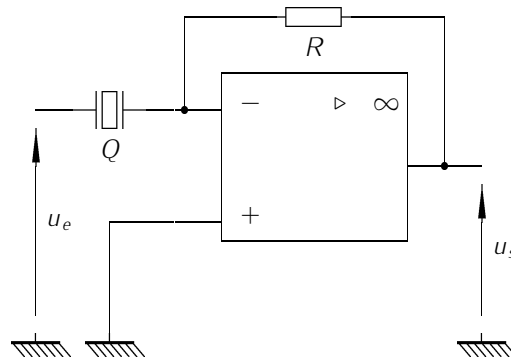
2. De quels signes sont les coefficients a , b et c ?
3. Sachant que la masse de sable, M , poussé par le bulldozer est proportionnelle à $\int y dt$: $M = \alpha \int_0^t y(t') dt'$, donner l'expression de h en fonction de y .

Exercice 3 : Quartz

Le quartz est une forme particulière de cristal de silice. Il présente des propriétés physiques très intéressantes : la piézo-électricité. Quand on comprime un morceau de quartz dans une direction particulière, une tension apparaît aux bornes du cristal (c'est l'effet piézo-électrique).

Réciproquement, quand on applique une tension aux bornes d'un quartz, ce dernier se déforme proportionnellement à la tension appliquée (c'est l'effet piézo-électrique inverse). Ainsi, le quartz est très intéressant pour l'électronique car on parvient à réaliser des circuits oscillants, à base de résonateur à quartz, très stables dans le temps.

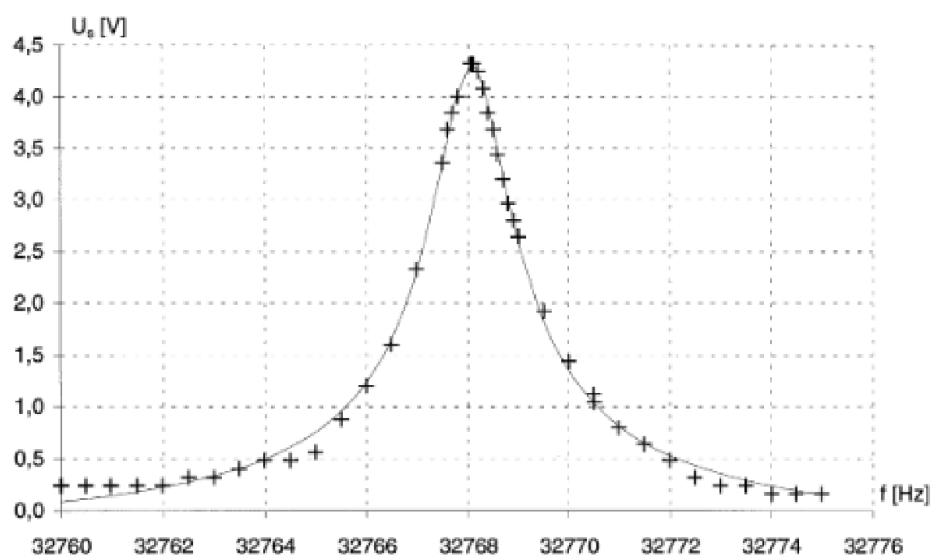
Afin d'étudier un résonateur à quartz on peut utiliser le circuit ci-dessous :



Où $u_e = E \cos(\omega t)$. Ce circuit est appelé « convertisseur courant-tension », la tension u_s est proportionnelle à l'intensité du courant circulant à travers le quartz.

Au voisinage de sa fréquence de résonance, le quartz peut-être modélisé par un circuit RLC série doté d'un facteur de qualité très élevé.

1. Soit un circuit RLC série en régime sinusoïdal forcé. Établir l'expression de l'amplitude complexe du courant traversant le circuit.
2. Définir la bande passante à -3dB et montrer que sa largeur $\Delta\omega$ vérifie $\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$
3. La figure ci-dessous donne l'allure de l'amplitude de la tension u_s en fonction de la fréquence f . Déduire des mesures, les valeurs de la pulsation de résonance du quartz et de son facteur de qualité.



Exercice 4 : Association RC et RL

1. Dipôles R, C série ou parallèles.

On considère les deux groupements g_1 et g_2 constitués respectivement

- par un condensateur de capacité C en parallèle avec un résistor de résistance R pour g_1
- par un condensateur de capacité C' en série avec un résistor de résistance R' pour g_2 .

Ces groupements sont alimentés par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω .

- (a) Déterminer C' et R' en fonction de R, C et ω pour que les deux groupements soient équivalents, c'est à dire qu'ils doivent avoir la même impédance quelle que soit la fréquence.
- (b) Pour quelle valeur de ω a-t-on $RC = R'C'$?

2. Dipôles R, L série ou parallèles.

On considère les deux groupements g'_1 et g'_2 constitués respectivement

- par une bobine d'inductance L en parallèle avec un résistor de résistance R pour g'_1
- par une bobine d'inductance L' en série avec un résistor de résistance R' pour g'_2 .

Ces groupements sont alimentés par un générateur de tension sinusoïdale de pulsation ω .

- (a) Déterminer L' et R' en fonction de R, L et ω pour que les deux groupements soient équivalents.
- (b) Pour quelle valeur de ω a-t-on $\frac{R'}{R} = \frac{L'}{L}$?

Exercice 5 : Association RL parallèle.

On place en parallèle une résistance $R = 40 \, \Omega$ et une bobine d'inductance $L = 0,16 \, \text{H}$.

Entre leurs bornes communes, on applique la tension u du secteur (valeur efficace $U = 220 \, \text{V}$; $50 \, \text{Hz}$).

1. Calculer les valeurs efficaces I_R et I_L des courants traversant R et L ainsi que leur phase à l'origine φ_R et φ_L si on prend la phase à l'origine de u comme origine des phases.
2. Calculer, par deux méthodes, l'intensité efficace totale I et son déphasage φ par rapport à la tension.

Exercice 6 : Circuit RLC parallèle en RSF

1. On considère un circuit parallèle RLC en régime alternatif sinusoïdal. Exprimer l'admittance complexe $\underline{Y}$ de ce circuit.
2. Mettre $\underline{Y}$ sous la "forme réduite" en l'exprimant uniquement en fonction de R, Q (facteur de qualité) et u (pulsation réduite) avec :

$$Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et}$$

$$u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$$

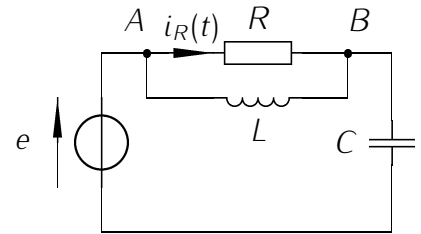
3. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z}$ en fonction des mêmes variables réduites. Étudier les variations du module de $\underline{Z}$ en fonction de la fréquence. On montrera la présence d'un maximum que l'on précisera. Trouver les deux valeurs u_1 et u_2 pour lesquelles $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{2}}$.
4. Montrer que $|u_2 - u_1| = \frac{1}{Q}$. À la fréquence de résonance, quelle est l'impédance simple équivalente du circuit ?
5. Que se passe-t-il loin de la fréquence de résonance ?

Exercice 7 : Résolution d'un circuit en RSF

On considère le circuit représenté ci contre.

Il est alimenté par un générateur de tension sinusoïdal : $e(t) = E\sqrt{2}\cos\omega t$.

1. Déterminer $i_R(t)$, l'intensité du courant qui traverse R .
2. En déduire la pulsation pour que le courant dans R soit indépendant de R .
3. Quelle est alors la puissance moyenne fournie par le générateur de tension ?



PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'un signal ?

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'un signal
périodique ?

PROPAGATION ONDES

Définir la valeur moyenne
d'un signal périodique de
période T .

PROPAGATION ONDES

Définir la valeur efficace d'un
signal périodique de période
 T .

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'un signal
sinusoïdal ?

PROPAGATION ONDES

Que vaut la valeur moyenne
d'un signal sinusoïdal ?

PROPAGATION ONDES

Que vaut la valeur efficace
d'un signal sinusoïdal ?

PROPAGATION ONDES

Énoncer le théorème de
Fourier.

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce que le spectre d'un
signal polychromatique ?

La valeur moyenne d'un signal de période T est

$$\langle s \rangle = \frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s(t) dt$$

Un signal périodique se répète identiquement à lui-même, la plus petite durée au bout de laquelle il se répète est sa période.

Un signal est une grandeur physique qui transporte une information.

La valeur moyenne d'un signal sinusoïdal est nulle.

Un signal sinusoïdal s'écrit
 $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

La valeur efficace d'un signal de période T est

$$S_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_{\tau}^{\tau+T} s^2(t) dt}$$

La spectre d'un signal polychromatique est la représentation des coefficients C_n en fonction de la fréquence dans sa décomposition en série de Fourier.

Tout signal périodique peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux. Si s est de pulsation ω avec

$$s(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est $S_{eff} = \frac{A}{\sqrt{2}}$ avec A son amplitude.

PROPAGATION ONDES

Énoncer le théorème de Parseval.

PROPAGATION ONDES

Tracer le spectre d'un signal polychromatique en nommant ses différentes composantes.

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'une onde ?

PROPAGATION ONDES

Donner l'expression d'une onde progressive qui se propage selon les x croissants.

PROPAGATION ONDES

Donner l'expression d'une onde progressive qui se propage selon les x décroissants.

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'une onde progressive sinusoïdale ?

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce que la longueur d'onde ? Quel est le lien avec le vecteur d'onde ?

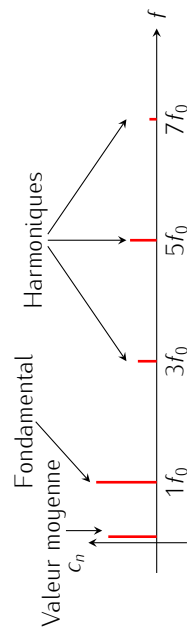
PROPAGATION ONDES

Quel est le lien entre la longueur d'onde, la fréquence et la vitesse d'une onde progressive ?

PROPAGATION ONDES

Citer quelques ordres de grandeurs de fréquences ou de longueurs d'onde.

Une onde est la propagation d'une perturbation sans transport de matière.



Le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés de sa valeur moyenne, de la valeur efficace de son fondamental et de ses harmoniques :

$$S_{eff}^2 = C_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n^2}{2}$$

$$s(x, t) = A \cos(\omega t - kx + \varphi)$$

$$s(x, t) = f(x + ct)$$

ou

$$s(x, t) = g\left(t + \frac{x}{c}\right)$$

$$s(x, t) = f(x - ct)$$

ou

$$s(x, t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)$$

- Radio FM $\simeq 100$ MHz
- wifi $\simeq 5$ GHz
- lumière $\simeq 10^{14}$ Hz
- domaine audible de 20 Hz à 20 kHz

$$\lambda = \frac{c}{f}$$

La longueur d'onde est la plus petite distance au bout de laquelle un signal se répète. Elle est liée au vecteur d'onde par la relation : $k = \frac{2\pi}{\lambda}$.

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'une onde stationnaire ?

PROPAGATION ONDES

Retrouver l'expression des modes propres sur la corde de Melde.

PROPAGATION ONDES

Retrouver les fréquences des modes propres sur la corde de Melde.

PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'une surface d'onde d'une onde progressive sinusoïdale ?

PROPAGATION ONDES

Définir la vitesse de phase d'une onde progressive sinusoïdale ?

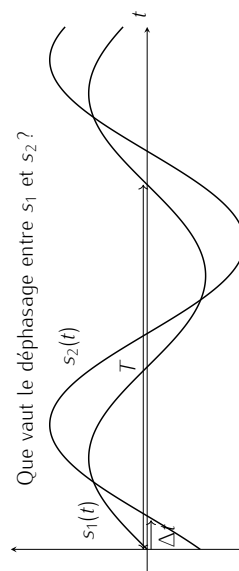
PROPAGATION ONDES

Qu'est-ce qu'un milieu non dispersif ?

PROPAGATION ONDES

Donner un exemple de milieu dispersif.

PROPAGATION ONDES



La vibration en $x = L$ est nulle, on en déduit la condition :

$$kL = n\pi, n \in \mathbb{N}$$

$$\text{soit } f = \frac{nc}{2L}.$$

Deux ondes progressives sinusoïdales se propagent en sens contraire sur la corde :

$A \cos(\omega t - kx)$ et $B \cos(\omega t + kx + \varphi)$ La vibration est nulle en $x = 0$ on en déduit $A = -B$ et $\varphi = 0$ donc :
 $s(x, t) = 2A \sin(\omega t) \sin(kx)$

Une onde stationnaire est une onde dont la fonction d'onde peut s'écrire

$$s(x, t) = F(x)G(t)$$

Elle possède des nœuds et des ventres.

Un milieu est non dispersif si sa vitesse de phase est constante.

La vitesse de phase est la vitesse des surfaces d'onde :

$$v_\varphi = \frac{\omega}{k}$$

Une surface d'onde est le lieu des points qui vibrent en phase.

$$\Delta\varphi = -\frac{2\pi\Delta t}{T}$$

- l'eau pour la lumière
- l'eau pour les vagues
- le plasma pour les ondes électromagnétique

S_1 – Propagation des ondes

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.

Propagation d'un signal

Une onde progressive se propageant dans le sens des x croissants est un signal $s(x, t)$ qui peut se mettre sous la forme

$$s(x, t) = f\left(t - \frac{x}{c}\right),$$

où f est une fonction mathématique quelconque. La grandeur c est la célérité de l'onde, c'est-à-dire sa vitesse de propagation.

Entraînement 11.1 — Éclair et tonnerre.



La foudre est une décharge électrique qui se produit pendant les orages et qui entraîne une lumière intense (l'éclair) et un grondement sourd (le tonnerre).

La lumière se propage à la vitesse $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ et le son se propage à la vitesse $c_s = 344 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$.

Vous mesurez à l'aide d'un chronomètre la durée entre le moment où vous voyez l'éclair et le moment où vous entendez le tonnerre : vous trouvez $\Delta t = 5,0 \pm 0,5 \text{ s}$.

a) On considère que la lumière se propage instantanément entre le lieu de l'éclair et votre position.

Déterminer la distance à laquelle la foudre a frappé

b) En déduire la durée de propagation de la lumière entre l'endroit où la foudre a frappé et votre position.

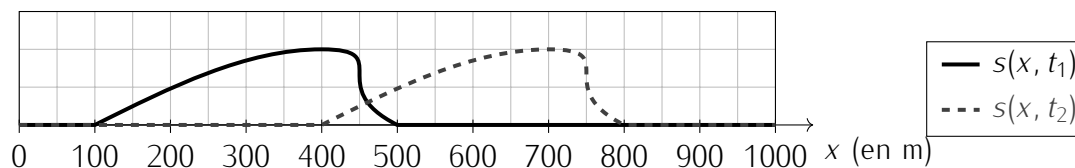
.....

c) L'hypothèse faite à la première question est-elle justifiée?

Entraînement 11.2 — Vitesse de propagation.



Une vague $s(x, t)$ se propage en direction des côtes. Ci-dessous, on représente l'allure de la surface de l'eau aux instants $t_1 = 0$ min et $t_2 = 1$ min.



Déterminer la vitesse de propagation de la vague en km/h.

Entraînement 11.3 — Onde progressive sinusoïdale.



Une onde progressive sinusoïdale a pour expression, en $x = 0$

$$s(0, t) = 2 \sin(3,9 t + 0,3 \pi),$$

le temps t étant exprimé en secondes.

Elle se propage dans le sens des x croissants à la vitesse $c = 30 \text{ cm} \cdot \text{s}^{-1}$.

a) Déterminer la période T du signal.

b) Déterminer la longueur d'onde λ du signal.

c) Donner l'expression générale de $s(x, t)$

Réponses mélangées

1,7 km oui 1,6 s 5,7 μs 48 cm

18 km/h $2 \sin(3,9 t - 13 x + 0,3 \pi)$

Exercice 1 : Valeur efficace

Gaston habite en Gastonland, un pays où le réseau électrique fonctionne... différemment. Dans ce pays, la tension électrique des prises est une fonction périodique du temps de période $T = 20$ ms qui vaut $U_0 = 270$ V pendant une durée $T/4$ puis $-U_0/3$ pendant une durée $3T/4$.

1. Rappeler la définition de la valeur moyenne d'un signal $s(t)$ périodique de période T , ainsi que celle de sa valeur efficace.
2. Représenter la courbe de la tension du secteur en Gastonland $u_G(t)$ au cours du temps sur 3 périodes.
3. Calculer la valeur moyenne du signal $\langle u_G(t) \rangle$ en fonction de U_0 . Avec un voltmètre, quels réglages faut-il prendre pour mesurer cette grandeur ?
4. Calculer la valeur efficace du signal $u_{G,eff}$ en fonction de U_0 . Avec un voltmètre, quels réglages faut-il prendre pour mesurer cette grandeur ?
5. Lorsque Gaston vient en France, on lui explique que la tension du secteur est sinusoïdale d'amplitude U_1 , de fréquence f_1 , de phase à l'origine φ et de valeur moyenne U_m . Proposer une expression mathématique pour cette tension $u_F(t)$. Représenter la courbe de la tension $u_F(t)$ au cours du temps en faisant apparaître les grandeurs pertinentes.
6. Représenter le spectre en amplitude de la tension (fréquence en abscisse).
7. À partir de maintenant, on peut considérer $\varphi = 0$ et $U_m = 0$. Déterminer en fonction de U_1 la valeur efficace de $u_{F,eff}$ la tension du secteur en France.
8. Gaston sait que $u_{F,eff} = 230$ V, en déduire la valeur de U_1 .
9. À l'aide des résultats précédents, peut-on dire si une lampe à incandescence brillerait plus fort en Gastonland ou en France ?

Exercice 2 : Ondes progressive sur l'eau

On fait tomber en un point O , considéré comme l'origine d'un axe Ox , de la surface d'une eau tranquille, une succession régulière de gouttes d'eau à la cadence de 30,0 gouttes par minute. La vitesse uniforme de propagation des ondes à la surface de l'eau est $v = 30,0$ cm.s⁻¹. On négligera l'atténuation de l'onde lors de sa propagation dans l'eau.

1. (a) Décrire le phénomène.
(b) Quelle est la distance de deux rides circulaires consécutives ?
2. On cherche à étudier le mouvement d'un bouchon de liège M distant de 30,0 cm du point O (O à l'origine de l'axe ayant pour abscisse $x = 0$). On donne l'expression de l'élongation $y_O(t) = a \cos(\omega t)$ au point O ; l'amplitude de l'onde valant $a = 0,5$ cm.
(a) En admettant que le mouvement de M soit sinusoïdal suivant la verticale, donner l'expression numérique de l'élongation $y(x = 30\text{cm}, t)$ de ce point M par rapport à sa position d'équilibre lorsque l'eau est calme.
(b) Que peut-on dire de l'élongation en O par rapport à celle en M à l'instant t ?
3. Quelle est la plus petite durée entre deux passages par la position la plus haute pour le point M ?
4. À l'instant où M est en position haute, à quelle distance se trouve le point le plus proche de M également en position haute ?
5. Quelle est à chaque instant la différence des phases, exprimée en degrés, entre le mouvement pris par M et celui pris par un autre bouchon de liège M' placé à la distance $OM' = 73$ cm du point O ?

6. Où se trouvent les points N ayant une phase supérieure de $+\pi/4$ à celle du point M ? on présentera dans un tableau les valeurs numériques des abscisses x_N des point N satisfaisants la condition concernant la phase.



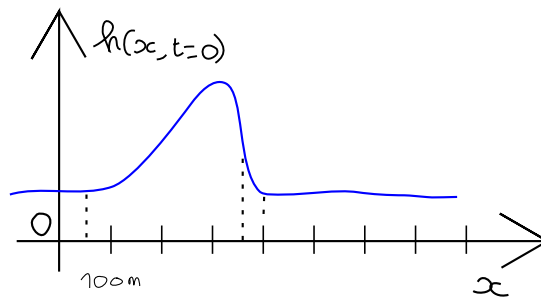
Exercice 3 : Mascaret



Un mascaret est une vague solitaire qui remonte certains fleuves (en particulier l'estuaire de la Gironde), provoquée par l'interaction entre l'écoulement du fleuve et la marée montante. On considère ici que la vague a une célérité de $20 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$, que le fleuve est rectiligne d'axe (Ox) orienté dans le sens de propagation du mascaret, donc inversement au sens d'écoulement du fleuve. L'origine O est prise à l'embouchure du

fleuve.

On définit l'instant $t = 0$ tel que l'allure du niveau d'eau du fleuve soit celle du schéma ci-dessous.



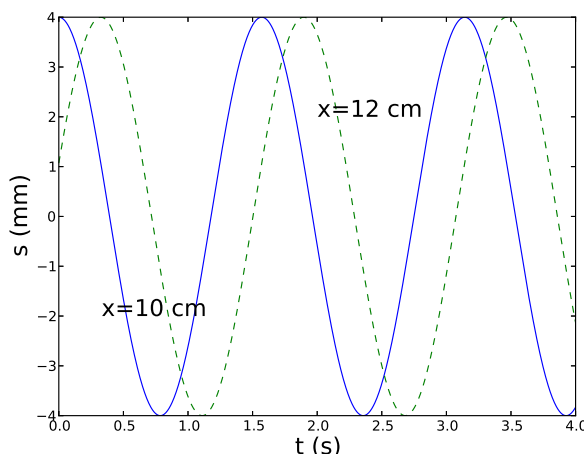
1. Faire un schéma du niveau d'eau dans le fleuve au bout d'une minute, en supposant que l'onde se propage sans déformation.
2. Un surfeur attend la vague 2, km en amont de l'embouchure du fleuve. Quand va-t-il recevoir la vague?
3. un détecteur fixe capable d'enregistrer la hauteur de l'eau dans le fleuve au cours du temps est placé 1,4 km en amont de l'embouchure. Dessiner l'allure des variations de niveau mesurés par le détecteur au cours du temps.
4. En réalité, il s'avère que la célérité de telles vagues dépend de la profondeur de l'eau : plus l'eau est profonde et plus la vague est rapide. Représenter sur un schéma comment évolue le profil du mascaret.



Exercice 4 : Sur une corde

La figure ci-dessous représente l'évolution temporelle d'une déformation le long d'une tige. Cette déformation est mesurée en deux endroits : en $x = 10 \text{ cm}$ (courbe en trait plein) et $x = 12 \text{ cm}$ (courbe en pointillée.). À partir de ces relevés, donner la valeur numériques des quantités suivantes pour l'onde :

- son amplitude
- sa période et sa pulsation
- sa vitesse de propagation
- sa longueur d'onde et son vecteur d'onde.



Exercice 5 : Instrument à vent

Un instrument de musique à vent (une flûte de pan par exemple) se modélise par une cavité de longueur L et dont l'une des extrémités est fermée et impose un ventre aux ondes de pressions, tandis que l'autre extrémité est ouverte et impose un noeud aux ondes de pression. La vitesse du son dans l'air est $c = 340\text{ m.s}^{-1}$.

1. Quelle doit être la longueur de la cavité pour produire un La_3 à $f_1 = 440\text{ Hz}$?
2. Quelle la fréquence du deuxième mode pouvant se propager dans la cavité ?
3. Exprimer, en fonction d'un entier n , la fréquence des modes de cet instrument.



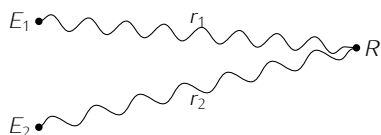
Exercice 6 : Frettes d'une guitare

Les frettes placées le long du manche d'une guitare permettent au musicien de modifier la hauteur du son produit par la corde. En pressant la corde contre une frette, il diminue sa longueur, provoquant une augmentation de la fréquence fondamentale de la corde.

1. Retrouver rapidement la fréquence de vibration fondamentale d'une corde de longueur L le long de laquelle les ondes se propagent à la célérité c .
2. La note monte d'un demi-ton lorsque la fréquence est multipliée par $2^{\frac{1}{12}}$. Pour cela, comment doit-on modifier la longueur de la corde ?
3. En plaçant le doigt sur les frettes successives on monte à chaque fois la note d'un demi-ton. Combien de frettes peut-il y avoir au maximum, sachant que la distance d entre la dernière frette et le point d'accroche de la corde doit être supérieure à $\frac{L}{4}$

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

E_1 et E_2 émettent deux ondes planes sinusoïdales synchrones, de même amplitude et même phase à l'origine. Exprimer l'onde résultante en R



INTERFÉRENCES BATTEMENTS

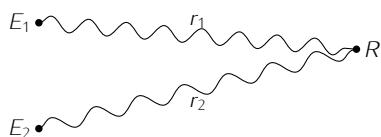
À quelle condition deux ondes interfèrent-elles de manière constructive ?

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

À quelle condition deux ondes interfèrent-elles de manière destructive ?

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

E_1 et E_2 émettent deux ondes planes sinusoïdales synchrones, de même amplitude et même phase à l'origine. Exprimer le déphasage entre ces deux ondes en M . À quelle condition observe-t-on des interférences constructives ?



INTERFÉRENCES BATTEMENTS

Soit deux signaux de fréquences différentes mais proches $s_1(t) = s_0 \cos(\omega_1 t)$ et $s_2(t) = s_0 \cos(\omega_2 t)$. Exprimer leur somme sous la forme d'un produit de deux cosinus. Quel phénomène apparaît ?

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

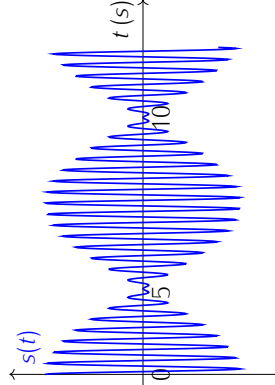
Soit deux signaux de fréquences différentes mais proches $s_1(t) = s_0 \cos(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t) = s_0 \cos(2\pi f_2 t)$. Exprimer la période des battements en fonction de f_1 et f_2 .

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

Soit deux signaux de fréquences différentes mais proches $s_1(t) = s_0 \cos(2\pi f_1 t)$ et $s_2(t) = s_0 \cos(2\pi f_2 t)$. Tracer l'allure du signal $s_1 + s_2$.

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

Que vaut l'écart de fréquence entre les deux signaux qui ont été sommé ?



INTERFÉRENCES BATTEMENTS

A quelle condition observe-t-on des interférences en optique ?

Deux ondes interfèrent de façon destructive si elle s'additionne en opposition de phase. Dans ce cas leurs amplitudes se compensent.

Deux ondes interfèrent de façon constructive si elle s'additionne en phase. Dans ce cas leurs amplitudes s'ajoutent.

A l'aide des formules de trigonométrie on trouve :

$$s(t) = 2S_0 \cos\left(k \frac{r_1 + r_2}{2} - \omega t\right) \cos\left(k \frac{r_1 - r_2}{2} - 0\right)$$

La période des battements est

$$\Delta T = \frac{1}{|f_2 - f_1|}$$

À l'aide des formules de trigonométrie on trouve que la somme vaut

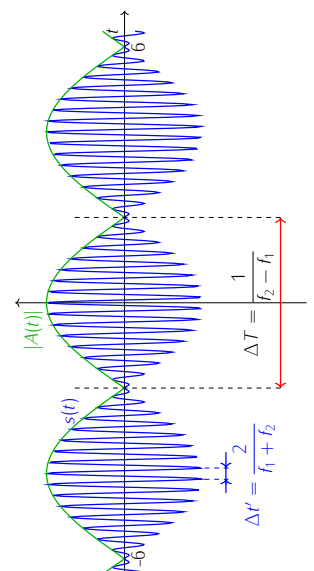
$$2S_0 \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2}t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2}t\right)$$

On peut interpréter ce signal comme étant un signal sinusoïdal de pulsation $\omega_1 + \omega_2$ mais dont l'amplitude varie. C'est le phénomène de battement.

$\Delta\varphi = 2\pi \frac{r_2 - r_1}{\lambda}$ avec λ la longueur d'onde. Ici, comme les ondes sont émises en phase alors les interférences sont constructives si la différence de marche est un multiple entier de la longueur d'onde.

Pour observer des interférences en optique, il faut que les rayons lumineux proviennent de sources cohérentes (issus de la même source primaire).

La période d'un battement est de $\Delta T = 5$ s, on en déduit que l'écart de fréquence est de $\pm 0,2$ Hz.



INTERFÉRENCES BATTEMENTS

Définir le chemin optique entre un point (S) et un point (M) dans un milieu homogène d'indice n .

INTERFÉRENCES BATTEMENTS

Deux ondes lumineuses émises en phase aux point S_1 et S_2 interfèrent en M .
Exprimer leur déphasage en fonction de la différence de chemin optique.

L'onde issu de S_1 s'écrit :

$$s_0 \cos(\omega t - k S_1 M + \varphi)$$

$$s_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} S_1 M + \varphi_1\right)$$

$$s_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi n}{\lambda_0} S_1 M + \varphi_1\right)$$

$$s_0 \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda_0} (S_1 M) + \varphi_1\right)$$

Ainsi le déphasage entre les deux ondes vaut

$$\Delta\varphi = \frac{(S_2 M) - (S_1 M)}{\lambda_0} \text{ où } \lambda_0 \text{ est la longueur d'onde dans le vide.}$$

Le chemin optique entre un point (S) et un point (M) dans un milieu homogène d'indice n est $(SM) = nSM$

S_2 – Interférences et battements

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.

Propagation d'un signal

Entraînement 12.1 — Interférences.



a)

À quelle condition portant sur leur déphasage, deux ondes progressives sinusoïdales interfèrent de façon constructive ?

b)

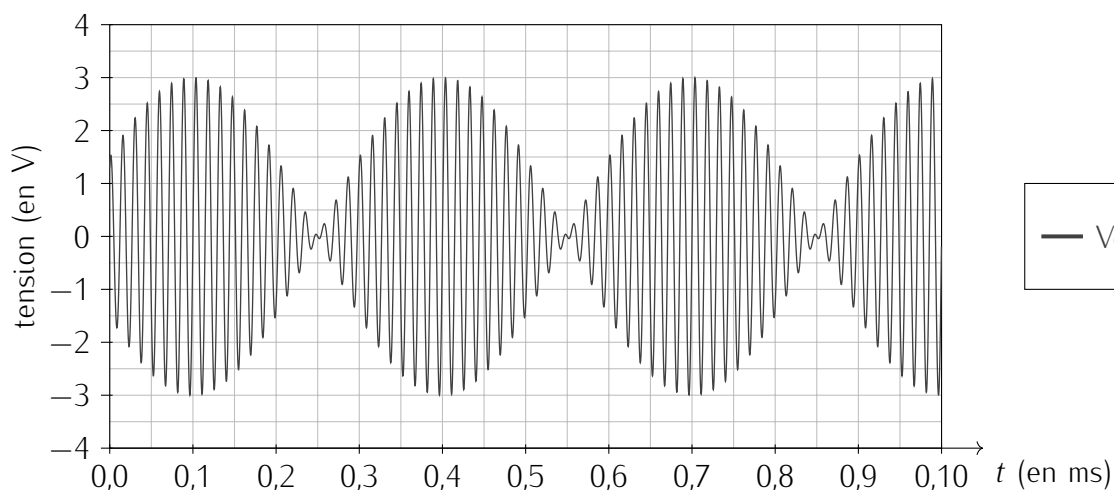
À quelle condition portant sur la différence de marche δ , deux ondes progressives sinusoïdales de longueur d'onde λ interfèrent en de façon constructive ?

c) Même question si les ondes sont émises en opposition de phase. .

Entraînement 12.2 — Signal à l'oscilloscope.



On relève sur un oscilloscope le signal suivant :



a) Quelle phénomène observe-t-on ?

b) Quelle est l'écart de fréquence entre les deux signaux mis en jeu ?

c) Quelle valent les fréquences des signaux mis en jeu ?

d) Quelle est l'amplitude des deux signaux?

Réponses mélangées

3,33 kHz $\Delta\varphi = 2n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$ $\delta = n\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}$ 1,5 V

Battements 65,0 kHz et 68,3 kHz $\delta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda$ avec $n \in \mathbb{N}$



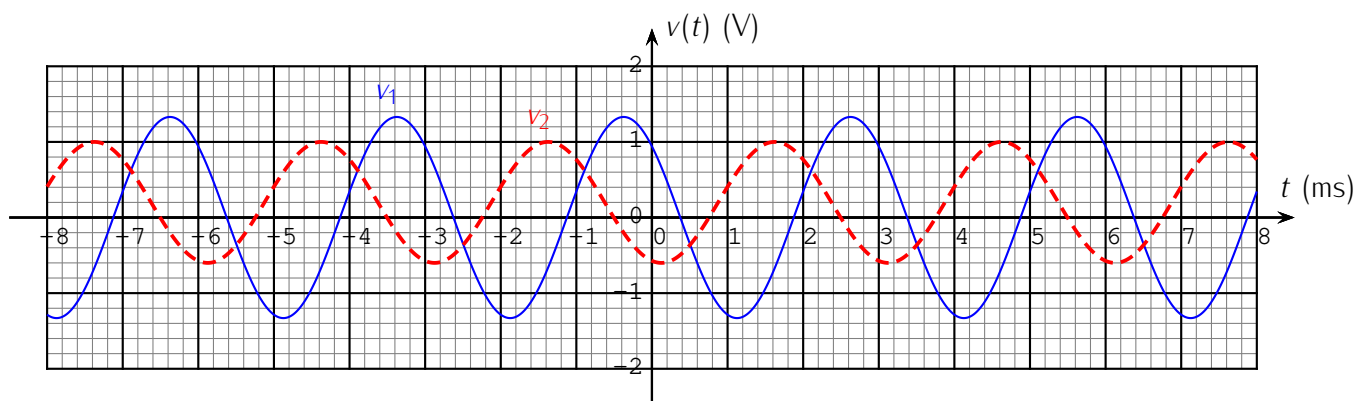
Exercice 1 : Connaissez-vous bien votre cours ?

1. Retrouver par le calcul la condition d'interférence constructive entre deux ondes progressives sinusoïdales synchrones.
2. Retrouver par le calcul la période des battements de la somme de deux signaux sinusoïdaux de même amplitude et de fréquences proches.
3. Un guitariste accorde la corde de LA de son instrument à l'aide d'un diapason résonant à 440 Hz. Il frappe son diapason, pince la corde et entend un son qui contient 5 battements par secondes. Quelle est la fréquence de résonance de la corde ?



Exercice 2 : Mesure d'un déphasage à l'oscilloscope

À l'aide d'un oscilloscope, on acquiert les signaux suivants :



Mesurez graphiquement

1. L'amplitude, la valeur moyenne, la période et la fréquence de chaque signal. Ces signaux sont-ils synchrones ?
2. v_2 est-il en avance ou en retard par rapport à v_1 ? Quel est le décalage temporel ? En déduire la phase de v_2 par rapport à v_1 .
3. Quelle est la phase à l'origine de chacun de ces deux signaux ?

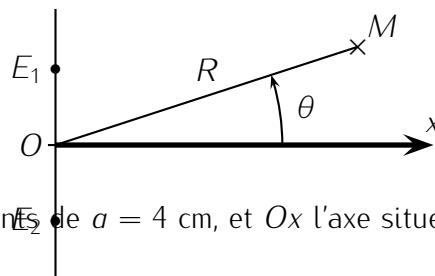


Exercice 3 : Interférence ultrasonores

Une expérience d'interférences d'ondes ultra-sonores est réalisée en plaçant deux émetteurs E_1 et E_2 côte à côte relié à un même générateur. La fréquence d'émission est égale à 40 kHz, ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 8,5$ mm. A part à la question 3, les sources émettent des ondes en phase.

On note O le point milieu du segment délimité par les émetteurs distants de $a = 4$ cm, et Ox l'axe situé sur la médiatrice de ce segment.

On déplace le microphone sur un grand cercle de rayon $R = 0,5$ m et on relève l'évolution de l'amplitude mesurée en fonction de l'angle θ que fait la direction $\overrightarrow{OM}$ avec l'axe x .



1. Distance interfrange

(a) Faire une figure pour un angle θ faible mais non nul. Rajouter sur la figure l'arc de cercle de centre M passant par E_2 , on note H son intersection avec la droite (E_1M) . Que représente E_1H ?

(b) Montrer que les distances E_1M et E_2M peuvent s'écrire :

$$E_1M = R\sqrt{1 + \frac{a \sin \theta}{R} + \frac{a^2}{4R^2}}$$

$$E_2M = R\sqrt{1 - \frac{a \sin \theta}{R} + \frac{a^2}{4R^2}}$$

- (c) On admet la formule suivante : si $\epsilon \ll 1$, alors $\sqrt{1 + \epsilon} \simeq 1 + \frac{1}{2}\epsilon$ (On pourra essayer avec quelques valeurs à la calculatrice). On se place dans le cas où $a \ll R$, montrez que $E_1H \simeq a \sin \theta$ puis en déduire le déphasage entre les ondes reçues en M en fonction de θ, a, λ .
- (d) Quelles sont, dans l'intervalle $[-30^\circ, 30^\circ]$, les valeurs de θ où on observe un maximum d'amplitude résultante ?

2. Minima d'amplitude

- (a) Sur l'intervalle d'étude précédent, quelles sont les positions où un minimum d'amplitude est attendu ?
- (b) Si les ondes reçues ont même amplitude, quelle valeur d'amplitude minimale est prévue par la théorie ?
- (c) Quels défauts peuvent expliquer un écart entre prévision et observation ?

3. Inversion de phase

Le dispositif permet d'inverser le signal émis par l'un des émetteurs (ce qui revient à le déphaser de π).

- (a) Quel est l'état d'interférence sur l'axe Ox ?
- (b) Quelles sont les positions des nouveaux points de maximum et de minimum d'amplitude ?
- (c) Qu'advient-il si l'on inverse également l'autre signal ?



Exercice 4 : Radar Routier

Pour mesurer la vitesse d'un véhicule, un radar émet dans sa direction une onde électromagnétique sinusoïdale de fréquence ν . Après réflexion sur le véhicule, l'onde revient en présentant un retard τ dont nous admettrons qu'il ne dépend que du trajet parcouru par l'onde dans l'air.

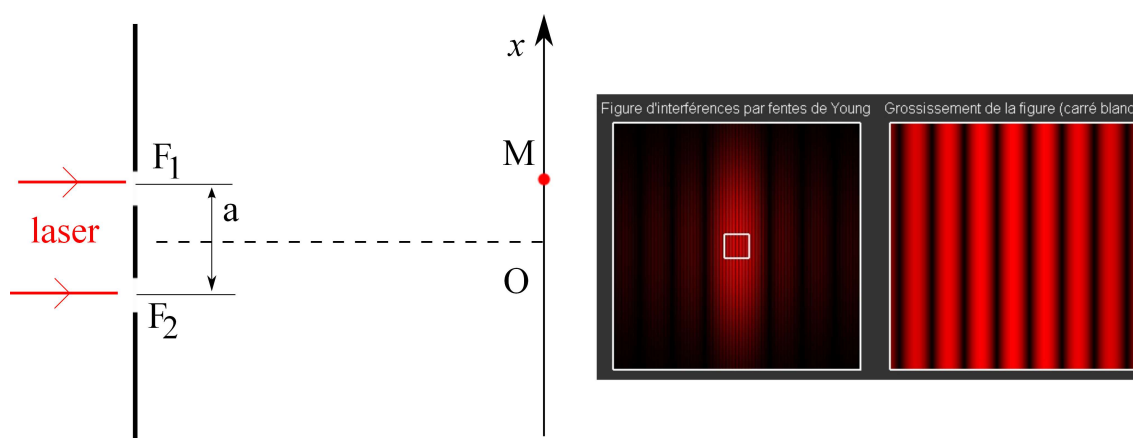
- À quelle vitesse (valeur numérique) les ondes électromagnétiques se déplacent-elles dans l'air ?
- Dans le cas où le véhicule est immobile à une distance d du radar, l'onde reçue et l'onde émise ont-elles même fréquence ? Quel est leur déphasage au niveau de l'émetteur ? Préciser la nature de l'onde résultante dans l'espace séparant le radar du véhicule cible.
- Le véhicule se déplace désormais à vitesse constante, notée V , en s'éloignant de l'émetteur. Quelle est l'évolution du déphasage ? montrer que l'onde réfléchie n'a plus la même fréquence que l'onde émise.
- La fréquence d'émission est de l'ordre de $\nu = 2.10^{10}$ Hz, en déduire l'ordre de grandeur de la différence de fréquence $\Delta\nu$ pour un véhicule respectant les limitations de vitesse.
- Quel phénomène apparaît sur l'onde résultante entre l'émetteur et le récepteur ?
- La différence $\Delta\nu$ étant très faible par rapport à ν , on ne peut pas mesurer directement la fréquence reçue pour en déduire la vitesse. Combien de chiffres significatifs seraient nécessaires pour mesurer ν avec une précision suffisante pour verbaliser le conducteur lorsqu'il dépasse de 5 km/h la vitesse autorisée ?

7. Pour mesurer $\Delta\nu$ précisément malgré les variations éventuelles de ν , on se propose de réaliser la multiplication entre le signal reçu et le signal émis (en supposant qu'ils ont été traités pour avoir la même amplitude). On applique ensuite un filtre passe bas de fréquence de coupure 10^4 Hz, c'est-à-dire un dispositif qui élimine les fréquences au delà de 10^4 Hz et laisse invariante les fréquence en deçà de 10^4 Hz, quel est le signal résultant ? Ce signal est-il sensible au variation éventuelle de ν ?



Exercice 5 : Fentes d'Young

L'expérience des fentes d'Young est une expérience classique permettant d'observer le phénomène d'interférence lumineuses. Le dispositif comprend un écran opaque percé de deux fentes identiques de très petites largeur $\epsilon = 0,070$ mm, parallèles entre elles et distantes de $a = 0,40$ mm. On envoie un faisceau laser de longueur d'onde $\lambda = 633$ nm sur les fentes et on place un écran d'observation à la distance $D = 1,5$ m derrière le dispositif (voir la figure sur laquelle les échelles ne sont pas respectée).



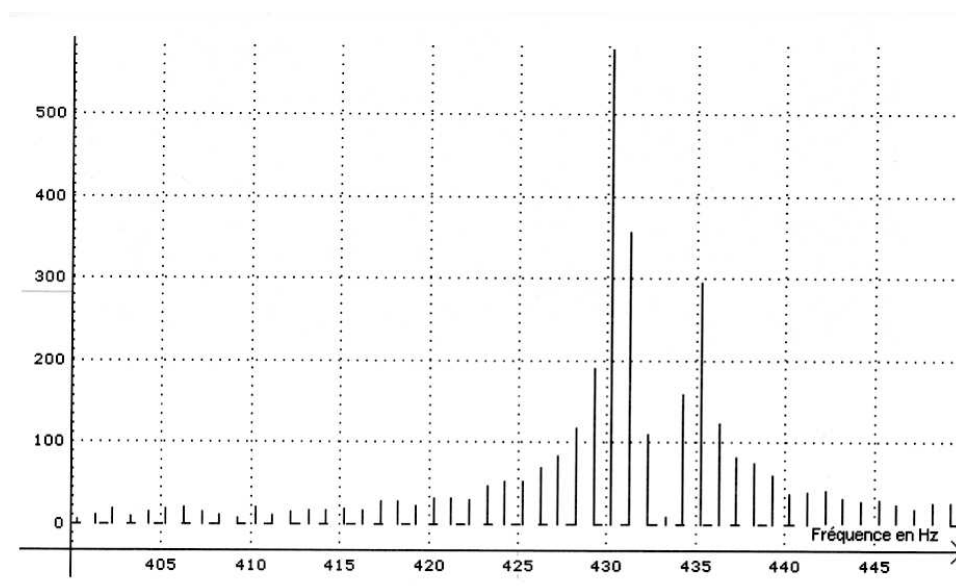
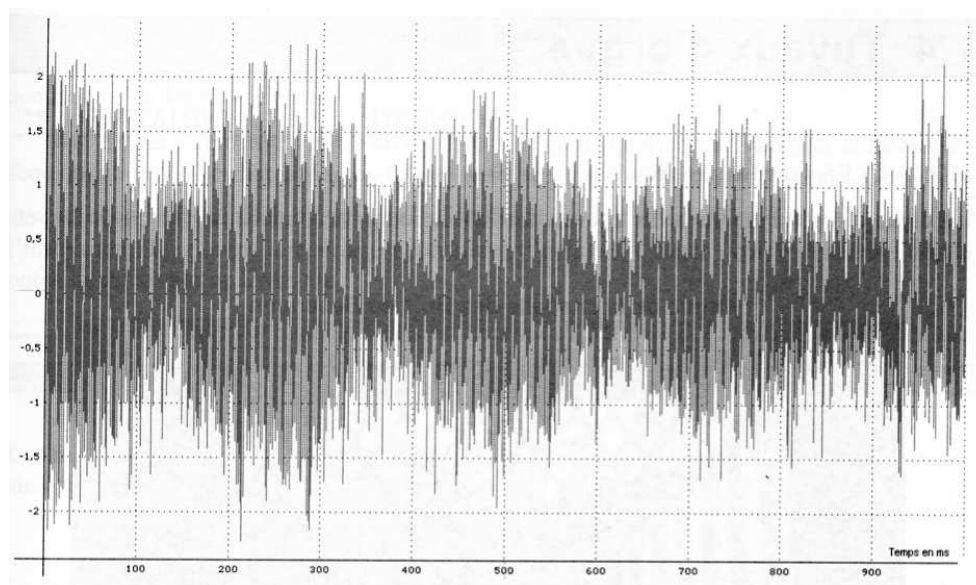
Sur l'écran on observe une figure symétrique autour d'un point O , la lumière se répartissant le long d'un axe (Ox) perpendiculaire aux fentes. On observe une tache centrale très lumineuse de largeur 2,7 cm dont l'éclairement est modulé et des taches latérales, deux fois plus étroites et beaucoup plus étroites et beaucoup moins lumineuses présentant la même modulation de l'éclairement (voir figure). Le but de l'exercice est d'interpréter ces observations.

1. Exprimer la largeur L de la tache centrale de la figure de diffraction qu'on observerait sur l'écran s'il n'y avait qu'une seule fente de largeur ϵ . Montrer que les taches centrales de diffraction sont pratiquement confondues.
2. On appelle champ d'interférence l'intersection des taches centrales de diffraction. Il est centré en un point O' situé à égal distance des fentes et peut être considéré d'après la question précédente comme le domaine $-\frac{L}{2} \leq x \leq \frac{L}{2}$ de l'axe (Ox) . Montrer que pour un point M du champ d'interférences et d'abscisse x on a ; $MF_2 - MF_1 \approx \frac{ax}{D}$. On utilisera le fait que si $\delta \ll 1$ alors $\sqrt{1 + \delta} \approx 1 + \frac{1}{2}\delta$.
3. Exprimer alors le déphasage entre les deux ondes arrivant en M en fonction de λ , a , D et x . Les deux ondes ont la même phase initiale à leur départ de F_1 et F_2 .
4. À quelle condition sur x , les ondes interfèrent-elles de manière constructive ? On définit l'interfrange i comme la distance séparant deux franges d'interférence, c'est-à-dire deux points d'éclairement maximal. Donner l'expression de i . Combien peut-on observer de franges d'interférence dans le champ d'interférence ?
5. Trouver les coordonnées des points en lesquels il y a interférence destructive.

Exercice 6 : Comment accorder une guitare ?

On se propose d'illustrer un moyen commode pour accorder les cordes entre elles en prenant l'exemple de l'accordage de la corde $ré_2$, à partir de la corde la_1 . Le guitariste s'arrange pour jouer la « même » note sur ces deux cordes (il place ses doigts et pince les cordes comme il faut, les explications ne sont pas nécessaires ici). Ensuite, il règle la tension de la corde $ré_2$ de manière à ce que les deux cordes produisent la même note.

Les figures suivantes représentent la tension délivrée par un microphone (en V) en fonction du temps (un carreau correspond à 100 ms) ainsi que le spectre du signal lors d'un essai d'accordage des cordes la_1 et $ré_2$ par la méthode précédente.



1. Comment s'appelle le phénomène observé ? De quelle façon se manifeste-t-il dans le son entendu par l'oreille ?
2. Montrer que les deux graphiques expérimentaux sont compatibles **de manière quantitative**.
3. Comment doit-on alors procéder pour accorder les cordes entre elles ?

FILTRAGE

Qu'est-ce qu'un quadripôle ?

FILTRAGE

Qu'est-ce qu'un filtre électrique linéaire ?

FILTRAGE

Définir la fonction de transfert d'un filtre.

FILTRAGE

Soit un filtre linéaire, de fonction de transfert $\underline{H}$, dont la tension d'entrée est $u_e(t) = Ue \cos(\omega t + \varphi_e)$. Exprimer la tension de sortie, $u_s(t)$, de ce filtre.

FILTRAGE

Définir le gain et le gain en décibel d'un filtre.

FILTRAGE

Qu'est-ce qu'un diagramme de Bode ?

FILTRAGE

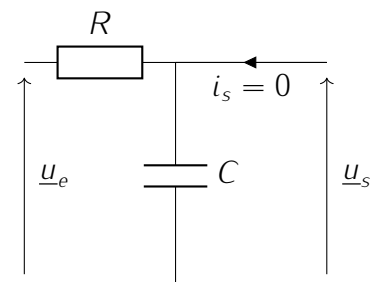
Définir l'impédance d'entrée et l'impédance de sortie d'un filtre.

FILTRAGE

Définir la bande passante d'un filtre.

FILTRAGE

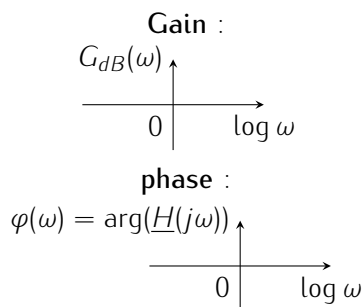
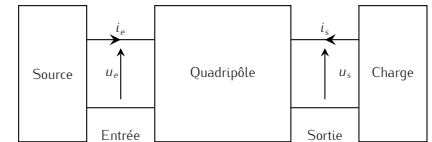
Exprimer la fonction de transfert du filtre :



La fonction de transfert est le rapport $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$

Un filtre électrique linéaire est un quadripôle constitué de composants linéaires et qui laisse passer sélectivement les signaux qui se trouvent dans une certaine plage de fréquence (la bande passante).

Un quadripôle est un dispositif électrique délimité par quatre pôles : deux bornes d'entrée et deux de sortie.



$$G(\omega) = |\underline{H}(j\omega)|$$

$$G_{dB} = 20 \log(G)$$

$$u_s(t) = U_s \cos(\omega t + \varphi_s) \text{ avec}$$

$$U_s = |\underline{H}(j\omega)| U_e$$

et

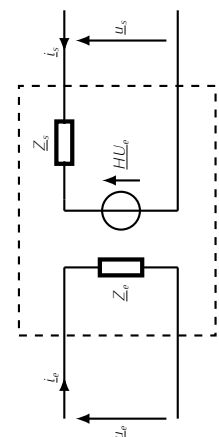
$$\varphi_s = \varphi_e + \arg(\underline{H}(j\omega))$$

On applique le diviseur de tension

$$\underline{H} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_R}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

La bande passante est l'intervalle de pulsations (ou de fréquences) tel que

$$G \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}$$


$$\underline{U}_e = \underline{Z}_e \underline{i}_e$$

$$\underline{U}_s = \underline{H} \underline{U}_e + \underline{Z}_s \underline{i}_s$$

FILTRAGE

Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega}$. Tracer son diagramme de Bode.

FILTRAGE

Quelles précautions doit-on prendre lors de la mise en cascade de filtres ?

FILTRAGE

Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+jRC\omega}$. Montrer qu'il se comporte comme un intégrateur à hautes fréquences.

FILTRAGE

Soit un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{jRC\omega}{1+jRC\omega}$. Montrer qu'il se comporte comme un dérivateur à basses fréquences.

FILTRAGE

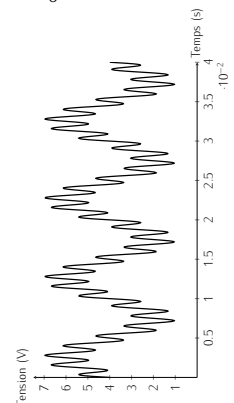
Soit un signal polychromatique

$$u_e(t) = C_0 + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

envoyé à l'entrée d'un filtre linéaire de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$, donner l'expression du signal de sortie.

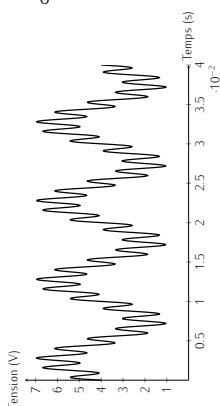
FILTRAGE

Donner l'allure du signal de sortie d'un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{1}{1+j\frac{f}{f_0}}$ avec $f_0 = 100$ Hz.



FILTRAGE

Donner l'allure du signal de sortie d'un filtre de fonction de transfert $\underline{H} = \frac{j\frac{f}{f_0}}{1+j\frac{f}{f_0}}$ avec $f_0 = 100$ Hz.



En hautes fréquences
 $(\omega \gg \frac{1}{RC})$

$$\underline{H} \simeq \frac{1}{RC\omega}$$

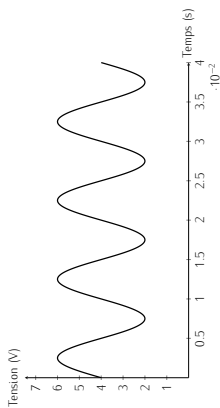
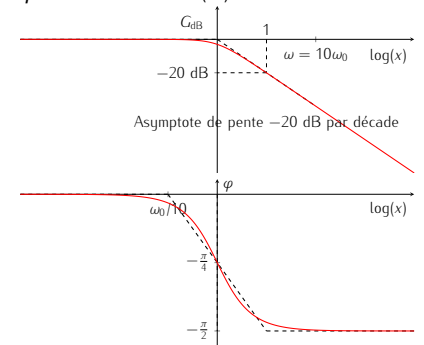
donc $\underline{u}_s = \frac{1}{RC} \frac{\underline{u}_e}{j\omega}$.

Ainsi pour le signal réel

$$u_s(t) = \frac{1}{RC} \int u_e(t) dt$$

Lors de la mise en cascade de deux filtres de fonctions de transfert ($\underline{H}_1$ et $\underline{H}_2$), le filtre en aval prélève un courant sur celui en amont. La tension de sortie de ce dernier est alors $\underline{H}_1 \underline{u}_e + \underline{Z}_{s,1} i_s$. Le deuxième terme de la somme doit être le plus faible possible. Il faut donc des filtres avec une faible impédance de sortie (voire nulle) et une grande impédance d'entrée (voire infinie).

$G_{dB} = -10 \log(1 + x^2)$, en basses fréquences $G_{dB} \simeq 0$
 en hautes fréquences
 $G_{dB} \simeq -20 \log(x)$.
 $\varphi = -\arctan(x)$ on en déduit:



$$u_s = C_0 \underline{H}(0) + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \cos(n\omega t + \Psi_n)$$

avec

$$S_n = C_n |\underline{H}|(n\omega)$$

$$\Psi_n = \varphi_n + \arg(\underline{H}(jn\omega))$$

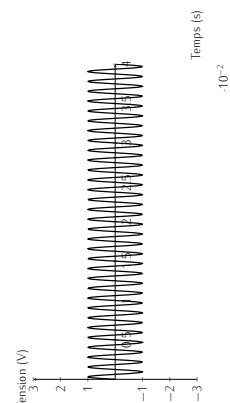
En basses fréquences
 $(\omega \ll \frac{1}{RC})$

$$\underline{H} \simeq RC\omega$$

donc $\underline{u}_s = RC(j\omega) \underline{u}_e$.

Ainsi pour le signal réel

$$u_s(t) = RC \frac{du_e}{dt}$$



E_{C3} – Étude des filtres

Conseils pour ce TD

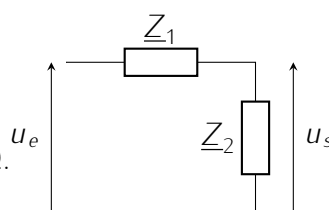
- Les mêmes que E_{C2} et O_{S2} .
- Même si cela n'est pas demandé, il est souvent utile de prévoir le type de filtre auquel vous avez affaire en déterminant le comportement asymptotique en remplaçant les bobines et condensateurs par leurs équivalents en basses fréquences et hautes fréquences.
- Pour établir l'expression de la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$, la formule des ponts diviseurs de tension est souvent utilisée.
- Vérifier la cohérence entre le comportement asymptotique et l'expression calculée de $\underline{H}$.
- Se ramener à une forme canonique et introduire une pulsation réduite si possible de façon à se ramener systématiquement à une des formes étudiées en détails en classe.

Fonctions de transfert

Entraînement 13.1 — Filtre passe-bande.

Nous disposons du filtre ci-contre, constitué de deux dipôles dont les impédances complexes sont :

$$\underline{Z}_1 = R + \frac{1}{jC\omega} \quad \text{et} \quad \underline{Z}_2 = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \text{avec} \quad C = 47 \text{ nF} \text{ et } R = 1 \text{ k}\Omega.$$



Nous souhaitons écrire la fonction de transfert du filtre $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e}$ sous sa forme canonique :

$$\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

a) À l'aide d'un pont diviseur de tension,

exprimer $\underline{H}(j\omega)$

b) Identifier H_0

c) Identifier Q

d) Identifier et calculer ω_0

Entraînement 13.2 — Filtre du second ordre.

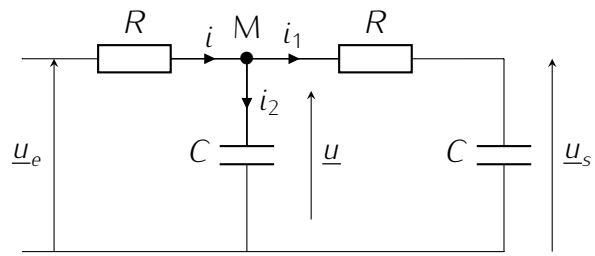
Nous disposons d'un filtre passe-bas de fonction de transfert :

$$\underline{H}(jx) = \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \frac{H_0}{1 + \frac{jx}{Q} - x^2}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. On a $C = 10 \mu\text{F}$ et $R = 220 \Omega$.

Un étudiant obtient les trois égalités suivantes :

$$R\underline{i} = \underline{u}_e - \underline{u}, \quad R\underline{i}_1 = \underline{u} - \underline{u}_s \quad \text{et} \quad R\underline{i}_2 = jRC\omega\underline{u}.$$



a) À l'aide de la loi des noeuds, exprimer $\underline{i}$ en fonction de $\underline{i}_1$ et $\underline{i}_2$

b) Utiliser la réponse précédente et les trois égalités fournies pour exprimer $\underline{u}_e$ en fonction de $\underline{u}$ et $\underline{u}_s$.

.....

L'étudiant montre grâce à un pont diviseur de tension que $\underline{u} = (1 + jRC\omega)\underline{u}_s$.

c) En déduire la fonction de transfert simplifiée $\underline{H}(j\omega)$. ..

En comparant la réponse précédente à la forme canonique de $\underline{H}(j\omega)$ donnée, identifier

d) H_0

e) ω_0

f) Q

De la fonction de transfert au diagramme de Bode

Entraînement 13.3 — Calcul de gain en décibel.



On considère les fonctions de transfert suivantes : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$.

Le gain en décibel G_{dB} d'un filtre se détermine à partir de la relation :

$$G_{dB} = 20 \log (|\underline{H}|).$$

Déterminer le gain en décibel associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$.. | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$.. | <input type="text"/> |

Entraînement 13.4 — Calcul de phase.



On reprend les mêmes fonctions de transfert que précédemment : $\underline{H}_1 = 3,0$ et $\underline{H}_2 = j \frac{\omega}{\omega_0}$ et $\underline{H}_3 = 1 + j \frac{\omega}{\omega_1}$.

Le déphasage φ introduit par un filtre entre les signaux d'entrée et de sortie se détermine à partir de la relation :

$$\varphi = \arg(\underline{H}) = \arctan \left(\frac{\text{Im}(\underline{H})}{\text{Re}(\underline{H})} \right).$$

À condition que $\text{Re}(\underline{H}) > 0$. Déterminer le déphasage associé aux différentes fonctions de transfert ou combinaisons de fonctions de transfert ci-dessous.

- | | | | |
|----------------------------|----------------------|--|----------------------|
| a) $\underline{H}_1$ | <input type="text"/> | d) $\underline{H}_1 - \underline{H}_2$.. | <input type="text"/> |
| b) $\underline{H}_2$ | <input type="text"/> | e) $\frac{\underline{H}_2}{\underline{H}_3}$ | <input type="text"/> |
| c) $\underline{H}_3$ | <input type="text"/> | f) $\underline{H}_2 \times \underline{H}_3$.. | <input type="text"/> |

Entraînement 13.5 — Diagramme de Bode en phase.



On utilise un filtre passe-haut de fonction de transfert $\underline{H}(jx) = \frac{jx}{1 + jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$.

Déterminer la valeur du déphasage $\varphi(x) = \arg \left(\underline{H}(jx) \right)$ du filtre pour des signaux tels que :

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\omega = \omega_0$ (la pulsation propre du filtre) | <input type="text"/> |
| b) $\omega \gg \omega_0$ (en hautes fréquences) | <input type="text"/> |
| c) $\omega \ll \omega_0$ (en basses fréquences) | <input type="text"/> |

Entraînement 13.6 — Calcul de gain.



Pour les fonctions de transfert suivantes, évaluer le gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ pour $x = 1$.

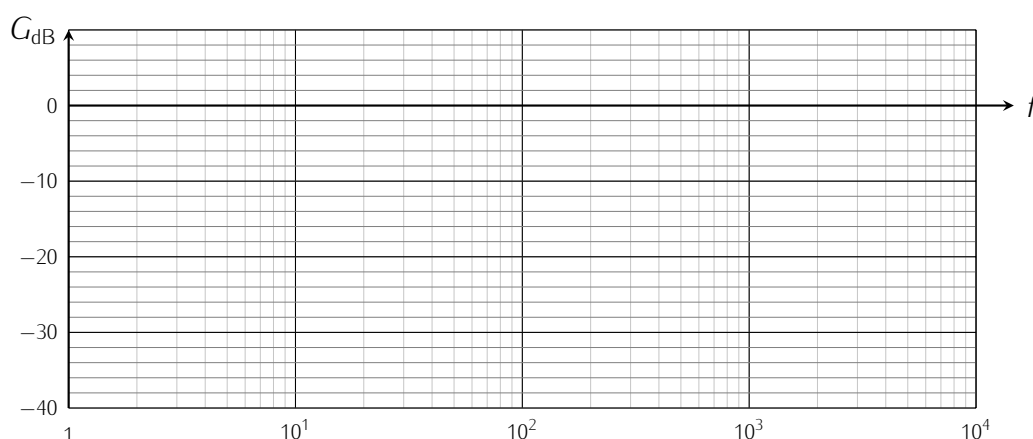
- a) $\underline{H}(jx) = \frac{1 - jx}{1 + jx}$
- b) $\underline{H}(jx) = -\frac{jx}{1 + jx}$
- c) $\underline{H}(jx) = \frac{1}{1 + 2jmx + (jx)^2}$ avec $m = 2$

Entraînement 13.7 — Tracé sur papier semi-logarithmique.



Un élève souhaite étudier le comportement d'un filtre passe-haut en basses fréquences. Pour cela, il relève les amplitudes des tensions d'entrée et de sortie pour différentes fréquences bien inférieures à la fréquence de coupure du filtre.

Fréquence (en Hz)	200	700	2 000
Amplitude du signal d'entrée ($U_{\text{entrée}}$ en V)	1	1	1
Amplitude du signal de sortie (U_{sortie} en V)	0,04	0,14	0,40



Le gain en décibel est donnée par la relation $G_{\text{dB}} = 20 \log \left(\frac{U_{\text{sortie}}}{U_{\text{entrée}}} \right)$.

Calculer le gain en décibel pour chacune des fréquences et placer le point correspondant sur le graphe ci-dessus.

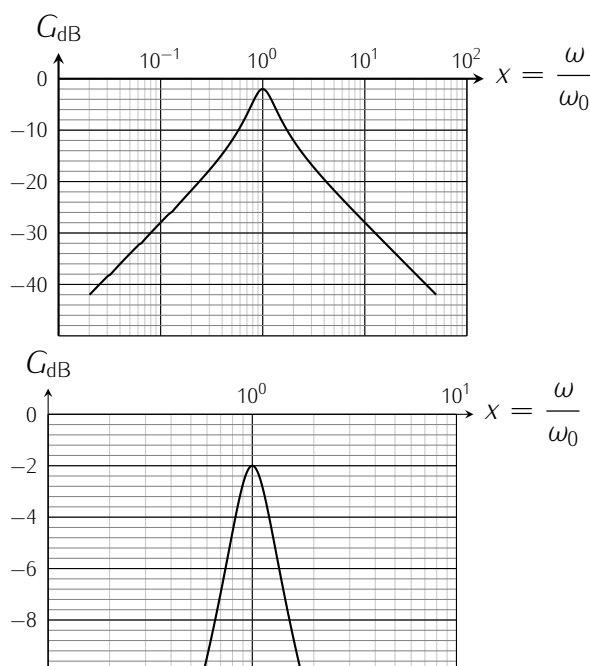
- a) Point A : $f = 200$ Hz.
- b) Point B : $f = 700$ Hz.
- c) Point C : $f = 2\,000$ Hz.
- d) Déterminer la pente de la droite passant les points A, B et C.

Entraînement 13.8 — Bande passante et facteur de qualité d'un filtre.



On dispose d'un filtre passe-bande de fréquence propre $f_0 = 15 \text{ kHz}$, dont les deux fréquences de coupure à -3 dB sont f_{c1} et f_{c2} (avec $f_{c1} < f_{c2}$), et dont la fréquence de résonance est f_r .

Le diagramme de Bode en gain du filtre en fonction de $x = f/f_0$ et un agrandissement sont fournis.



À partir des graphiques donnés ci-dessus, déterminer les différentes grandeurs caractéristiques du filtre.

- a) f_r b) f_{c1} c) f_{c2}

Réponse d'un filtre à un signal périodique

Entraînement 13.9 — Expérience de TP.



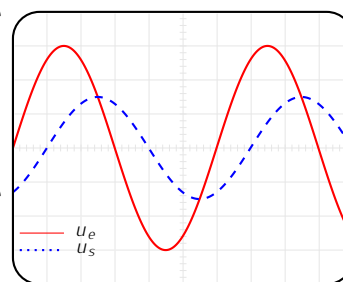
En TP, une élève doit étudier un filtre inconnu. Pour cela elle impose en entrée une tension sinusoïdale de la forme suivante :

$$u_e(t) = U_0 \cos(\omega t).$$

Elle observe alors à l'oscilloscope les tensions d'entrée u_e et de sortie u_s .

Nous noterons la tension de sortie sous la forme :

$$u_s(t) = U'_0 \cos(\omega t + \varphi).$$



Base de temps : $50 \mu\text{s}/\text{division}$
Calibre vertical : $2 \text{ V}/\text{division}$

- a) À quelle fréquence f travaille cette élève?
- b) Évaluer l'amplitude U_0 de la tension d'entrée.
- c) Évaluer l'amplitude U'_0 de la tension de sortie.

d) En déduire le gain G du filtre.

e) Évaluer φ

Réponses mélangées

$$\begin{array}{cccccccc}
 -\pi/3 & 1/3 & -8,0 \text{ dB} & \frac{1}{1 + 3jRC\omega - (RC\omega)^2} & 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) \\
 \pi/4 & 3 \text{ V} & \underline{u}(2 + jRC\omega) - \underline{u}_s & 0 & 19,2 \text{ kHz} & \pi/2 & 1/\sqrt{2} \\
 \frac{\frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{3jRC\omega} + \frac{jRC\omega}{3}} & 1/3 & \frac{1}{RC} & +20 \text{ dB/décade} & 1/4 & \frac{\pi}{2} \\
 \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) & 1/3 & \underline{i}_1 + \underline{i}_2 & 6 \text{ V} & 0 & \frac{\pi}{2} - \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) \\
 10 \log \left(9 + \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right) & -\arctan \left(\frac{\omega}{3\omega_0} \right) & 15,0 \text{ kHz} & 0,5 \\
 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) + 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) & 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) - 10 \log \left(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right)^2 \right) \\
 \frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{\omega}{\omega_1} \right) & 1 & 1 & 9,5 \text{ dB} & 3,3 \text{ kHz} & 20 \log \left(\frac{\omega}{\omega_0} \right) \\
 11,7 \text{ kHz} & -17,1 \text{ dB} & -28,0 \text{ dB} & 2,1 \times 10^4 \text{ rad/s}
 \end{array}$$

✍ Exercice 1 : Filtrage d'une tension triangulaire

Une tension rectangulaire peut se décomposer de la façon suivante :

$$u(t) = 1,5 + 2,55. \sin(314.t) + 0,85. \sin(942.t) + 0,51. \sin(1570.t) + 0,36. \sin(2198.t) + \dots$$

1. Tracer le spectre de ce signal.
2. Préciser le nom de chacune des composantes.
3. Ce signal traverse un filtre passe-bas idéal de fréquence de coupure $f_c=200\text{Hz}$. Donner l'expression du signal de sortie si le gain maximum du filtre est de 2.

✍ Exercice 2 : TNT vs 4G

La transmission de la TNT se fait via des ondes électromagnétiques contenues dans ce que l'on appelle la bande UHF (Ultra Haute Fréquence). Cette bande est la bande de fréquences contenue entre 300 Mhz et 3000 Mhz. Les chaînes TV sont émises sur plusieurs canaux (ou bande de fréquences) numérotés de 21 à 69. La figure 1 précise la fréquence de chaque canal (en fait pour chaque canal il y a deux fréquences : une pour le son et une pour l'image).

Canal	Vidéo (MHz)	Audio (MHz)	Canal	Vidéo (MHz)	Audio (MHz)	Canal	Vidéo (MHz)	Audio (MHz)
21	471,25	477,75	38	607,25	613,75	55	743,25	749,75
22	479,25	485,75	39	615,25	621,75	56	751,25	757,75
23	487,25	493,75	40	623,25	629,75	57	759,25	765,75
24	495,25	501,75	41	631,25	637,75	58	767,25	773,75
25	503,25	509,75	42	639,25	645,75	59	775,25	781,75
26	511,25	517,75	43	647,25	653,75	60	783,25	789,75
27	519,25	525,75	44	655,25	661,75	61	791,25	797,75
28	527,25	533,75	45	663,25	669,75	62	799,25	805,75
29	535,25	541,75	46	671,25	677,75	63	807,25	813,75
30	543,25	549,75	47	679,25	685,75	64	815,25	821,75
31	551,25	557,75	48	687,25	693,75	65	823,25	829,75
32	559,25	565,75	49	695,25	701,75	66	831,25	837,75
33	567,25	573,75	50	703,25	709,75	67	839,25	845,75
34	575,25	581,75	51	711,25	717,75	68	847,25	853,75
35	583,25	589,75	52	719,25	725,75	69	855,25	861,75
36	591,25	597,75	53	727,25	733,75			
37	599,25	605,75	54	735,25	741,75			

FIGURE 1 – Liste des canaux UHF. Ces fréquences peuvent varier de ± 0.498 Mhz selon les besoins des diffuseurs (notamment afin d'éviter les brouillages).

Depuis Décembre 2011, les canaux de 61 à 69 ne sont plus alloués à la télévision mais à la téléphonie, plus précisément au réseau 4G. Dès lors, plusieurs utilisateurs se sont plaints de ne plus recevoir correctement la TNT. En effet, les filtres des décodeurs TNT ne sont pas suffisamment sélectifs et laissent passer les signaux présents sur les canaux au-delà du 61^{ème}. Pour palier à ce problème, il est recommandé d'installer un filtre rejecteur de 4G entre l'antenne réceptrice et le décodeur TNT.

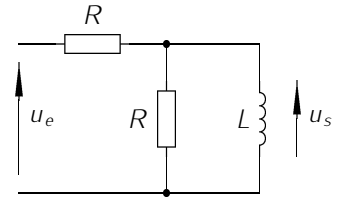


1. De quel type est le filtre rejecteur de 4G ?
2. On souhaite atténuer d'un facteur 10 l'amplitude du signal présent sur le canal 61, sans atténuer celui présent sur le canal 60. Tracer l'allure du diagramme de Bode en amplitude de ce filtre.
3. Quel doit être l'ordre minimal du filtre ? Commentez.

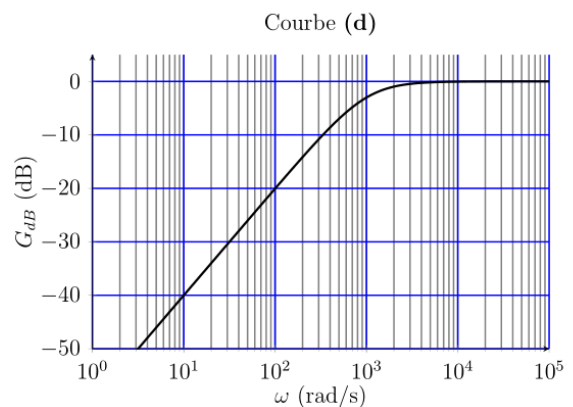
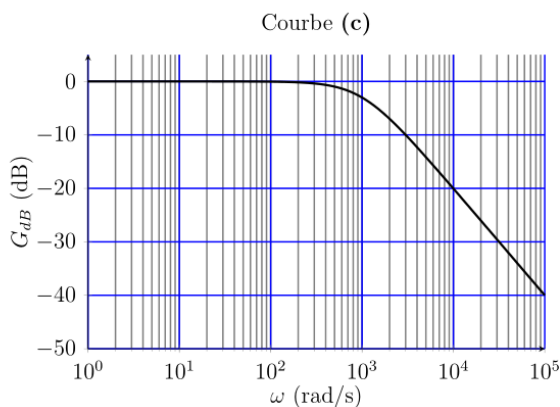
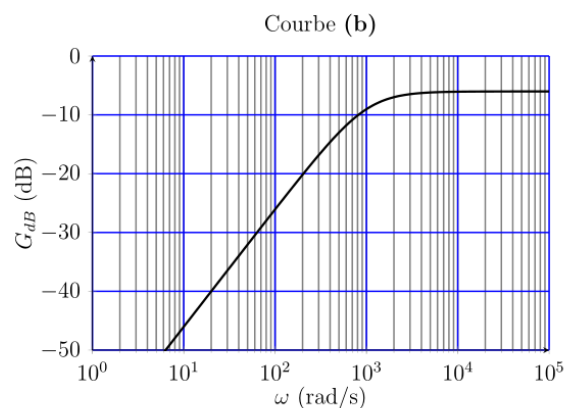
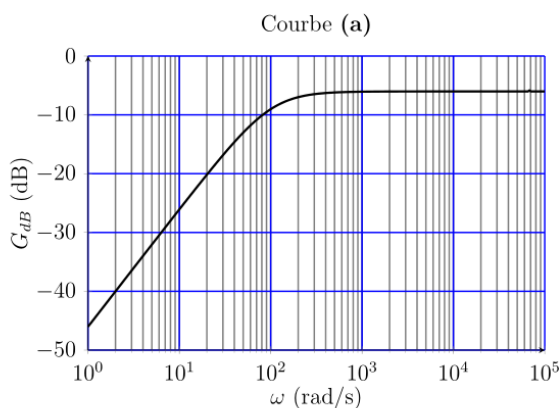


Exercice 3 : Filtre électrique du premier ordre

Soit le circuit représenté ci-dessous et pour lequel u_e est une tension sinusoïdale de pulsation ω et u_s la tension de sortie. La résistance est $R = 1,0 \text{ k}\Omega$.



- Déterminer, sans calcul, la nature du filtre.
- Déterminer l'expression de sa fonction de transfert $H(j\omega)$.
- Rappeler la définition de la pulsation de coupure d'un filtre.
- Établir l'expression de la pulsation de coupure du filtre étudié.
- Quatre binômes de TP ont tracé le diagramme de Bode du circuit mais Jeanne et My Kim ont inversé la résistance et la bobine, Joris et Antone se sont trompés d'une décade en choisissant $R = 0,10 \text{ k}\Omega$, Joseph et Xavier ont oublié la résistance en parallèle de la bobine. Seuls Adam et Mansour ont fait les choses correctement. Associer à chaque courbe le binôme de TP. La réponse devra être proprement justifiée.



- Déterminer la valeur de l'inductance de la bobine à l'aide du diagramme de Bode en amplitude.
- On impose en entrée la tension $u_e(t) = E \cos(\omega_c t + \frac{\pi}{4})$. Déterminer complètement la tension de sortie (amplitude et phase à l'origine).
- On impose en entrée la tension $u_e(t) = E_1 \cos(\omega_1 t + \frac{\pi}{4}) + E_2 \cos(\omega_2 t + \frac{\pi}{4})$ avec $\omega_1 = \frac{\omega_c}{10}$ et $\omega_2 = 10\omega_c$. Déterminer complètement la tension de sortie. On pourra se permettre certaines approximations.
- On note $\omega_c = 1.10^3 \text{ rad.s}^{-1}$. On impose en entrée une tension triangulaire de pulsation $\omega \ll \omega_c$. Quelle opération réalise le filtre à cette pulsation ? Quelle sera alors l'allure du signal de sortie ?



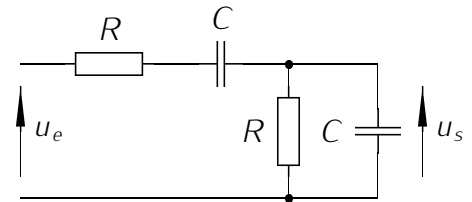
Exercice 4 : Filtre de Wien

- Quelle est la nature du filtre de WIEN représenté ci-contre ?

2. Établir sa fonction de transfert $\underline{H}(j\omega)$ et la mettre sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

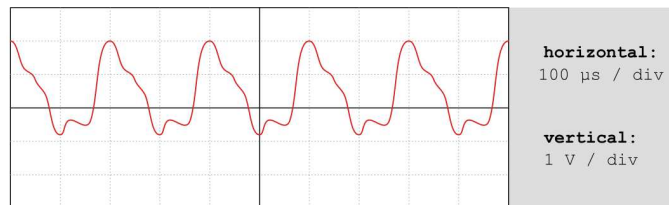
avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ où K , ω_0 et Q sont des constantes positives que l'on explicitera et dont on donnera la signification physique.



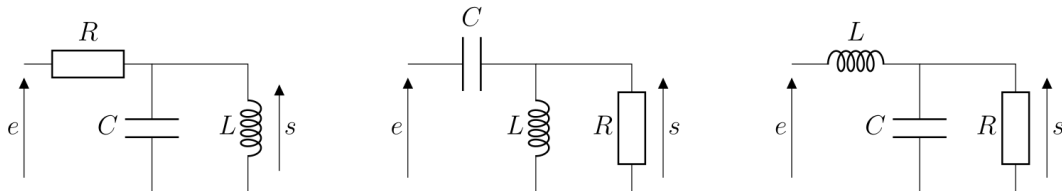
3. Calculer la valeur maximale du gain en dB de ce filtre et la phase correspondante.
4. Tracer l'allure du diagramme de Bode du filtre de Wien.
5. Interpréter les zones rectilignes du diagramme en amplitude.
6. Quelle est la bande passante $\Delta\omega$ du filtre de Wien ?
7. Exprimer le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est $u_e(t) = E_0 + E_0 \cos(10\omega t) + E_0 \cos(100\omega t)$ avec $E_0 = 10 \text{ V}$ et $\omega = \frac{\omega_0}{10}$.

Exercice 5 : Dimensionnement d'un moyeneur

Le signal ci-dessous est délivré par un capteur. La grandeur que vous cherchez à mesurer est directement la valeur moyenne du signal.



1. Où se trouve la valeur moyenne d'un signal dans son spectre ?
2. En déduire duquel de ces filtres vous avez besoin.



3. Quelle est sa bande passante Δf à $-n \text{ dB}$?
4. Exprimer la fonction de transfert de ce filtre et la mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ Donner l'expression du facteur de qualité Q en fonction de R , L et C .

5. Tracer le diagramme de Bode en amplitude pour diverses valeurs de Q .
6. Cherchez-vous à produire un phénomène de résonance, ou bien à l'éviter ? En déduire parmi les jeux proposés ci-dessous le plus adapté pour moyener le signal observé.

composant	Jeu 1	Jeu 2	Jeu 3
$R (\Omega)$	10	100	1
$L (\text{H})$	1	10^{-2}	10^{-2}
$C (\text{F})$	10^{-4}	10^{-2}	10^{-6}

ALI

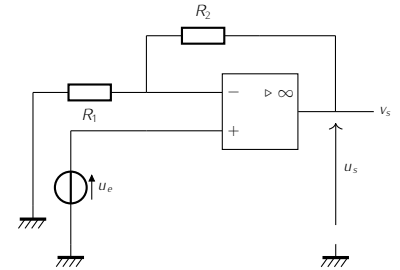
Quels sont les caractéristiques d'un ALI idéal ?

ALI

Comment savoir si un ALI fonctionne en régime linéaire ?

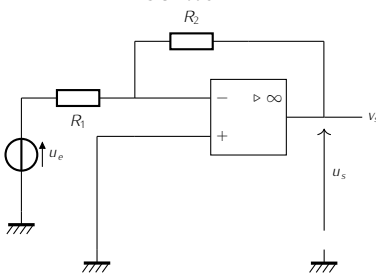
ALI

Établir la relation entre u_s et u_e ? Que vaut l'impédance d'entrée de ce circuit ? Que vaut son impédance de sortie ?



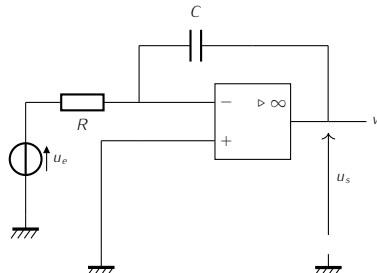
ALI

Établir la relation entre u_s et u_e ? Que vaut l'impédance d'entrée de ce circuit ? Que vaut son impédance de sortie ?



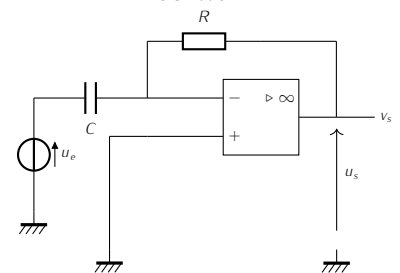
ALI

Établir la relation entre u_s et u_e ? Que vaut l'impédance d'entrée de ce circuit ? Que vaut son impédance de sortie ?



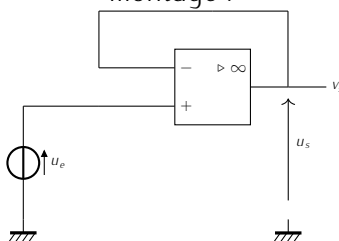
ALI

Établir la relation entre u_s et u_e ? Que vaut l'impédance d'entrée de ce circuit ? Que vaut son impédance de sortie ?



ALI

Établir la relation entre u_s et u_e ? Quel est l'intérêt de ce montage ?

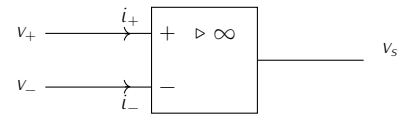


$$u_s = \left(1 + \frac{R_2}{R_1}\right) u_e$$

$$\underline{Z}_e = \infty$$

$$\underline{Z}_s = 0$$

- S'il n'y a pas de rétroaction négative alors le régime est saturé.
- Sinon, s'il y a bien une rétroaction négative, alors on suppose que le régime est linéaire.
 - Si les calculs mènent à $|v_s| < V_{\text{sat}}$ alors le régime est bien linéaire.
 - Sinon, l'hypothèse est fautive et le régime est saturé.



- $i_+ = 0$ et $i_- = 0$.
- La tension de sortie est indépendante du courant de sortie.
- En régime saturé $v_s = \pm V_{\text{sat}}$.
- En régime linéaire $v_+ = v_-$.

$$u_s = -RC \frac{du_e}{dt}$$

$$\underline{Z}_e = \frac{1}{jC\omega}$$

$$\underline{Z}_s = 0$$

$$u_s = -\frac{1}{RC} \int u_e dt$$

$$\underline{Z}_e = R$$

$$\underline{Z}_s = 0$$

$$u_s = -\left(\frac{R_2}{R_1}\right) u_e$$

$$\underline{Z}_e = R_1$$

$$\underline{Z}_s = 0$$

$$u_s = u_e$$

Son impédance d'entrée est infinie et son impédance de sortie est nulle. Ce montage permet d'isoler la source de la charge.

EC_4 – Amplificateurs linéaires intégrés

Conseils pour ce TD

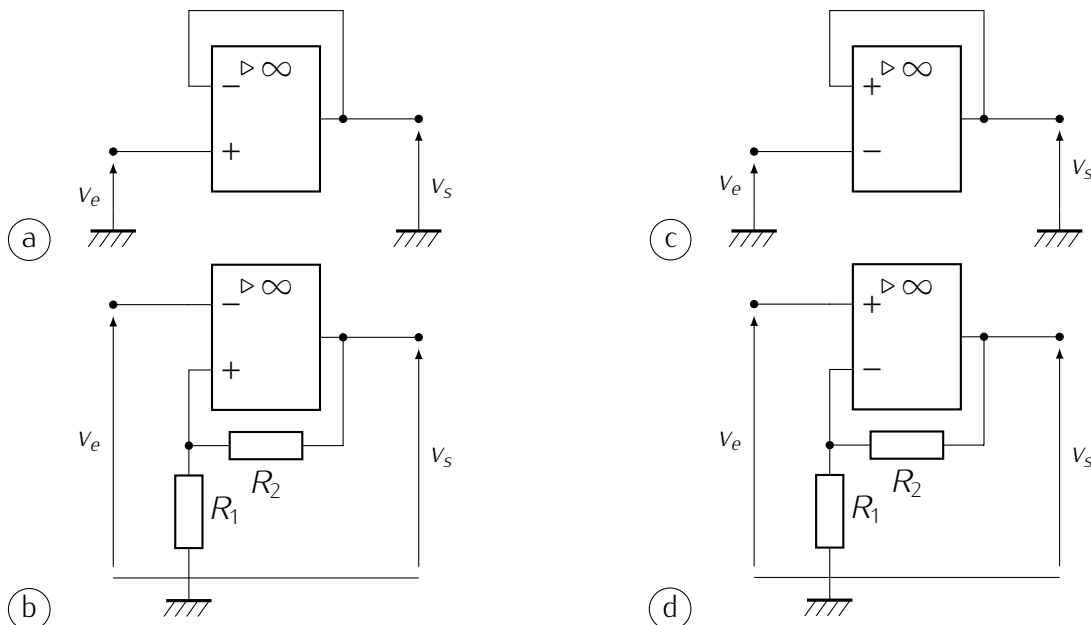
- Les mêmes que EC_3 .
- La première chose à faire est de vérifier si l'amplificateur opérationnel est idéal, on a alors $I_+ = I_- = 0$ (à placer tout de suite sur la figure) et fonctionne en régime linéaire (l'existence d'une rétroaction négative est nécessaire), on a alors $\varepsilon = v_+ - v_- = 0$ (à placer également sur la figure).
- Quand on cherche la relation qui lie des tensions, l'utilisation de la loi des nœuds en terme de potentiels aux entrées de l'amplificateur opérationnel est quasiment systématique. Ne pas l'utiliser à la sortie de l'amplificateur opérationnel car le courant de sortie i_s est inconnu.
- Il arrive parfois (souvent) qu'un montage complexe soit décomposable en montages connus.

Les fondamentaux

Entraînement 14.1 — Régime linéaire ?

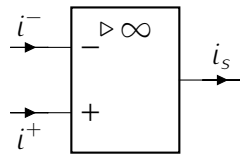


Parmi les circuits suivants, lesquels peuvent fonctionner en régime linéaire ?



Entraînement 14.2 — Modèle de l'ALI idéal de gain infini.





Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

a) L'impédance d'entrée de l'ALI idéal est infinie ☐

b) Les courants d'entrée i^+ et i^- de l'ALI idéal sont nuls ☐

c) Le courant de sortie i_s de l'ALI est toujours nul ☐

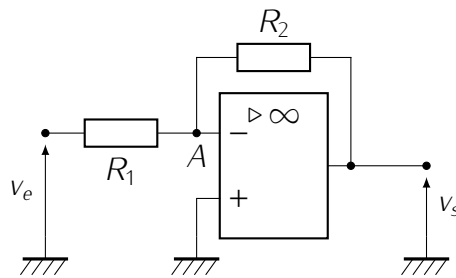
d) Les potentiels V^+ et V^- des entrées sont nuls en régime linéaire.

..... ☐

Entraînement 14.3



On considère le montage suivant :



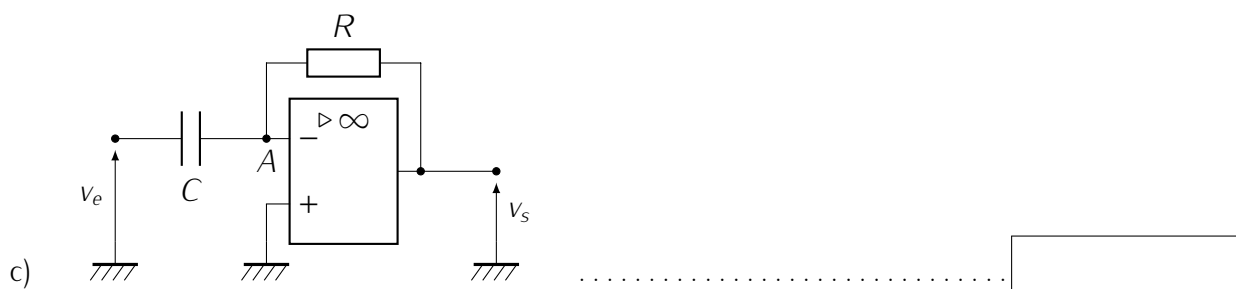
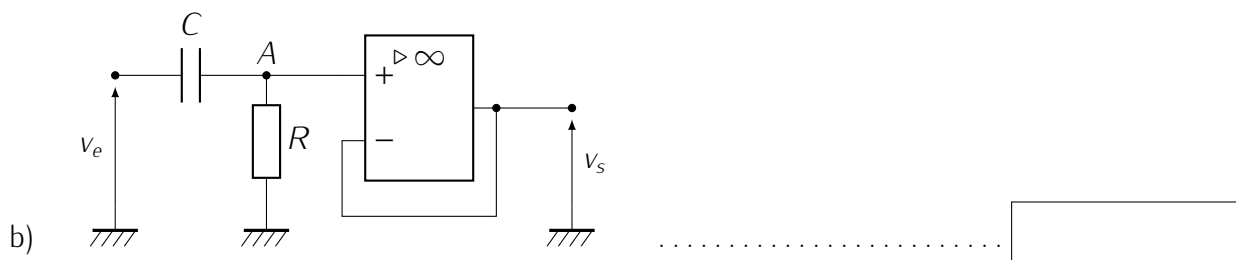
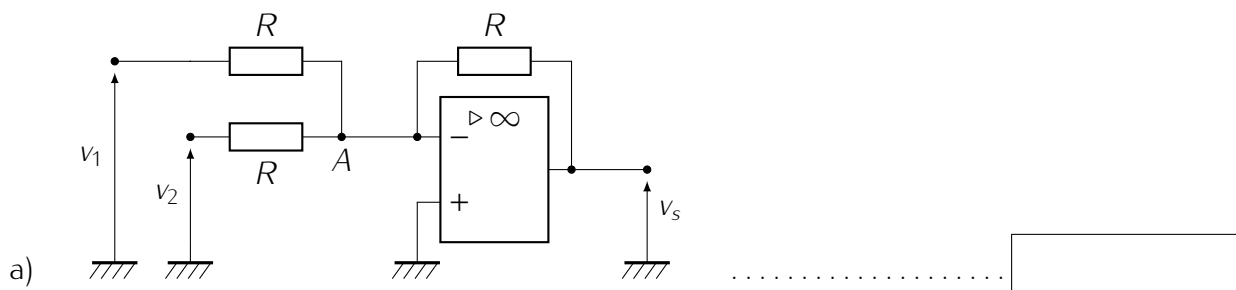
- L'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire?
- Dans le cas du régime linéaire, quelle est la relation entre les potentiels V^+ et V^- des entrées inverseuse et non inverseuse?
- Donner, en régime linéaire, le potentiel V_A du point A

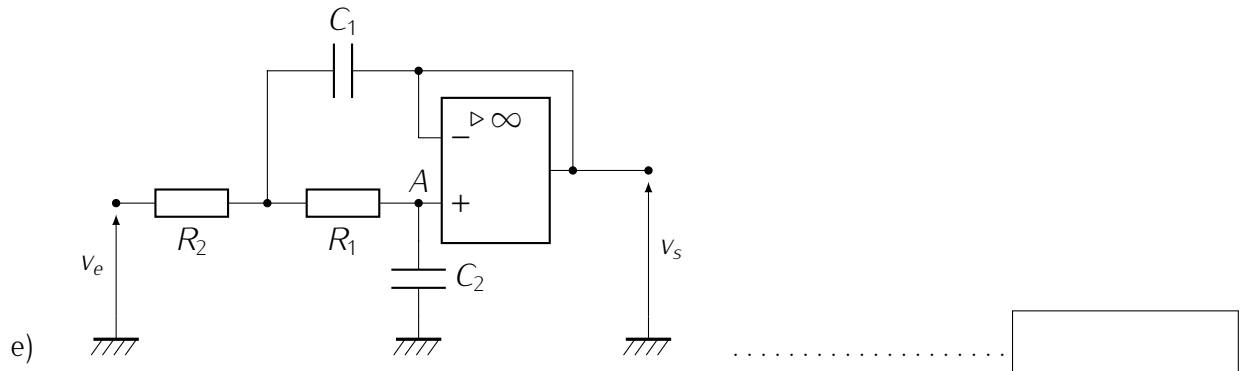
Entraînement 14.4 — Détermination de potentiels électriques.



Tous les ALI de cet exercice sont supposés fonctionner en régime linéaire.

Donner, pour chaque montage, le potentiel V_A du point A en fonction de v_e ou de v_s . Le potentiel peut également être nul.

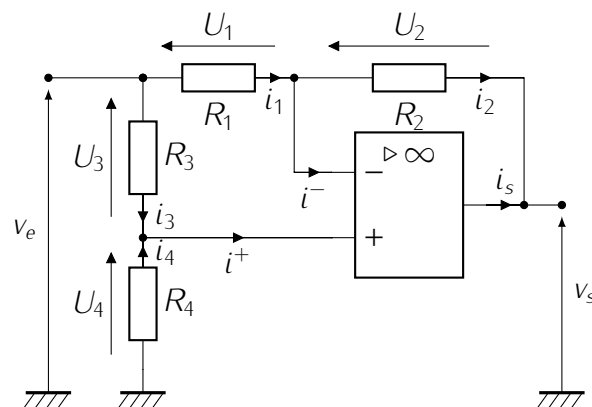




Entraînement 14.5 — Vrai ou faux ?



On considère le montage ci-dessous dans lequel l'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



Pour chaque affirmation, répondre par vrai ou faux.

- a) Toutes les résistances sont orientées en convention récepteur
- b) La loi des nœuds assure $i_1 = i_2$
- c) La loi des nœuds assure $i_3 = i_4$
- d) Les tensions U_1 et U_3 sont égales
- e) Les tensions U_2 et U_4 sont égales

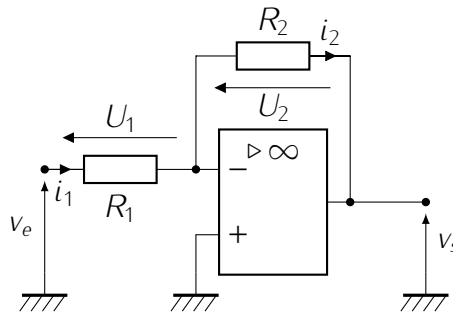
Circuits usuels

Entraînement 14.6 — Autour de l'amplificateur inverseur.



On considère le montage amplificateur inverseur ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre i_1 et i_2 ?

b) Exprimer U_1 en fonction de v_e

c) Exprimer U_2 en fonction de v_s

d) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e

e) Exprimer l'intensité i_2 en fonction de v_s

f) Déterminer l'amplification $G = \frac{v_s}{v_e}$ de ce montage

g) Parmi les couples de résistances suivants, lequel permet d'obtenir l'amplification la plus importante ?

Ⓐ le couple ($R_1 = 3,3 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 8,2 \text{ k}\Omega$)

Ⓑ le couple ($R_1 = 1 \text{ k}\Omega$, $R_2 = 3,3 \text{ k}\Omega$)

.....

Entraînement 14.7 — Amplificateur inverseur.



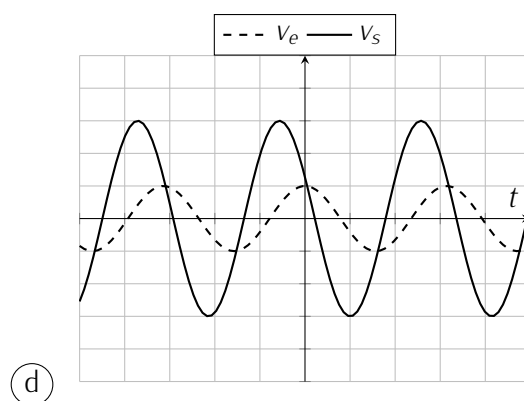
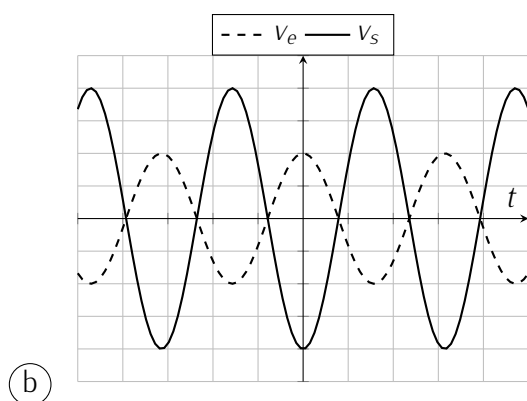
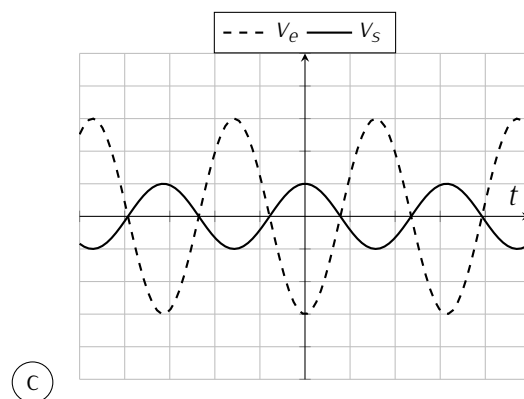
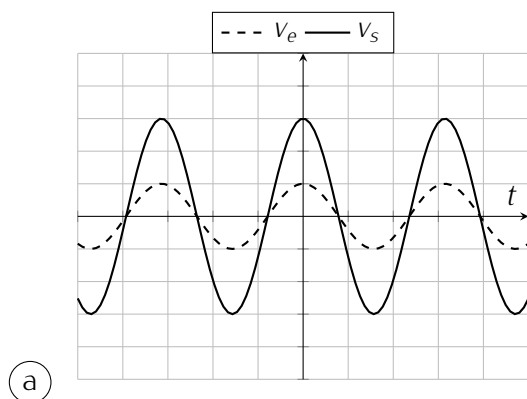
Un montage amplificateur inverseur produit un gain

$$G = -\frac{R_2}{R_1}$$

avec $R_1 = 1,2 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 200 \Omega$.

Les courbes ci-dessous représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre est de 1 V/division pour v_e et 0,5 V/division pour v_s .



Quelles sont les courbes pouvant correspondre au montage amplificateur inverseur étudié ?

.....

Entraînement 14.8 — Un petit intermède.



On considère une résistance R et une capacité C .

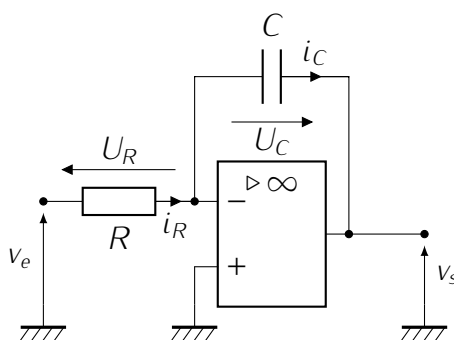
Quelle est la dimension de la grandeur RC ?

Entraînement 14.9 — Montage intégrateur inverseur.



On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal.



a) En régime stationnaire, l'ALI peut-il fonctionner en régime linéaire?

Dans toutes les questions suivantes, on suppose que l'ALI fonctionne en régime linéaire et on se place en régime sinusoïdal.

b) Exprimer la tension U_R en fonction de v_e et/ou v_s

c) Exprimer la tension U_C en fonction de v_e et/ou v_s

d) Donner la relation entre i_R et i_C

e) Quelle est la relation entre les grandeurs complexes $\underline{i_C}$ et $\underline{U_C}$?

f) Donner la fonction de transfert $\underline{H}$ du montage.

g) Donner la relation entre $v_e(t)$ et $v_s(t)$

Entraînement 14.10



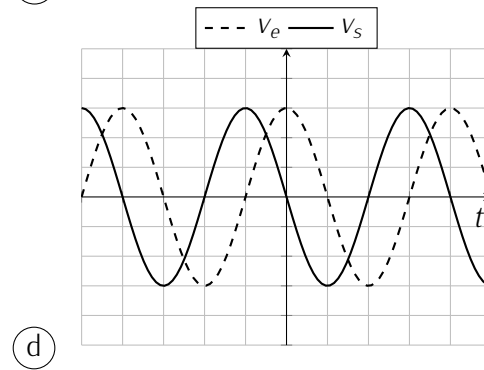
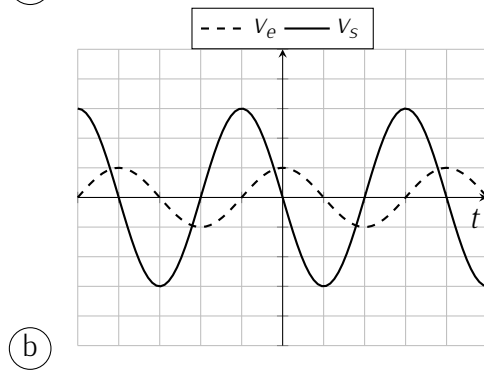
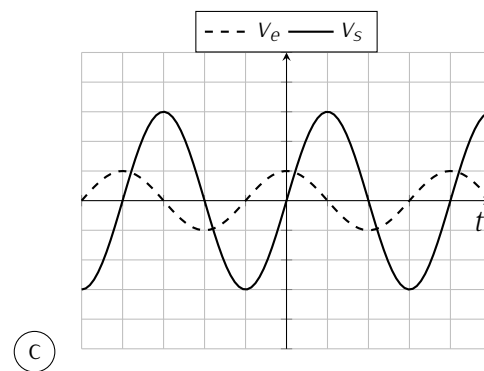
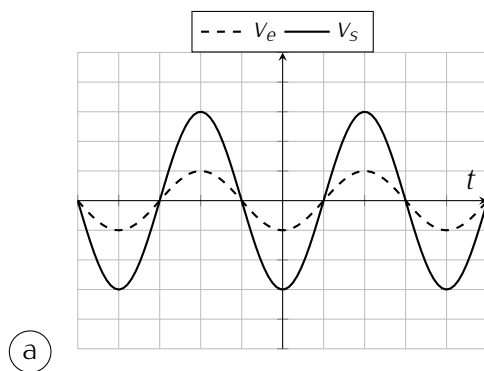
Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert

$$\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

avec $R = 11 \text{ k}\Omega$ et $C = 4,7 \text{ nF}$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps. Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 μs /division.



a) Quel est le gain du montage intégrateur inverseur?

b) Quel est le déphasage de la tension de sortie v_s par rapport à v_e ? ...

c) Pour $v_e = E \cos(\omega t)$, donner l'expression de v_s

d) Quelle est la fréquence de fonctionnement?

e) Quelle est la valeur numérique du gain à cette fréquence?

f) Quelle courbe est compatible avec les valeurs numériques données ci-dessus?

.....

Entraînement 14.11 — Montage intégrateur inverseur.



Un montage intégrateur inverseur a pour fonction de transfert

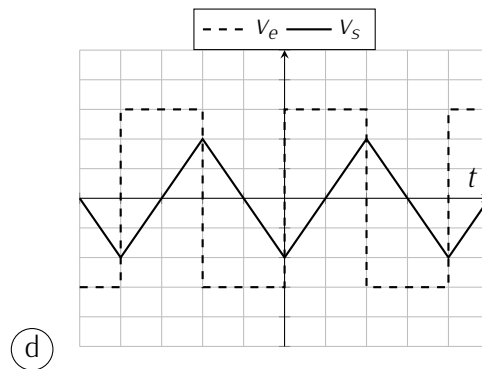
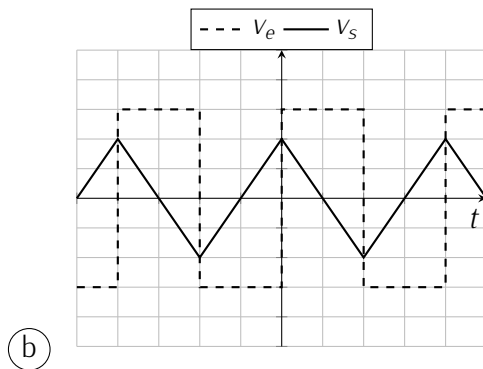
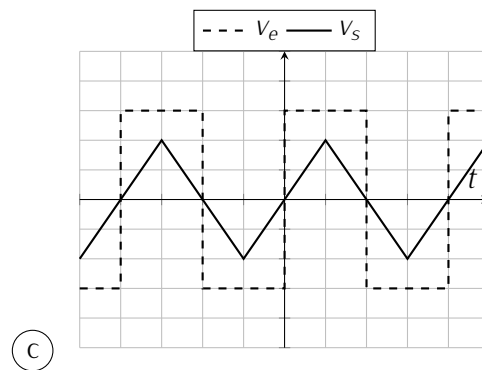
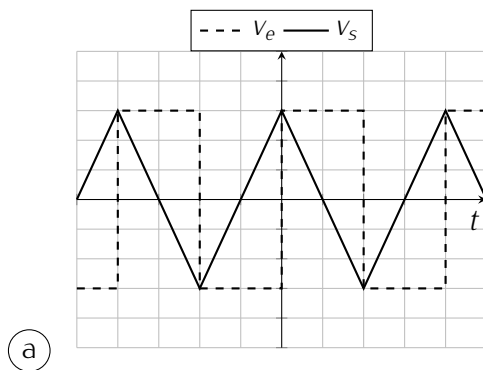
$$\underline{H} = -\frac{1}{jRC\omega}$$

avec $R = 15\text{ k}\Omega$ et $C = 25\text{ nF}$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Les réglages de l'oscilloscope sont les suivants :

- calibre vertical : 1 V/division pour les deux voies,
- calibre horizontal : 250 μs /division.



a) Donner l'équation différentielle reliant v_s et v_e

b) Pour une tension constante $v_e = E$, donner l'expression temporelle de v_s .

On ne se préoccupera pas de déterminer les éventuelles constantes d'intégration.

.....

c) Quelle est la courbe compatible avec les valeurs numériques ci-dessus ?

.....

Entraînement 14.12 — Un petit intermède.



On considère deux montages dont les gains valent respectivement

$$G_1 = 1 + \frac{R_2}{R_1} \quad \text{et} \quad G_2 = \frac{R_1 R_2}{R_1^2 + R_2^2},$$

où R_1 et R_2 sont des résistances.

a) On suppose que $\frac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer $\frac{1}{G_2}$ en fonction de α

b) On suppose encore que $\frac{R_1}{R_2} = \alpha$. Exprimer G_2 en fonction de α

c) À quelle condition a-t-on $G_1 = \frac{1}{G_2}$?

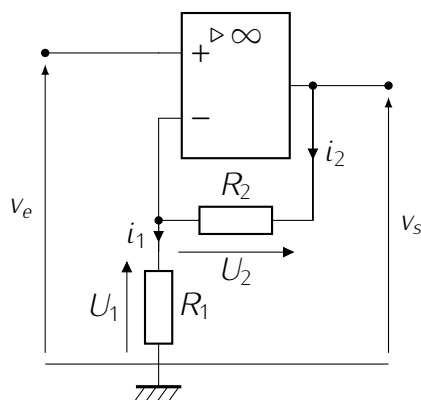
d) Pour quelle valeur de $\alpha > 0$ la quantité $\alpha + \frac{1}{\alpha}$ est minimale ?
On pourra introduire une fonction et la dériver.

Entraînement 14.13 — Montage non inverseur.



On considère le montage ci-dessous.

L'ALI est idéal et on suppose qu'il fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre les intensités i_1 et i_2 ?

b) Exprimer la tension U_1 en fonction de v_s , R_1 et R_2

c) Exprimer U_1 en fonction de v_e

d) Exprimer le gain G du montage non inverseur

e) Donner la valeur de G pour $R_1 = 2,2 \text{ k}\Omega$ et $R_2 = 33 \text{ k}\Omega$

Entraînement 14.14 — Montage amplificateur non inverseur.



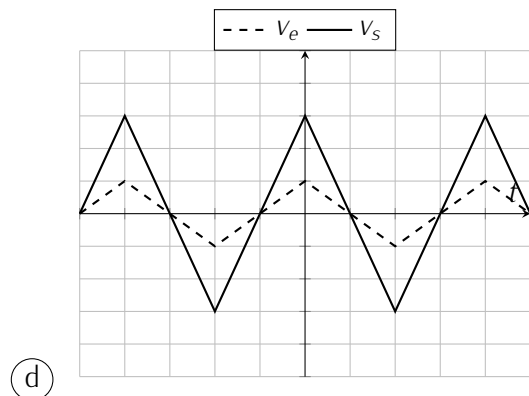
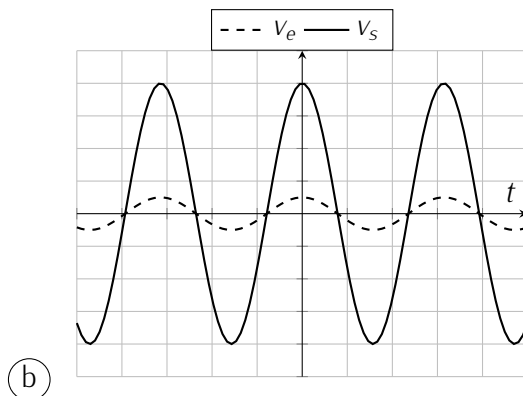
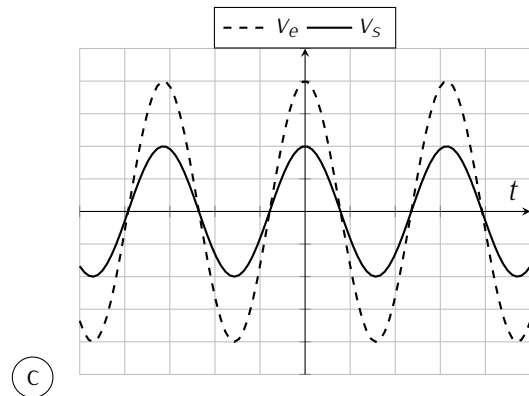
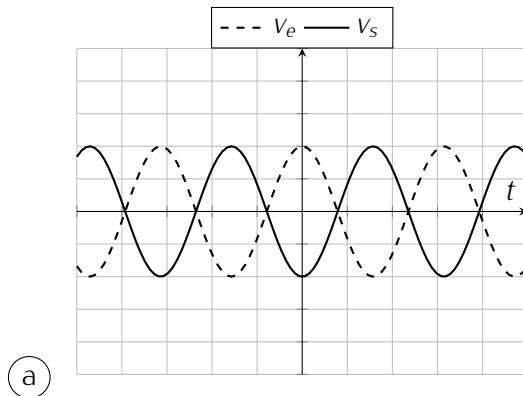
Un montage amplificateur non inverseur possède un gain

$$G = 1 + \frac{R_2}{R_1}$$

avec $R_1 = 1,5\text{k}\Omega$ et $R_2 = 7,5\text{k}\Omega$.

Les courbes suivantes représentent des allures temporelles de v_e (en pointillés) et v_s (en trait plein) en fonction du temps.

Le calibre utilisé pour v_e est de 1 V/division alors que le calibre pour v_s est de 2 V/division.



Quelles sont les courbes qui peuvent correspondre au montage non inverseur ?

.....

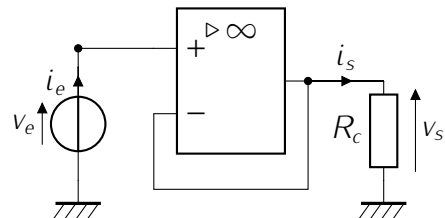
Impédances d'entrée

Entraînement 14.15 — Montage suiveur.

On considère le montage suiveur représenté ci-contre.

Le suiveur est alimenté par une source idéale de tension v_e de fréquence variable, la charge est une résistance R_c .

L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Quelle est la relation entre v_e et v_s ?

b) Quelle est l'impédance d'entrée d'un ALI idéal?

c) Exprimer l'intensité i_e traversant la source de tension.

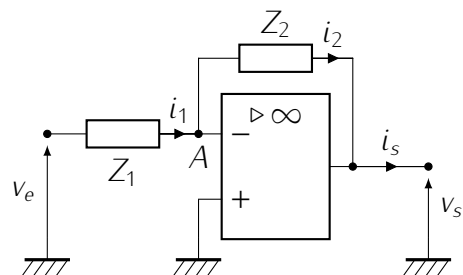
d) Quelle est l'impédance d'entrée du montage suiveur?

Entraînement 14.16 — Circuits inverseurs.

On considère le montage représenté ci-contre.

Les impédances Z_1 et Z_2 sont quelconques et la tension d'entrée v_e est sinusoïdale de pulsation ω .

L'ALI est idéal et fonctionne en régime linéaire.



a) Exprimer l'intensité i_1 en fonction de v_e et de Z_1

b) Donner l'impédance d'entrée du circuit

c) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est un condensateur.

La tension d'entrée est constante égale à 10 V.

d) Donner l'impédance d'entrée si Z_1 est une bobine

La tension d'entrée est maintenant sinusoïdale de pulsation $\omega = 6,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$.

e) Pour quel dipôle Z_1 l'impédance d'entrée a-t-elle le plus grand module : un condensateur $C = 10 \text{ nF}$ ou une résistance $R = 15 \text{ k}\Omega$?

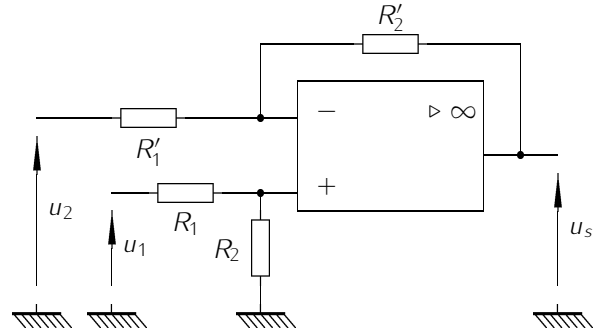
Réponses mélangées

$i_2 = -\frac{v_s}{R_2}$	$\underline{i_C} = -jC\omega \underline{U_C}$	$-\frac{E}{RC}t + K$	v_e	(c)	1 kHz	(b)
∞	$\alpha = 1$	Vrai	$i_1 = i_2$	(a) (d)	Vrai	(b) Z_1 Faux
$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{E}{RC\omega} \sin(\omega t)$	0 V	$-\frac{1}{jRC\omega}$	Vrai	$RC \frac{dv_s}{dt} = -v_e(t)$	
$i_R = i_C$	$v_s = v_e$	$i_1 = i_2$	∞	(d)	v_e	$C = 10 \text{ nF}$ Faux
Vrai	c'est un temps	$\frac{\alpha}{1 + \alpha^2}$	16	v_s	Non	$U_2 = -v_s$
$\frac{v_e}{Z_1}$	v_e	0 V	v_s	$RC \frac{dv_s}{dt} = -v_e$	$\frac{1}{RC\omega}$	Oui ∞ 0
0 A	$V^+ = V^-$	$R_1 = R_2$	Faux	(b)	0 V	$\alpha + \frac{1}{\alpha}$ $i_1 = \frac{v_e}{R_1}$
$U_1 = v_e$	Faux	$G = -\frac{R_2}{R_1}$	3,1	Faux	$\frac{R_1}{R_1 + R_2} v_s$	$1 + \frac{R_2}{R_1}$ v_s

**Exercice 1 : Circuit soustracteur**

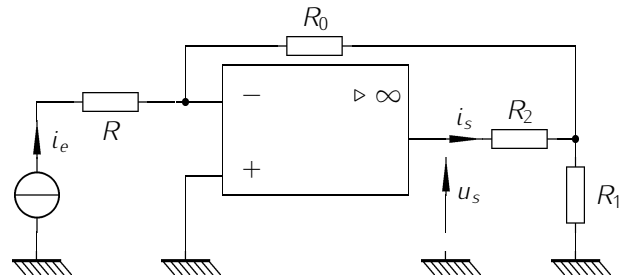
On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.

1. Déterminer l'expression de u_s en fonction de u_1 , u_2 et des résistances R_1 , R_2 , R'_1 et R'_2 .
2. Comment faut-il choisir les résistances pour que $u_s = u_1 - u_2$, justifiant ainsi le nom de circuit soustracteur ?

**Exercice 2 : Amplificateur de courant.**

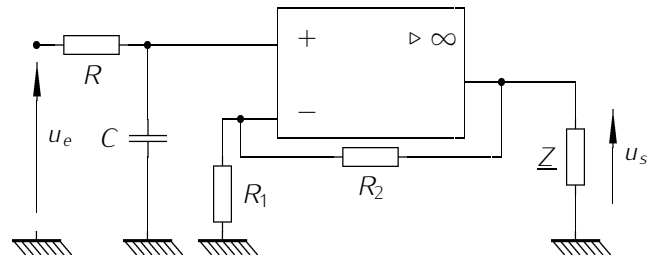
On considère le circuit ci-dessous dans lequel l'AO. est idéal et fonctionne en régime linéaire.

Déterminer, en fonction des résistances, le gain en courant $G_i = \frac{i_s}{i_e}$.

**Exercice 3 : Filtre actif**

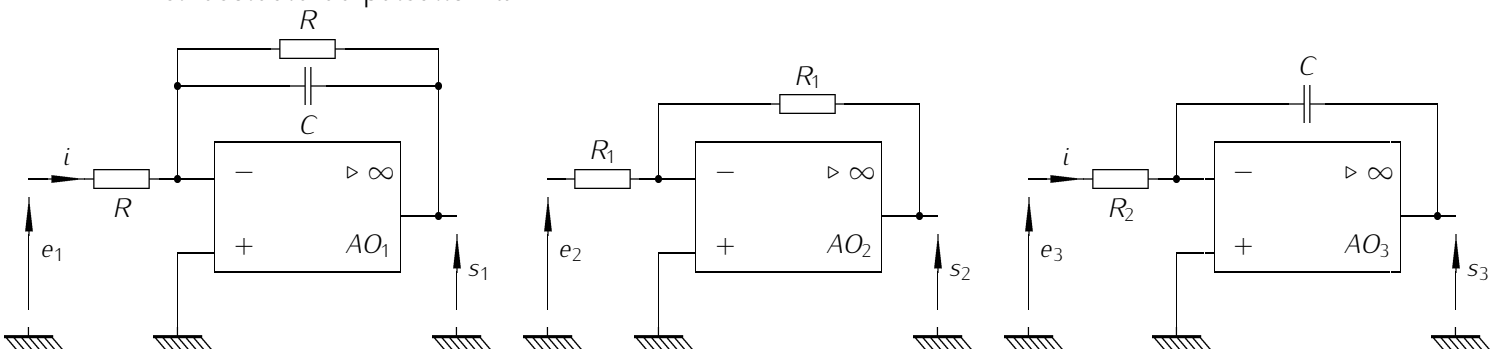
Soit le filtre représenté ci-dessous et pour lequel $R = 100 \, \Omega$, $C = 10 \, \mu\text{F}$, $R_1 = 1 \, \text{k}\Omega$, $R_2 = 9 \, \text{k}\Omega$ et l'amplificateur opérationnel est parfait et fonctionne en régime linéaire.

1. Quelle est la nature du filtre.
2. Vérifier en déterminant la fonction de transfert $H(j\omega)$.
Faire une remarque sur l'influence de Z , l'impédance de charge. Utilité ?
3. Quelle est la fréquence de coupure ?
4. Tracer le diagramme de BODE du filtre.

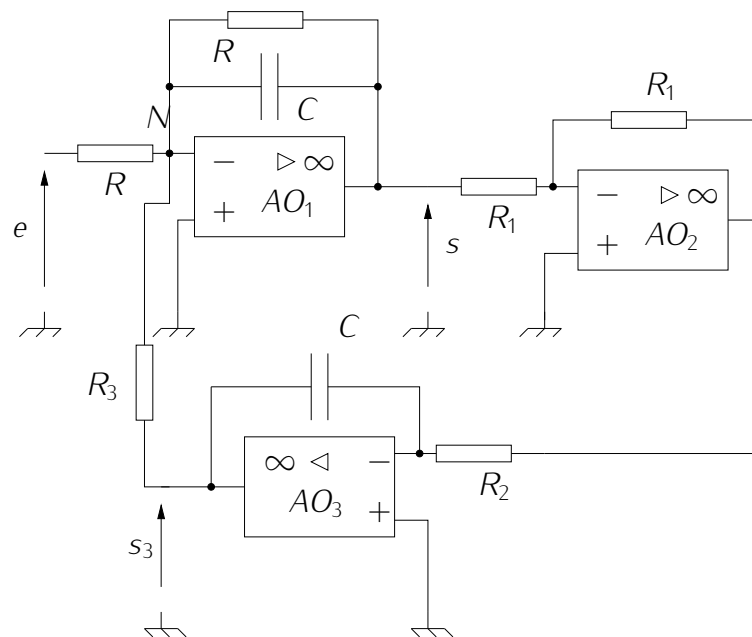
**Exercice 4 : Filtre passe bande**

Les amplificateurs (AO.) utilisés sont idéaux.

1. Calculer les fonctions de transfert des 3 circuits représentés figure 1 alimentés par une tension sinusoïdale de pulsation ω .



2. Les trois circuits sont associés suivant le schéma représenté figure 2 :



Calculer la fonction de transfert $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}}$. Montrer qu'elle est de la forme :

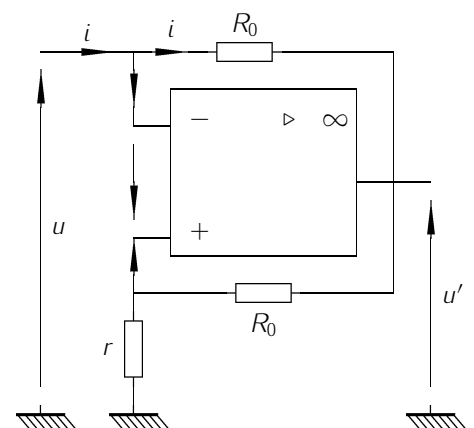
$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{-H_0}{1 + j\omega a + \frac{b}{j\omega}}$$

où H_0 , a et b font intervenir les éléments constitutifs du circuit.

Quelle est la nature du filtre obtenu ?

Exercice 5 : Amplificateur opérationnel et résistance

On cherche la relation liant u et i (convention récepteur). Commenter le résultat. À quoi peut servir ce montage ?



ÉNERGIE

Définir le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

ÉNERGIE

Définir le travail de la force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ entre les points M_1 et M_2 .

ÉNERGIE

Définir la puissance d'une force $\vec{F}$ s'exerçant sur un point M se déplaçant à la vitesse $\vec{v}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ entre les points M_1 et M_2 .

ÉNERGIE

Énoncer le théorème de la puissance cinétique.

ÉNERGIE

Démontrer le théorème de la puissance cinétique.

ÉNERGIE

Énoncer le théorème de l'énergie cinétique.

ÉNERGIE

Démontrer le théorème de l'énergie cinétique.

ÉNERGIE

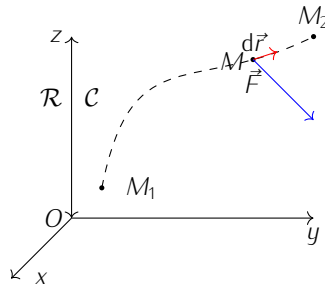
Qu'est-ce qu'un travail moteur ? Qu'est-ce qu'un travail résistant ?

ÉNERGIE

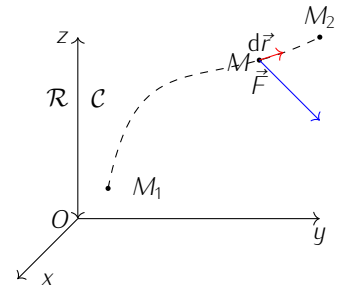
Qu'est-ce qu'une force conservative ?

$$\mathcal{P} = \frac{\delta W}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

$$W_{M_1 \rightarrow M_2}(\vec{F}) = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



$$\delta W(\vec{F}) = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$



Dans un référentiel galiléen, la variation d'énergie cinétique d'un point matériel entre deux instants est égale au travail de la résultante des forces appliquées entre ces deux instants

$$W = \Delta E_c$$

Pour un point M de masse m , d'accélération $\vec{a}$ et soumis à $\vec{F}$, dans un référentiel galiléen : $\vec{F} = m\vec{a}$ d'après le PFD. Donc :

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right)$$

On définit

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

Ainsi

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE_c}{dt}$$

Dans un référentiel galiléen, la puissance de la force exercée sur un point matériel est égale à la dérivée temporelle de son énergie cinétique.

$$\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v} = \frac{dE_c}{dt}$$

avec

$$E_c = \frac{1}{2} m v^2$$

On dit que $\vec{F}$ est une force conservative ou encore qu'elle dérive d'une énergie potentielle E_p si

$$dE_p = -\delta W$$

soit

$$F_x = -\frac{dE_p}{dx}$$

si le problème est à un degré de liberté x . Sinon, dans le cas général

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}}(E_p)$$

- si le travail est moteur $W > 0$ " $\vec{F}$ dans le sens" du déplacement alors $\Delta E_c > 0$ et v augmente.
- si le travail est résistant $W < 0$, alors $\Delta E_c < 0$ et v diminue.
- si aucune force ne travaille, $\Delta E_c = 0$ et la vitesse numérique v reste constante.

Comme $\mathcal{P}.dt = \delta W = dE_c$, entre deux instants t_1 et t_2 ,

$$W = \int_{M_1}^{M_2} \delta W = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}.dt$$

$$= \int_{t_1}^{t_2} dE_c = E_c(t_2) - E_c(t_1)$$

Ainsi

$$W = \Delta E_c$$

ÉNERGIE

Exprimer l'énergie potentielle élastique d'un ressort ?

ÉNERGIE

Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur ?

ÉNERGIE

Exprimer l'énergie potentielle de gravitation ?

ÉNERGIE

Énoncer le théorème de l'énergie mécanique.

ÉNERGIE

Démontrer le théorème de l'énergie mécanique.

ÉNERGIE

Donner des exemples de forces non conservatives.

ÉNERGIE

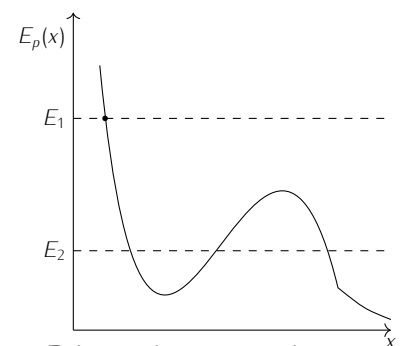
Énoncer le théorème de la puissance mécanique.

ÉNERGIE

Démontrer le théorème de la puissance mécanique.

ÉNERGIE

Soit un mobile suivant le profil d'énergie potentielle suivant :



Décrire la nature de son mouvement selon la valeur de l'énergie mécanique.

$$E_p = -\mathcal{G} \frac{m_1 m_2}{r}$$

avec $E_p(r \rightarrow \infty) = 0$

$$E_p = \pm mgz + cste$$

avec + si l'axe (Oz) est ascendant, - s'il est descendant.

$$E_p = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$$

en choisissant $E_p = 0$ pour $l = l_0$.

- Les forces de frottements (solides ou fluides)
- l'action d'un fil
- la réaction du support

Soit un point matériel M soumis à des forces conservatives $\vec{F}_c$ dérivant de E_p et des forces non conservatives $\vec{F}_{nc}$. Soit $\vec{F} = \vec{F}_c + \vec{F}_{nc}$ la résultante.

D'après le théorème de l' E_c , entre deux instants t_1 et t_2 ,

$$W = W_c + W_{nc} = \Delta E_c = E_{c2} - E_{c1}$$

$\vec{F}_c$ est conservative donc

$$W_c = -\Delta E_p = E_{p1} - E_{p2}$$

$$\Rightarrow E_{c2} - E_{c1} = E_{p1} - E_{p2} + W_{nc}$$

$$\Rightarrow E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = W_{nc}$$

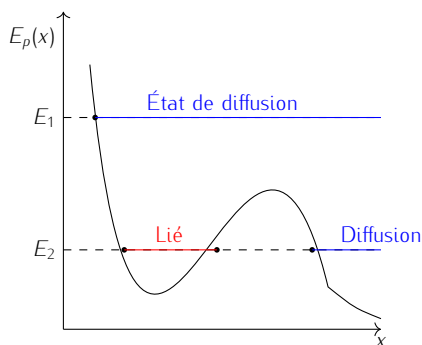
on pose $E_m = E_c + E_p$, l'énergie mécanique du point M (dépend du référentiel).

On a donc

$$E_{c2} + E_{p2} - (E_{c1} + E_{p1}) = E_{m2} - E_{m1} \Rightarrow \Delta E_m = W_{nc}$$

En référentiel galiléen, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel est égale au travail des forces non conservatives

$$\Delta E_m = W_{nc}$$



Pendant une durée dt , le théorème de l'énergie mécanique s'écrit sous la forme différentielle $dE_m = \delta W_{nc}$ et en divisant par dt , on en déduit

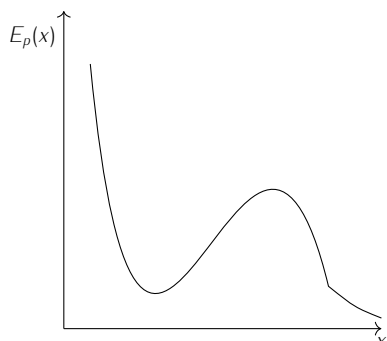
$$\frac{dE_m}{dt} = \frac{\delta W_{nc}}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

En référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la puissance des forces non conservatives

$$\frac{dE_m}{dt} = \mathcal{P}_{nc}$$

ÉNERGIE

Soit un mobile suivant le profil d'énergie potentielle suivant :



Où se trouvent ses positions d'équilibre. Préciser leur stabilité.

ÉNERGIE

On considère une particule de masse m dans un champ d'énergie potentielle $E_p(x)$. Montrer qu'au voisinage d'une position d'équilibre stable le mouvement de la masse est décrit par un oscillateur harmonique.

Au voisinage de la position
d'équilibre stable x_e :

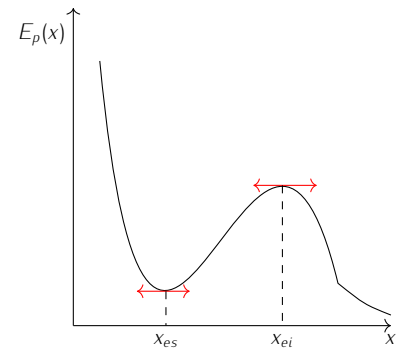
$$E_p(x) \simeq E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x - x_e)^2$$

avec $K = \frac{d^2 E_p}{dx^2}(x = x_e)$ ainsi,

$$E_m = E_p(x_e) + \frac{1}{2}K(x - x_e)^2 + \frac{1}{2}m\dot{x}^2$$

et en dérivant par rapport au
temps (TPM) puis en
simplifiant par $\dot{x} \neq 0$ (sauf
solution triviale), on obtient

$$\ddot{x} + \frac{K}{m}x = \frac{k}{m}x_e$$



x_{es} est une position
d'équilibre stable.

x_{ei} est une position
d'équilibre instable.

M_3 – Approche énergétique du point matériel

Conseils pour ce TD

- Ceux de M_2 .
- On choisit d'utiliser une méthode énergétique quand on traite un problème à un degré de liberté (x ou θ par exemple).
- Un théorème énergétique (théorème de l'énergie cinétique, de l'énergie mécanique ...) permet d'aboutir directement à une équation scalaire dans laquelle il faut faire apparaître le paramètre et ses dérivées temporelles.
- Les extrema de l'énergie potentielles permettent de déterminer les positions d'équilibre et leur stabilité : **c'est la dérivée de E_p par rapport au paramètre** qu'il faut considérer.
- Le théorème de la puissance mécanique permet de déterminer l'équation différentielle du mouvement : il faut dans ce cas **dériver E_m par rapport au temps**.
- Il faut connaître l'expression générale de l'énergie potentielle de pesanteur $E_{p,\text{pes}} = \pm mgz + Cte$ et celle de l'énergie potentielle élastique $E_{p,\text{éla}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2$.
- Vérifier systématiquement l'homogénéité (le travail s'exprime en J i.e N.m la puissance en W i.e N.m.s⁻¹) et la cohérence des résultats (par exemple, le travail d'une force qui s'oppose au déplacement est négatif).

Énergies potentielles

Entraînement 15.1 — La juste formule.



On considère un point matériel de masse m plongé dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On se place dans un repère cartésien $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ tel que $\vec{g} = -g\vec{e}_y$, le point O étant pris comme origine de l'énergie potentielle. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur ?

(a) mgx

(b) $-mgy$

(c) mgz

(d) mgz

.....

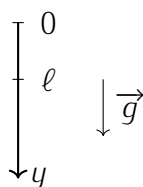


Entraînement 15.2 — Plusieurs expressions d'énergie potentielle de pesanteur.

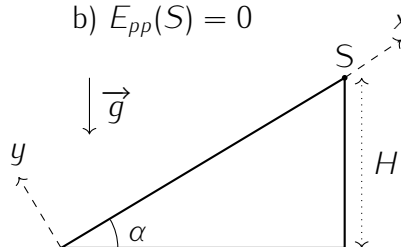


Déterminer la fonction énergie potentielle de pesanteur d'un point matériel de masse m associée aux situations suivantes :

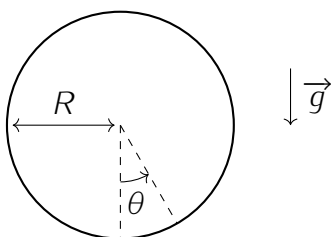
a) $E_{pp}(\ell) = 0$



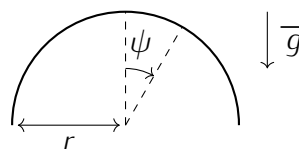
b) $E_{pp}(S) = 0$



c) $E_{pp}(\theta = \pi/2) = 0$



d) $E_{pp}(\psi = 0) = E_0$



a) $E_{pp}(y) = \dots\dots\dots$

c) $E_{pp}(\theta) = \dots\dots\dots$

b) $E_{pp}(x) = \dots\dots\dots$

d) $E_{pp}(\psi) = \dots\dots\dots$

Entraînement 15.3 — La juste formule... le retour.



On considère un point matériel M de masse m astreint à se déplacer selon un axe (Oy) horizontal. Il est attaché à un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . L'autre extrémité du ressort est fixée en O.

Quelle est l'expression de l'énergie potentielle élastique du point M pour que celle-ci soit nulle lorsque l'allongement du ressort est nul ?

(a) $\frac{1}{2}ky^2$

(b) $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2$

(c) $\frac{1}{2}k(y^2 - \ell_0^2)$

(d) $-\frac{1}{2}k(\ell_0 - y)^2$

.....

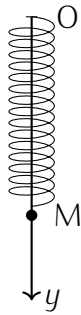


Entraînement 15.4 — Expression de l'énergie potentielle élastique.

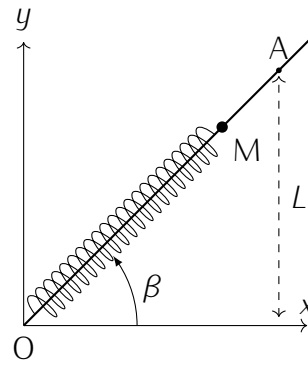


Déterminer la fonction énergie potentielle élastique associée aux situations suivantes, où tous les ressorts sont de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k :

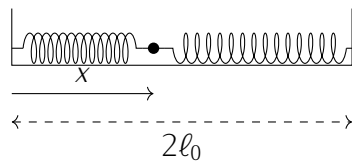
a) $E_{pe}(y = 0) = 0$



b) $E_{pe}(A) = 0$



c) $E_{pe}(x = \ell_0) = E_0$



a) $E_{pe}(y) =$

b) $E_{pe}(x) =$

c) $E_{pe}(x) =$

Travail d'une force

Entraînement 15.5 — Une force de frottement.



On considère le travail $W_{AB} = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell}$ d'une force de frottement $\vec{F} = -h \frac{\vec{v}}{|\vec{v}|}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point matériel subissant la force et h est une constante.

Déterminer W pour les chemins suivants :

a) Un segment reliant $A(0, 0)$ et $B(\ell, 0)$

b) Un arc de cercle d'angle α et de rayon R

c) Un rectangle ABCD de côtés a et b

d) Un triangle ABC de côtés a, b, c

e) En comparant les résultats obtenus, peut-on dire que la force est conservative ?

(a) Oui

(b) Non

.....

Théorèmes énergétiques

Entraînement 15.6 — Freinage et variation d'énergie cinétique.



On considère une voiture (assimilée à un point matériel de masse m) se déplaçant le long d'une route rectiligne horizontale et dont la vitesse initiale au début de la phase de freinage vaut $\vec{v} = v_0 \vec{e}_x$.

En freinant, le véhicule est soumis à une force de frottement $\vec{F} = -h \vec{e}_x$.

Quelle est l'expression de la distance d'arrêt d de la voiture ?

(a) $\frac{2mv_0^2}{h}$

(b) $\frac{mv_0^2}{h}$

(c) $\frac{mv_0^2}{2h}$

.....

Entraînement 15.7 — Pendule simple.



Un pendule simple est constitué d'un fil de longueur $\ell = 1,0$ m auquel est accroché une masse $m = 100$ g.

À $t = 0$, on donne à cette masse une vitesse horizontale $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ où $v_0 = 2,0$ m · s⁻¹.

On note θ_0 l'angle pour lequel la masse rebrousse chemin.

a) Exprimer $\cos(\theta_0)$

b) Calculer θ_0

Entraînement 15.8 — Trampoline simplifié.



Un ressort de longueur à vide $\ell_0 = 30\text{ cm}$, de raideur $k = 1,0 \cdot 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$, sans masse, est posé sur le sol à la verticale. On lâche d'une hauteur $H = 2,0\text{ m}$ et sans vitesse initiale une masse ponctuelle $m = 1,0\text{ kg}$. Après une durée de chute libre sans frottement, la masse atteint le ressort, le comprime jusqu'à ce que celui-ci la propulse vers le haut comme le ferait un trampoline.

En admettant que la masse quitte le ressort quand $z = \ell_0$, calculer :

a) La vitesse de la masse lors du contact avec le ressort

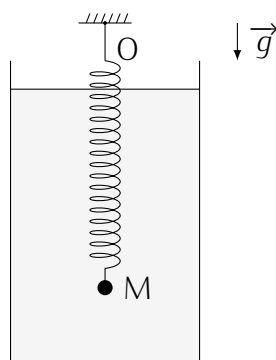
b) L'altitude minimale atteinte par la masse

c) L'altitude maximale de la masse (en fin de remontée)

Entraînement 15.9 — Oscillateur vertical.



Un point M de masse m est accroché à une paroi horizontale fixe par l'intermédiaire d'un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0 . Son mouvement s'effectue dans un liquide qui produit une force de frottements fluides linéaire $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$, où $\alpha > 0$. On néglige la poussée d'Archimède, on ne considère que des mouvements verticaux dans le champ de pesanteur $\vec{g}$.



a) On note z la position de M par rapport à O.

Déterminer, par une méthode énergétique, l'équation différentielle vérifiée par z .

.....

b) On note à présent ζ la position de M par rapport à sa position à l'équilibre.

Déterminer l'équation différentielle vérifiée par ζ .

.....

Mouvements conservatifs et positions d'équilibre

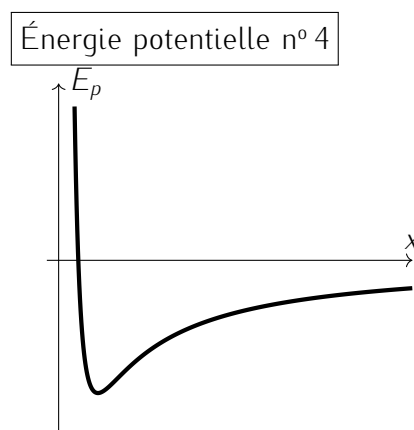
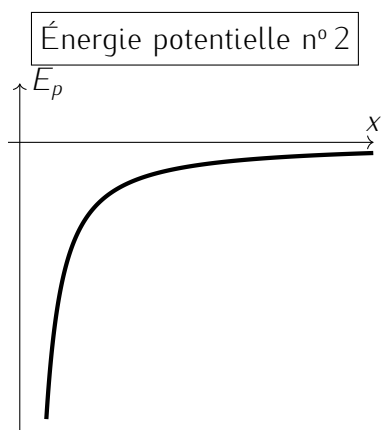
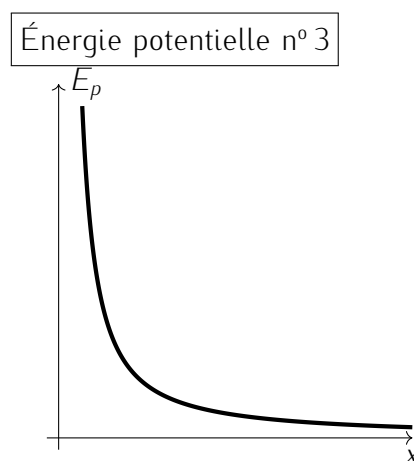
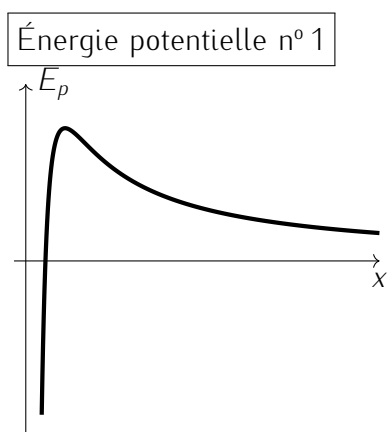
Entraînement 15.10 — Profils d'énergies potentielles.



Les quatre profils suivants représentent la fonction énergie potentielle

$$E_p(x) = \frac{\alpha}{x} + \frac{\beta}{x^2}$$

avec α, β des réels non nuls.



Attribuer à chacune des figures ci-dessus les bons signes pour α et β , en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne :

(a) $\alpha > 0$ et $\beta > 0$

(c) $\alpha < 0$ et $\beta > 0$

(b) $\alpha > 0$ et $\beta < 0$

(d) $\alpha < 0$ et $\beta < 0$

a) Énergie potentielle n° 1

c) Énergie potentielle n° 3

b) Énergie potentielle n° 2

d) Énergie potentielle n° 4



Entraînement 15.11 — Autour d'une position d'équilibre.



On donne l'expression de potentiels E_p dans chacun desquels évolue un point matériel de masse m .

Déterminer dans chaque cas la position d'équilibre stable.

a) Pour $E_p(\theta) = mg\ell(1 - \cos(\theta))$:

$\theta_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

b) Pour $E_p(z) = \frac{1}{2}\kappa z^2 + \frac{1}{4}\lambda z^4$ avec $\kappa > 0$ et $\lambda < 0$:

$z_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

c) Pour $E_p(x) = U_0 e^{\beta x^2}$ avec $U_0, \beta > 0$:

$x_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

d) Pour $E_p(\phi) = E_0 \sin^2(\phi - a)$ avec $E_0 > 0$, $\phi \in [0, \pi[$ et $a \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$:

$\phi_{\text{eq}} = \dots\dots\dots$

Entraînement 15.12 — État lié ou état de diffusion ?

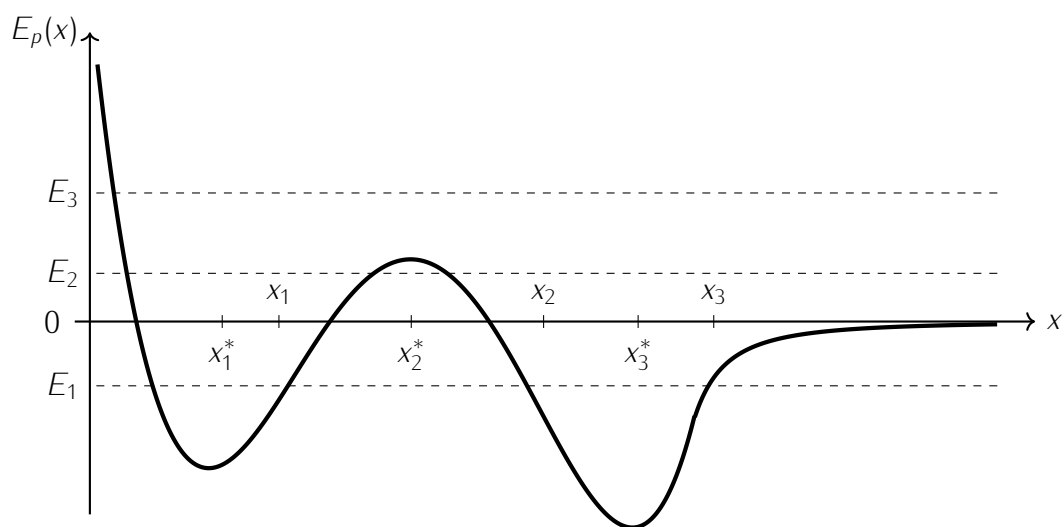


On considère le profil suivant d'énergie potentielle (les abscisses étoilées et l'abscisse x_3 serviront dans l'entraînement suivant).

Pour chaque état suivant, étant donné les valeurs de l'énergie mécanique et de la position initiale d'un point matériel, dire si ce dernier se trouve :

(a) dans un état lié

(b) un état de diffusion.



a) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_1 \dots\dots$

d) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_2 \dots\dots$

b) $E_m = E_1$ et $x(0) = x_2 \dots\dots$

e) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_1 \dots\dots$

c) $E_m = E_2$ et $x(0) = x_1 \dots\dots$

f) $E_m = E_3$ et $x(0) = x_2 \dots\dots$

Entraînement 15.13 — Analyse d'un profil d'énergie potentielle.



On reprend le profil d'énergie potentielle de l'entraînement précédent.

Pour chacune des positions suivantes, déterminer si elle est stable ou instable, et si le mouvement au voisinage de ces positions est périodique et/ou harmonique, en indiquant laquelle des réponses suivantes est la bonne.

- | | |
|------------------------|--------------------------|
| (a) équilibre stable | (c) mouvement périodique |
| (b) équilibre instable | (d) mouvement harmonique |

Plusieurs bonnes réponses sont possibles.

- | | | | |
|-------------------------------|----------------------|--------------------------------------|----------------------|
| a) Voisinage de x_1^* | <input type="text"/> | c) Voisinage de x_3^* | <input type="text"/> |
| b) Voisinage de x_2^* | <input type="text"/> | d) Région entre x_2 et x_3 | <input type="text"/> |

Entraînement 15.14 — Vitesse à l'infini.



On considère le profil d'énergie potentielle des deux entraînements précédents.

Un point matériel de masse $m = 2,30 \text{ kg}$ est abandonné avec l'énergie $E_3 = 1,30 \text{ kJ}$.

Calculer la vitesse du point matériel à l'infini

Réponses mélangées

- | | | | | | | |
|------------|---------------------|-----------------|-----------------------------|---|---|-------------------------------------|
| (c) | $-hR\alpha$ | (a), (c) et (d) | $1 - \frac{v_0^2}{2g\ell}$ | (b) | 2,0 m | 0 |
| | $-(2a + 2b)h$ | 33,6 m/s | $mgr(\cos(\psi) - 1) + E_0$ | 0,11 m | (a) | |
| (a) et (c) | (b) | (a) | (b) | $\frac{1}{2}k\left(\frac{x}{\cos(\beta)} - \ell_0\right)^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{L}{\sin(\beta)} - \ell_0\right)^2$ | | |
| (b) | (b) | a | $-h\ell$ | $\zeta + \frac{\alpha}{m}\dot{\zeta} + \frac{k}{m}\zeta = 0$ | (a) | $5,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ |
| | $mg(\ell - y)$ | (b) | 0 | $mg(x \sin(\alpha) - H)$ | $\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = g + \frac{k\ell_0}{m}$ | |
| (b) | $-mgR \cos(\theta)$ | 0 | (a) | $\frac{1}{2}k(y - \ell_0)^2 - \frac{k\ell_0^2}{2}$ | $E_0 + k(x - \ell_0)^2$ | |
| (d) | (a), (c) et (d) | 0,65 rad = 37° | (c) | $-(a + b + c)h$ | (c) | |



Exercice 1 : Tir vertical

Un obus est lancé depuis le sol, selon la verticale ascendante avec une vitesse initial $\vec{v}_0 = v_0 \cdot \vec{e}_z$. On cherche l'altitude maximale H atteinte. On utilisera une méthode énergétique et on négligera les frottements.

1. Faites un dessin, précisez le référentiel, l'objet d'étude.
2. Quelles sont les forces agissant sur l'obus ?
3. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle de l'obus ?
4. Quelle est l'expression de son énergie cinétique ?
5. Que peut-on dire de l'énergie mécanique de l'obus ?
6. Exprimer l'énergie mécanique en $z = 0$ et en $z = H$.
7. En déduire l'altitude maximale H .



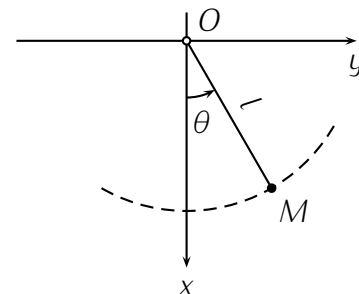
Exercice 2 : Pendule simple

On considère le pendule simple représenté ci-contre.

Le point matériel se déplace dans le plan vertical xOy .

On souhaite déterminer, par utilisation du théorème de la puissance mécanique, l'équation différentielle à laquelle obéit l'angle θ .

On considérera des frottements linéaires du type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où $\vec{v}$ est la vitesse de M dans le référentiel lié au sol et considéré comme galiléen.



1. Montrez que l'énergie potentielle du point M est $mgl(1 - \cos(\theta))$.
2. Quelle est l'expression de sa vitesse dans les coordonnées cylindro-polaire ?
3. En déduire l'expression de l'énergie mécanique du point M .
4. Que vaut la puissance la force de frottement ? Et la puissance de la force du fil sur M ?
5. Appliquez le théorème de la puissance cinétique.
6. En déduire que le mouvement de M est décrit par un oscillateur harmonique amorti.



Exercice 3 : Au tri postal

On étudie un convoyeur à colis présent dans un centre de tri postal.

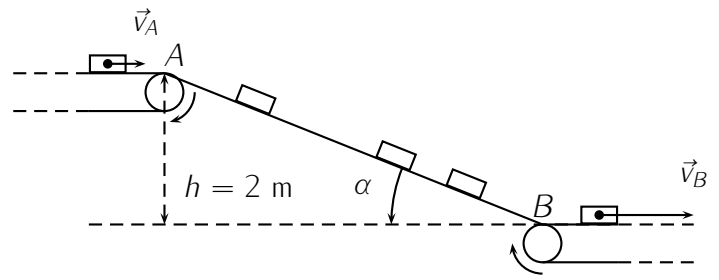
Les colis sont déchargés par un tapis roulant à la vitesse $v_A = 0,5 \text{ m.s}^{-1}$, ils glissent ensuite sur un plan incliné d'angle α par rapport à l'horizontale. Le coefficient de frottement solide entre les colis et le plan incliné est $f = 0,4$.

Ils sont ensuite pris en charge au niveau du point

B par un nouveau tapis roulant qui avance à la vitesse $v_B = 0,2 \text{ m.s}^{-1}$.

On veut déterminer l'expression puis la valeur de α pour que le convoyeur fonctionne correctement, c'est à dire pour que les colis arrivent en B avec la vitesse du deuxième tapis roulant.

On rappelle que suivant les lois de Coulomb sur les frottements solides, lors du glissement, $T = f.N$ où T et N sont respectivement les normes de la réaction tangentielle et normale du support.

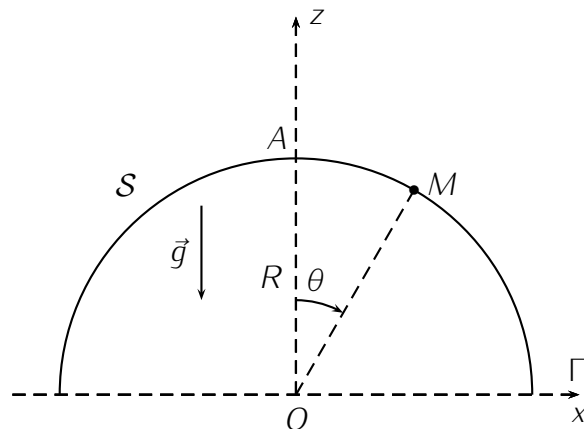


1. Faire un schéma. Définir le système étudié et le référentiel d'étude.
2. Dresser l'inventaire des forces s'appliquant sur le système.
3. En appliquant la seconde loi de Newton, projetée selon un axe perpendiculaire au tapis, montrez que la réaction normale du support (N) vaut $mg \cos(\alpha)$.
4. En déduire l'expression de la réaction tangentielle $\vec{T}$ (attention au signe !)
5. Écrire le théorème de l'énergie cinétique entre les points A et B .
6. Montrez que le travail de la force T est $-\frac{fmg h}{\tan \alpha}$.
7. Que vaut le travail du poids ?
8. En déduire la valeur que $\tan \alpha = \frac{2fgh}{v_A^2 - v_B^2 + 2gh}$.
9. Effectuer l'application numérique.



Exercice 4 : Esquimau sur son igloo

Un esquimau, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'abandonne sans vitesse initiale du sommet A de son igloo assimilable à une demi sphère $\mathcal{S}$ de rayon R et de centre O posée sur un plan Π . On considère que le glissement s'effectue sans frottement.

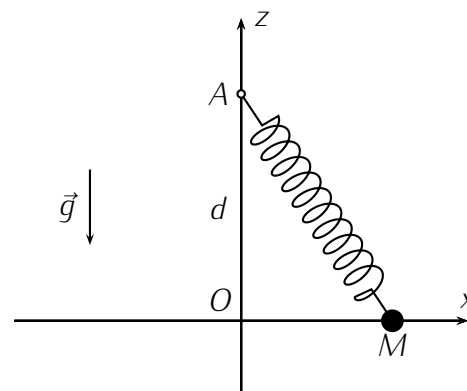


1. À la suite d'un déséquilibre infinitésimal, M se met en mouvement en restant dans le plan vertical Oxy .
On admet que, dans la phase (1) de son mouvement, M reste en contact avec $\mathcal{S}$, sa position est repérée par l'angle $\theta = (\vec{OA}, \vec{OM})$.

- (a) Faites un schéma, un bilan des forces appliquées à M .
 - (b) Quelles sont les forces conservatives ?
 - (c) Quelles sont les forces qui travaillent ?
 - (d) Exprimez l'altitude de M en fonction de θ .
 - (e) Appliquez le théorème de l'énergie cinétique entre la position initiale et une position quelconque de M .
 - (f) Déterminer la vitesse de M en fonction de θ , g et R .
2. (a) Appliquez la seconde loi de Newton à M .
 - (b) Lorsque M est en contact avec l'igloo, que peut-on dire de sa trajectoire ?
 - (c) En déduire une expression de son accélération radiale en fonction de v^2 .
 - (d) Utilisez le résultat de la question précédente 1) pour exprimer N la norme de $\vec{N}$ la réaction de $\mathcal{S}$ sur M en fonction de m , g et θ .
3. Quel est le signe de N ? Peut-elle être négative ? En déduire la valeur θ_0 de θ pour laquelle M n'est plus en contact avec $\mathcal{S}$ (phase (2) du mouvement de M) et v_0 la valeur correspondante de v , la vitesse de M .
 4. Quelle est la forme de la trajectoire ultérieure de M ?

Exercice 5 : Bifurcation : discussion graphique

Un point matériel de masse m situé en M se déplace sans frottement le long d'un axe horizontal Ox . Il est lié par l'intermédiaire d'un ressort de longueur à vide l_0 et de constante de raideur k , à un point A situé à la verticale de O tel que $OA = d$. On note l la longueur AM du ressort.



1. Appliquez le théorème de Pythagore pour trouver l'expression de la longueur l du ressort en fonction de d et x .
2. Quelle est l'expression de l'énergie potentielle d'un ressort ?
3. Déterminer et tracer l'énergie potentielle du point $E_p(x)$ dans le cas $d \geq l_0$ puis et $d < l_0$. (Une petite étude de fonction pourrait être nécessaire.)
4. À quelle condition sur E_p , une position est une position d'équilibre ? une position d'équilibre stable ? En déduire les positions d'équilibre x_{eq} et leur stabilité.
5. Représenter x_{eq} en fonction de d . Analyser physiquement ce qui se passe lorsqu'on fait décroître d à partir d'une valeur supérieure à l_0 ?
6. Dans le cas $d \geq l_0$, déterminer la période T_0 des petites oscillations du point matériel M autour de O . (Penser à utiliser le développement de Taylor Young de E_p au voisinage de x_{eq} .)

Exercice 6 : Mesure d'un coefficient de viscosité

Une sphère de rayon R est animée d'une vitesse $\vec{v}$, plongée dans un liquide de viscosité η , est soumise à une force de frottement qui, lorsque la vitesse est faible (régime laminaire), a pour expression : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ (formule de Stokes).

Une telle sphère de masse m est suspendue à un ressort de raideur k . Sa période d'oscillation dans l'air, où le frottement est négligeable, est T_0 .

On la plonge dans un liquide de coefficient de frottement η ; sa pseudo-période est alors T .

Donner l'expression de η en fonction des caractéristiques de la sphère, de T et T_0 .

Note : on modélisera la sphère par un point matériel M , on posera $2\alpha = \frac{6\pi\eta R}{m}$ et on négligera la poussée d'Archimède.

Exercice 7 : Molécule HCl

Une molécule HCl est modélisée par deux atomes : H et Cl , séparés par une distance r sur un axe supposé fixe dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}_g$ d'origine Cl . L'atome H , assimilé à un point matériel de masse $m = 1,66 \cdot 10^{-27}$ kg est en mouvement dans $\mathcal{R}_g$ sous l'action de forces dérivant d'une énergie potentielle

$$E_p = \frac{C}{r^{12}} - \frac{K}{r} \quad \text{avec } C = 1,06 \cdot 10^{-138} \text{ J.m}^{12} \text{ et } K = 92,16 \cdot 10^{-30} \text{ J.m}$$

1. Tracer l'allure de $E_p(r)$ et indiquer, puis calculer la position d'équilibre r_0 . Discuter la stabilité de la position d'équilibre r_0 .
2. Quelle est l'énergie de dissociation de la molécule HCl ?
3. Déterminer la fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre.

PARTICULES CHARGÉES

Quelle est l'expression de la force de Lorentz ?

PARTICULES CHARGÉES

Montrer que l'interaction gravitationnelle est négligeable face à l'interaction électromagnétique.

PARTICULES CHARGÉES

Montrer que le champ magnétique ne peut pas modifier la valeur de la vitesse.

PARTICULES CHARGÉES

Montrer que la force du champ électrique est conservative.

PARTICULES CHARGÉES

Établir l'équation horaire de la trajectoire d'une particule chargée dans $\vec{E} = E\vec{e}_z$.

PARTICULES CHARGÉES

Établir le système d'équations couplées régissant le mouvement d'une particule chargée dans $\vec{B} = B\vec{e}_z$

PARTICULES CHARGÉES

Retrouver le rayon de la trajectoire d'une particule chargée dans $\vec{B}$ (mouvement circulaire et $\vec{v} \perp \vec{B}$)

D'après le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{dE_c}{dt} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \cdot \vec{v}$$

Or, $\vec{v} \wedge \vec{B}$ est perpendiculaire à $\vec{v}$ ainsi

$$\frac{dE_c}{dt} = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

Seul le champ électrique peut modifier l'énergie cinétique.

Pour deux électrons distants de r la force de gravitation est :

$$F_g = G \frac{m_e^2}{r^2}$$

La force électrostatique est :

$$F_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{e^2}{r^2}$$

Ainsi

$$\frac{F_g}{F_e} = \frac{G m_e^2}{\frac{1}{4\pi\epsilon_0} e^2} \simeq 10^{-42}$$

$$\vec{F} = q \left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

La seconde loi de Newton donne $m\vec{a} = q \left(\vec{v} \wedge \vec{B} \right)$ avec $\vec{v} = \dot{x}\vec{e}_x + \dot{y}\vec{e}_y + \dot{z}\vec{e}_z$, ainsi

$$\begin{cases} \ddot{x} = \frac{qB}{m} \dot{y} \\ \ddot{y} = -\frac{qB}{m} \dot{x} \end{cases}$$

$$\begin{cases} y(t) = v_0 \cos \alpha t \\ z(t) = \frac{1}{2} \frac{qE}{m} t^2 + v_0 \sin \alpha t \end{cases}$$

Soit $\vec{E} = E\vec{e}_x$ alors le travail élémentaire de la force électrique est $\delta W = \vec{F}_E \cdot d\vec{r} = qE dx = -dE_p$ avec

$$E_p = -qEx + cste$$

On a aussi $E_p = qV$ avec V le potentiel électrique.

Le champ $\vec{B}$ ne peut pas modifier la valeur de v , le mouvement est donc circulaire uniforme, ainsi la seconde loi de Newton écrite dans la base cylindrique donne :

$$-m \frac{v^2}{r} = qBv$$

Soit

$$R = |r| = \frac{mv}{|qB|}$$

M_4 – Particule dans un champ électromagnétique

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_3 .
- Entraînez-vous à déterminer la direction et le sens de la force de Lorentz.
- Pour calculer la vitesse numérique v d'une particule chargée, privilégiez l'utilisation du théorème de l'énergie cinétique.
- Il faut être capable de retrouver rapidement le rayon de courbure de la trajectoire circulaire d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ seul : $R = \frac{mv}{|q|B}$.

Préliminaires

Entraînement 16.1 — Électron-volt.



Le produit d'une charge électrique par une tension est une énergie.

En multipliant la charge élémentaire $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C par une tension de 1 V, on obtient une unité adaptée à la physique des particules, l'électron-volt, noté eV. On a $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

- a) Que vaut 1 J en eV ?
- b) L'énergie d'un photon rouge est de $2,48 \times 10^{-19}$ J.
Convertir en eV.
- c) L'énergie d'un photon violet est de 3,1 eV.
Convertir en J.
- d) Quel photon a la plus grande énergie ?
Le rouge ou le violet ?

Entraînement 16.2 — Qui est le plus massique ?



On considère les trois particules suivantes :

- le proton, dont la masse vaut $m_{\text{proton}} = 1,67 \times 10^{-27}$ kg ;
- le kaon, qui est une particule dont l'énergie de masse vaut $m_{\text{kaon}} \times c^2 = 7,90 \times 10^{-4}$ erg ;
- le tau, qui est une particule de masse $m_{\text{tau}} = 1\,777 \text{ MeV}/c^2$.

On donne $1 \text{ erg} = 1 \text{ g} \cdot \text{cm}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ et $1 \text{ eV} = 1,6 \times 10^{-19}$ J.

Laquelle de ces particules est la plus massique ?

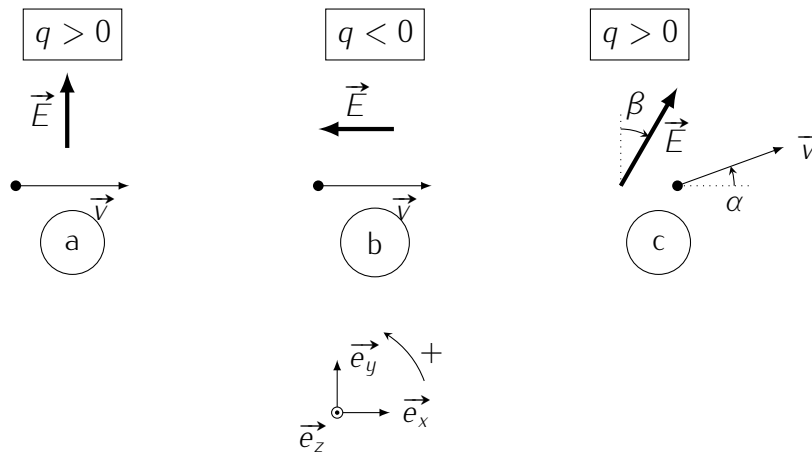
Force de Lorentz

On rappelle l'expression de la force de Lorentz $\vec{F}_L = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$.

Entraînement 16.3 — Composante électrique de la force de Lorentz.

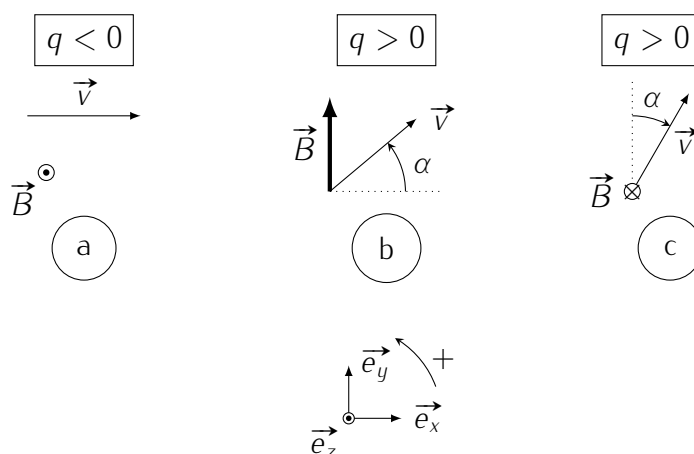


Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de E et éventuellement de α et β) la composante électrique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = q\vec{E}$.



- a) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = \dots\dots\dots$
- b) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = \dots\dots\dots$
- c) $\vec{F}_{L,\text{électrique}} = \dots\dots\dots$

Entraînement 16.4 — Composante magnétique de la force de Lorentz.



Dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, exprimer (en fonction de q , de v , de B , et éventuellement de α) la composante magnétique de la force de Lorentz, définie par $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$.

a) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

c) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

b) $\vec{F}_{L,\text{magnétique}} = \dots$

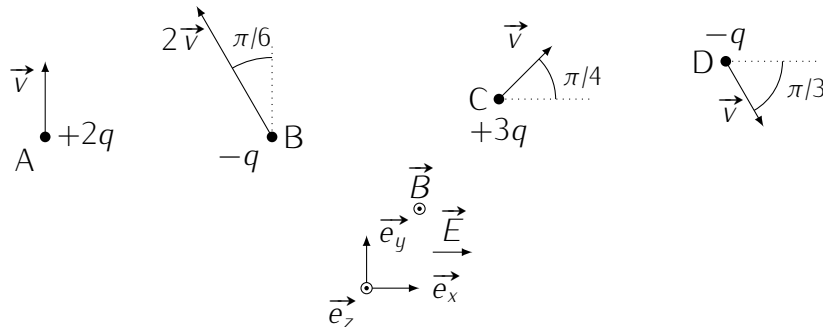


Entraînement 16.5 — Puissance de la force de Lorentz.



On se place dans une base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$, et on considère :

- un champ électrique constant dans tout l'espace : $\vec{E} = E\vec{e}_x$;
- un champ magnétique constant dans tout l'espace : $\vec{B} = B\vec{e}_z$.



On rappelle que la puissance d'une force $\vec{F}$ appliquée à une particule de vitesse $\vec{v}$ est $\mathcal{P} = \vec{F} \cdot \vec{v}$.

Donner l'expression de la puissance des forces subies par chacune des particules A, B, C et D.

a) $\mathcal{P}_A = \dots$

c) $\mathcal{P}_C = \dots$

b) $\mathcal{P}_B = \dots$

d) $\mathcal{P}_D = \dots$

Mouvement dans un champ électrique

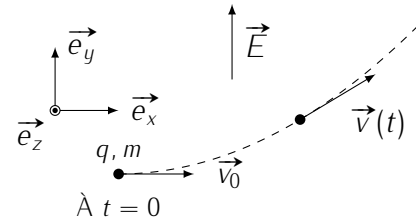
Entraînement 16.6 — Champ perpendiculaire à la vitesse initiale.



On étudie le mouvement d'une particule de charge $q > 0$ et de masse m dans une zone où règne un champ électrique $\vec{E} = E\vec{e}_y$.

À l'instant initial, la vitesse est orthogonale au champ électrique : $\vec{v}(t=0) = v_0\vec{e}_x$.

L'étude du mouvement permet d'établir l'expression de la vitesse en fonction du temps :



$$\vec{v}(t) = v_0\vec{e}_x + \frac{qE}{m}t\vec{e}_y.$$

a) À quel instant t_0 la particule double sa vitesse (par rapport à la vitesse initiale) ?

b) À quel instant t_1 l'énergie cinétique de la particule a quadruplé ?

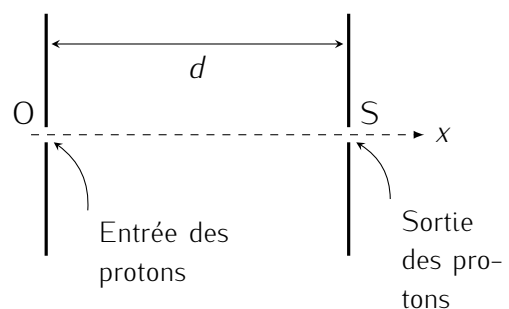
c) Quelle est la valeur de l'angle $\alpha = (\vec{e}_x, \vec{v})$ à l'instant t_1 ?

Entraînement 16.7 — Champ colinéaire à la vitesse initiale.



Une proton de masse $m_p = 1,67 \times 10^{-27}$ kg entre en O, avec une vitesse initiale négligeable, dans un condensateur plan.

Une tension U est appliquée entre les deux armatures séparées d'une distance $d = 5,0$ cm. Le champ électrique $\vec{E}$ entre les plaques est supposé uniforme et orienté dans le sens des x croissants. Sa norme est $E = \frac{U}{d}$.



La variation d'énergie cinétique entre l'entrée O et la sortie S vérifie :

$$\mathcal{E}_c(S) - \mathcal{E}_c(O) = qU.$$

Le champ électrique de claquage de l'air vaut $E_{\max} = 3 \times 10^7$ V · m⁻¹.

a) Quelle est la tension maximale $U_{\max}$ qui peut être appliquée aux bornes du condensateur sans qu'il n'y ait de claquage ?

b) L'énergie cinétique du proton en sortie du condensateur est alors égale à :

(a) 6 keV

(b) 1,5 MeV

(c) 0,24 pJ

(d) 9,6 mJ

(plusieurs réponses sont possibles)

.....

En associant l'un après l'autre de tels condensateurs plans, on peut augmenter l'énergie cinétique des protons : l'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c,n}$ à la sortie du condensateur n vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_{c,n} - \mathcal{E}_{c,n-1} = qU.$$

c) La suite $(\mathcal{E}_{c,n})_n$ est une suite :

☐ (a) arithmétique

☐ (b) géométrique

☒ (c) arithmético-géométrique

.....

d) En déduire l'expression de $\mathcal{E}_{c,n}$ en fonction de n , q et U

On souhaite atteindre une vitesse $v = \frac{c}{10}$, où c est la célérité de la lumière dans le vide par une mise en série de condensateurs.

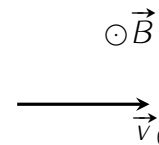
e) Quel est le nombre de condensateurs plans nécessaires pour atteindre une telle vitesse avec une tension $U = 1 \text{ MV}$ aux bornes de chaque condensateur?

Particule dans un champ magnétique

Entraînement 16.8 — Étude d'une trajectoire.



On considère une particule de masse m et de charge $q < 0$ placée dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\vec{e}_z$. On note $\vec{v}(t)$ le vecteur vitesse et $\vec{v}_0$ sa valeur initiale.



On représente la situation par le schéma ci-contre :

a) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ en fonction de q , m , $\vec{v}$ et $\vec{B}$.

On pourra négliger le poids de la particule.

On admet que le mouvement est circulaire de rayon R et de centre C.

b) Exprimer la vitesse dans le repère de coordonnées polaires d'origine C.

c) En déduire l'expression de la force de Lorentz en coordonnées polaires

d) Exprimer l'accélération en coordonnées polaires

e) Reprendre le PFD pour exprimer le rayon R

f) Calculer la période T du mouvement circulaire

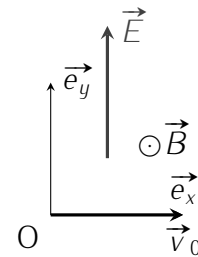
Particule dans un champ $(\vec{E}, \vec{B})$

Entraînement 16.9 — Mouvement uniforme.



Un électron de masse m et de charge $q < 0$ adopte un mouvement rectiligne uniforme de vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$ dans une zone où règnent un champ électrique $\vec{E} = E \vec{e}_y$ et un champ magnétique $\vec{B} = B \vec{e}_z$.

On représente la situation par le schéma ci-contre :



a) Exprimer la force de Lorentz $\vec{F}_L$ dans la base cartésienne.

b) À quelle condition l'électron adopte-t-il un mouvement rectiligne uniforme ?

Réponses mélangées

$qvB \cos(\alpha) \vec{e}_z$	tau	$\frac{q}{m} \vec{v} \wedge \vec{B}$	5	ⓑ et ⓒ	$ qE \vec{e}_x$		
$5,0 \times 10^{-19} \text{ J}$	violet	$ q vB \vec{e}_y$	$qRB\dot{\theta} \vec{e}_r$	$\sqrt{3} \frac{mv_0}{qE}$	ⓐ $qE \vec{e}_y$		
nqU	$2\pi \frac{m}{ q B}$	$6,3 \times 10^{18} \text{ eV}$	qEv	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{mv_0}{ q B}$	0	$v_0 = \frac{E}{B}$
$R\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{e}_r$	1,55 eV	1,5 MV	$-qvB(\cos(\alpha) \vec{e}_x + \sin(\alpha) \vec{e}_y)$		$-\frac{qEv}{2}$		
$\sqrt{3} \frac{mv_0}{qE}$	$R\dot{\theta} \vec{e}_\theta$	$qE(\cos(\beta) \vec{e}_y - \sin(\beta) \vec{e}_x)$	$\frac{3\sqrt{2}}{2} qEv$	$q(E - v_0 B) \vec{e}_y$			

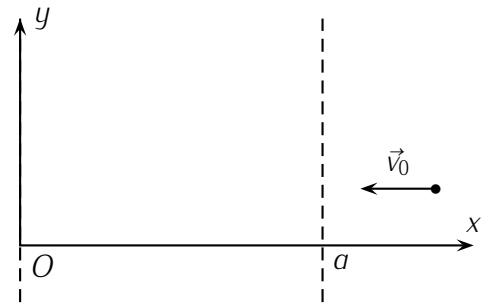


Exercice 1 : Barrière électromagnétique

1. Barrière électrique : il règne un champ électrique uniforme $\vec{E} = E_0 \vec{u}_x$ entre les plans $x = 0$ et $x = a$ et un champ nul partout ailleurs.

Des particules de charge $q > 0$, de masse m arrivent de l'infini du côté des $x > 0$ avec des vitesses identiques $\vec{v}_0$ portées par l'axe Ox .

Quelle est la condition sur v_0 pour que les particules ne puissent pas franchir cette barrière de potentiel ?



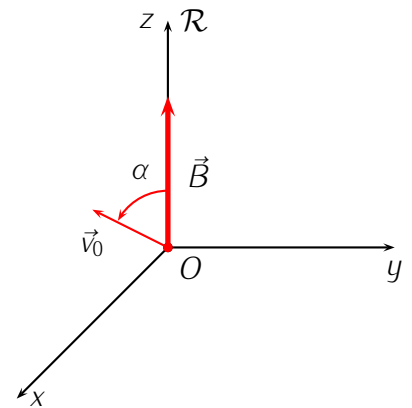
2. Barrière magnétique : entre les plans $x = 0$ et $x = a$, il règne maintenant un champ magnétique uniforme $\vec{B} = -B_0 \vec{u}_z$.

Quel est le rayon de courbure de la trajectoire des particules ? Reprendre la question du 1.



Exercice 2 : Particule dans un champ $\vec{B}$

On étudie une particule chargée plongée dans un champ magnétique constant et uniforme : $\vec{B} = B \vec{e}_z$, à l'instant initial, la particule se trouve en O et a une vitesse initiale $\vec{v}_0$ dans le plan (xOz) . On travaillera en coordonnées cartésiennes.



1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique pour obtenir deux équations différentielles couplées liant v_x et v_y .
2. Résolution classique :
 - (a) En dérivant l'une de ces deux équations par rapport au temps, obtenir une équation différentielle sur la vitesse v_x et la résoudre. Faire de même pour la vitesse v_y .
 - (b) En utilisant les conditions initiales, en déduire l'équation paramétrique de la trajectoire $(x(t), y(t), z(t))$.
3. Résolution avec la méthode des complexes.
 - (a) Il est possible de résoudre le système d'équation couplées, en utilisant un intermédiaire de calcul : la fonction complexe : $C = v_x + jv_y$. Calculer $\dot{C}$ en utilisant le système d'équation couplées. En déduire que C est solution d'une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficient constant.
 - (b) En déduire une expression de C puis par identification une expression de v_x et v_y .

✎ Exercice 3 : Charge dans $\vec{B}$ et avec frottements fluides.

Une particule de masse m et de charge $q = -e < 0$ se trouve initialement en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.

Elle se déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et subit également une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec λ une constante positive.

1. Quelle est le mouvement (trajectoire et vitesse) de la particule si $\lambda = 0$?

Représenter la trajectoire.

2. On prend maintenant $\lambda \neq 0$ mais faible.

Représenter, sans calcul supplémentaire, l'allure de la nouvelle trajectoire.

3. Déterminer les équations différentielles du mouvement.

4. On pose $\underline{u} = x + jy$, $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$.

Déterminer $\underline{u}(t)$.

Comment calculerait-on $x(t)$ et $y(t)$?

Préciser la position finale de la particule.

✎ Exercice 4 : Charge dans $\vec{E}$ et $\vec{B}$ uniformes et perpendiculaires.

Une particule M de masse m et de charge $q > 0$ pénètre à $t = 0$ en O avec une vitesse $\vec{v}_0$ dans une région où règnent un champ uniforme et permanent $\vec{E}$ orienté selon Oy , et un champ $\vec{B}$ uniforme et permanent selon Oz (Cf dessin). On posera $\omega = \frac{qB}{m}$ dans les calculs.

1. La vitesse $\vec{v}_0$ est suivant Oz .

Écrire les équations différentielles du mouvement de P et $z(t)$

Déterminer les équations du mouvement $x(t)$ et $y(t)$

par la méthode complexe, en introduisant $\underline{C} = v_x + jv_y$

2. Étude du cas où $v_0 = 0$.

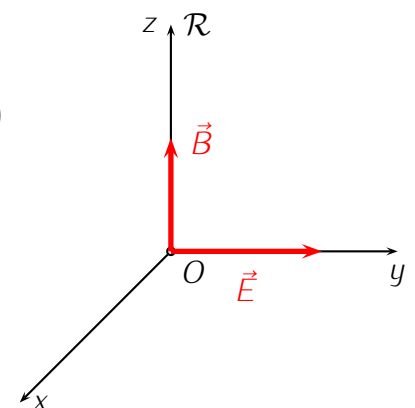
Déterminer les équations paramétriques du mouvement de P et définir sa trajectoire.

Déterminer la distance à l'origine O du point A où la trajectoire aboutit pour la 1ère fois sur l'axe Ox .

3. La vitesse $\vec{v}_0$ est maintenant normale à $\vec{E}$ et $\vec{B}$.

Donner les nouvelles équations paramétriques du mouvement.

Pour quelle valeur de v_0 la particule n'est elle pas déviée? Application?



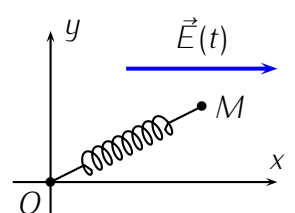
✎ Exercice 5 : La couleur du ciel

Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse (électromagnétique) caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t = E_0 \cos(\omega t) \cdot \vec{e}_x$ et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié de J.J THOMSON.

1. Établir l'équation différentielle et vectorielle du mouvement d'un tel électron quand il est excité par $\vec{E}$ en admettant qu'il est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel $\vec{F} = -k\vec{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

On notera q et m la charge et la masse de l'électron.

On posera $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.



2. Démontrer, par projection de l'équation précédente, qu'en régime permanent l'électron oscille parallèlement à $\vec{E}_0$. On notera $x(t)$ son élongation.
3. Calculer $X(\omega)$ l'amplitude complexe de l'élongation $x(t)$ puis $A(\omega)$ l'amplitude de son accélération $\ddot{x}(t) = a_x(t)$.
4. Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet). Sachant que ω_1 et ω_2 sont tous deux très inférieurs à ω_0 , montrer que, dans ces conditions, l'amplitude $A(\omega)$ est proportionnelle à ω^2 .
5. Sachant qu'un électron accéléré rayonne une puissance lumineuse P proportionnelle au carré de son accélération, expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Exercice 6 : Expérience de Millikan.

L'expérience de Millikan a permis de déterminer la valeur de la charge élémentaire.

Entre deux plateaux horizontaux d'un condensateur plan à air, distants de $h = 16$ mm, on introduit de petites gouttes de glycérine de rayon uniforme a et de volume V . On prendra $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$.

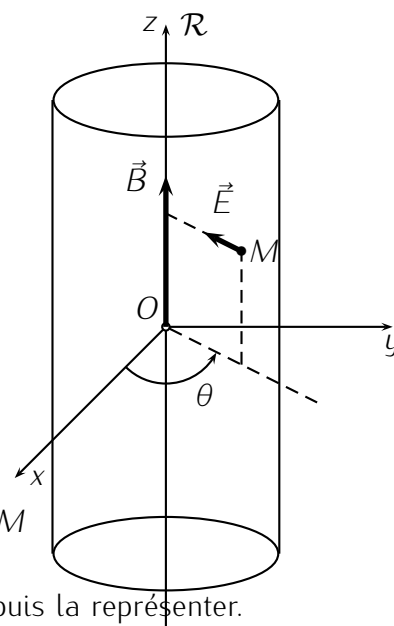
1. Le condensateur n'est pas chargé.
 - (a) Montrer que chaque goutte abandonnée sans vitesse, atteint une vitesse limite $\vec{v}_0$ qu'on exprimera en fonction des données (on n'oubliera pas la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\rho'V\vec{g}$) ; on donne :
 - $\vec{R}$ résistance de l'air $R = 6\pi\eta a v$ (force $\vec{R}$ opposée à la vitesse $\vec{v}$),
 - coefficient de viscosité de l'air $\eta = 1,83.10^{-5} \text{ kg.m}^{-1}.\text{s}^{-1}$,
 - masse volumique de la glycérine $\rho = 1260 \text{ kg.m}^{-3}$,
 - masse volumique de l'air $\rho' = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$.
 - (b) A l'aide d'une lunette d'observation, on constate qu'une goutte parcourt 7,84 mm en 20,4 s. Calculer le rayon a de la goutte.
 - (c) Au bout de combien de temps la vitesse limite est-elle atteinte à 1 pour mille près ?
2. On établit une ddp U constante entre les plateaux du condensateur.
 - (a) Exprimer la nouvelle vitesse limite v_1 d'une goutte qui porte une charge q , en fonction de v_0 , q , η , a , U et h .
 - (b) Pour immobiliser la goutte, il faut appliquer une tension $U_1 = 7 \text{ kV}$. Calculer q et commenter.

Exercice 7 : Charge dans $\vec{E}$ radial et $\vec{B}$ axial.

Dans l'espace vide compris entre une cathode cylindrique de rayon négligeable et une anode cylindrique de rayon R et de même axe (Cf dessin), on produit un champ $\vec{E}$ radial (selon $-\vec{e}_r$ du système de coordonnées cylindriques) et un champ $\vec{B}$ axial (selon $\vec{e}_z$) tous les deux permanents.

La cathode émet par effet thermoélectrique des électrons de charge $-e$ et de masse m avec une vitesse initiale supposée nulle.

1. Rappeler l'expression de l'accélération et de la vitesse d'un point matériel en coordonnées cylindriques et montrer que $2i\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = \frac{1}{r} \frac{d}{dt}(r^2\dot{\theta})$.
2. Écrire les équations différentielles du mouvement de la particule M entre la cathode et l'anode.
3. Écrire l'équation de la trajectoire de M en coordonnées polaires puis la représenter.
4. Le module de $\vec{E}$ étant imposé, quelle est l'intensité minimale du champ $\vec{B}$ pour qu'un courant puisse circuler entre les deux conducteurs ? Voyez vous une application ?



MÉCANIQUE QUANTIQUE

Énoncer les relations de Planck-Einstein.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Décrire l'expérience de Kimble, Dagenais et Mandel.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Énoncer les relations de De Broglie

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Comment savoir si une particule présente des effets quantiques ?

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Qu'est-ce que la fonction d'onde d'une particule quantique ?

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Interpréter l'expérience des fentes d'Young à une particule à l'aide de la fonction d'onde.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Énoncer l'inégalité de Heisenberg spatiale

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Établir l'inégalité de Heisenberg spatiale en ordre de grandeur par analogie avec la diffraction des ondes.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Dans le modèle de Bohr on introduit la relation de quantification $mv2\pi r = nh$. Retrouver l'expression des rayons des trajectoires et des énergies correspondantes.

$$\omega = \frac{E}{\hbar}$$

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv}$$

Une source de photon unique éclaire une lame semi-réfléchissante qui divise le faisceau en deux chemins distincts chacun menant à un détecteur. Comme les impulsions lumineuses n'arrivent jamais simultanément sur les détecteurs cela signifie que la lumière se comporte comme un corpuscule qui passe à travers ou rebondit sur la lame semi-réfléchissante.

$$E = h\nu$$

$$\vec{p} = \hbar \vec{k}$$

On note Ψ_1 et Ψ_2 les fonctions d'onde correspondant respectivement à la fente 1 ou 2 ouverte uniquement. Lorsque les deux fentes sont ouvertes $\Psi = \alpha(\Psi_1 + \Psi_2)$, la probabilité d'observer un impact en M est alors $dP = \alpha^2 \left(|\Psi_1(M, t)|^2 + |\Psi_2(M, t)|^2 \right) d\tau + dP_{12}$ avec

$$dP_{12} = \alpha \left(\Psi_1 \Psi_2^* + \Psi_1^* \Psi_2 \right) d\tau$$

La probabilité de trouver le quanton n'est la somme des probabilités de le trouver avec uniquement les trous 1 ou 2 ouverts

La fonction d'onde est une fonction Ψ dépend de la position et du temps, elle décrit l'état de la particule. Elle est définie telle que

$$dP = |\Psi(M, t)|^2 d\tau$$

est la probabilité de trouver la particule dans le volume $d\tau$ autour du point M à l'instant t .

Une particule présente des effets quantiques si sa longueur de De Broglie est de l'ordre des autres distances mises en jeu.

L'hypothèse de mouvement circulaire uniforme et la relation de quantification donnent, après application de la seconde loi de Newton

$$r_n = \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{me^2} n^2$$

$$E_n = -\frac{1}{2} \frac{me^4}{(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2 n^2}$$

Soit une fente de largeur $2\Delta x$ éclairée par un faisceau parallèle de quantons d'impulsion p et de longueur d'onde $\lambda = \frac{h}{p}$, la diffraction modifie l'impulsion selon $(0x)$ de $\pm p \sin(\theta)$ avec $\sin \theta \simeq \frac{\lambda}{2\Delta x}$. Avec l'approximation $\Delta p_x \simeq p \sin(\theta)$, il vient $\Delta x \Delta p_x = \frac{h}{2}$

$$\Delta x \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$$

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Établir en ordre de grandeur
l'énergie minimale de
confinement.

MÉCANIQUE QUANTIQUE

Établir, par analogie avec la
corde de Melde, les niveaux
d'énergie d'une particule
confinée dans un puit de
potentiel infini.

Les conditions aux limites imposent des nœuds à la fonction d'onde, ainsi par analogie avec la corde de Melde, les seules longueurs d'onde permises sont $\lambda_n = \frac{2L}{n}$, or d'après les relations de De Broglie $p_n = \frac{h}{\lambda_n} = \frac{nh}{2L}$.
Finalement

$$E_n = \frac{p_n^2}{2m} = \frac{n^2 h^2}{8mL^2}$$

Soit un quanton confiné à 1D dans une boîte de longueur L , alors $\Delta x \simeq L$, donc d'après l'inégalité de Heisenberg $\Delta p \geq \frac{\hbar}{2L}$. De plus, en ordre de grandeur $p \simeq \Delta p$ ainsi

$$E = \frac{p^2}{2m} \geq \frac{\hbar^2}{8mL^2}$$

MQ Introduction à la mécanique quantique

Conseils pour ce TD

- Le cours doit être connu, les applications directes qui y figurent refaites.
- La constante de Planck est $h \simeq 6,63 \cdot 10^{-34} \text{ Js}^{-1}$
- La constante d'Avogadro est $N_A \simeq 6,02 \cdot 10^{23} \text{ mol}^{-1}$
- La constante des gaz parfaits est $R = 8,314 \text{ JK}^{-1} \text{ mol}^{-1}$
- 1 eV vaut $1,6 \cdot 10^{-19} \text{ J}$.

Entraînement 17.1 — Quelques formules du cours.



a) Que vaut la longueur d'onde de De Broglie d'une particule de quantité de mouvement p ?

b) Dans quel domaine du rayonnement électromagnétique se situe une lumière monochromatique dont les photon ont une énergie de 2,0 eV ?

c) Des protons possèdent une énergie cinétique $E_c = 2,0 \text{ keV}$. Que vaut leur vitesse ?

d) Que vaut leur longueur d'onde ?

e) Une particule libre de masse m est confinée dans une puits à une dimension de profondeur infinie et de largeur a . Quelles sont les longueurs d'onde permises ?

f) Quelles sont les énergies permises ?

Entraînement 17.2 — Longueur d'onde.



On considère un faisceau de photons possédant une énergie $E = 2,5 \text{ eV}$.

a) Calculer la fréquence ν d'un photon ?

b) Calculer la longueur d'onde d'un photon ?

c) Quelle est la couleur du faisceau ?

d) On considère maintenant un gaz de néon de masse molaire $M = 20 \text{ g.mol}^{-1}$ à température ambiante $T = 293 \text{ K}$. Calculer la vitesse quadratique moyenne des atomes du gaz.

e) En déduire la longueur d'onde de De Broglie d'un atome de néon de ce gaz.

.....

f) À quelle vitesse doit se déplacer un atome de néon pour posséder la même longueur d'onde que les photons introduits précédemment ?

Réponses mélangées

500 nm	600 m.s ⁻¹	$\frac{2a}{n}$	0,64 pm	vert	3,3.10 ⁻¹¹ m	$\frac{n^2 h^2}{8ma^2}$
$\frac{h}{p}$	6,0.10 ¹⁴ Hz	0,040 m.s ⁻¹	Ultraviolet	6,2 10 ⁵ m.s ⁻¹		

Exercice 1 : Etude d'un puits de potentiel infini

Une particule quantique est confinée dans la zone comprise entre les plans $x=0$ et $x=l$ dans un puits infini. On donne sa fonction d'onde :

$$\psi(x,t) = A \sin(kx) \exp(-i\omega t)$$

1. A l'aide du principe d'incertitude d'Heisenberg, estimer son énergie minimale.
2. Déterminer les valeurs possibles de k en fonction de l et d'un entier n positif quelconque.
3. Quelle est la signification physique de $|\psi(x,t)|^2 dx$? Justifier la condition de normalisation

$$\int_0^l |\psi(x,t)|^2 dx = 1$$

- . Normaliser la fonction pour obtenir l'expression de A en fonction de l .
4. Tracer $|\psi(x,t)|^2$ en fonction de x pour les cas $n=1$ et 2. Commenter et comparer au cas d'une particule classique.

Exercice 2 : Niveaux d'énergie de l'atome d'hydrogène

Dans un modèle classique de l'atome d'hydrogène, les électrons décrivent des orbites circulaires de rayon r autour du proton. Pour qu'un tel état puisse exister quantiquement, il faut que l'onde associée à l'électron revienne en phase avec elle même lorsque l'électron fait un tour autour du proton.

1. À l'aide du principe d'incertitude de Heisenberg (et de vos connaissances en ordre de grandeur), estimer l'ordre de grandeur de la vitesse d'un électron dans un atome d'hydrogène.
2. Quel lien peut-on établir entre la longueur d'onde associée à l'électron et le rayon de l'orbite ?
3. En déduire la condition (dite de Bohr) qui relie le rayon r de l'orbite, la quantité de mouvement p de l'électron et la constante de Planck réduite et un entier k
4. Un calcul classique montre que la quantité de mouvement d'un électron en rotation autour d'un proton avec une orbite de rayon r possède une quantité de mouvement proportionnelle à $\frac{1}{\sqrt{r}}$. En déduire comment varie le rayon r_n d'une orbite de Bohr en fonction de l'entier n .
5. Par un raisonnement simple, dire comment les niveaux d'énergie E_n de l'électron dans l'atome dépendent de n . Le résultat est-il correct ?

Exercice 3 : Mécanique quantique des gaz et température

1. On considère tout d'abord des grains de sables qui se déplacent à quelques mètres par secondes. Évaluer la longueur d'onde de de Broglie. La mécanique quantique est-elle nécessaire pour décrire ce que l'on appelle les gaz granulaires ? (ensemble de nombreux grains de sables qui ont des vitesses quasi-aléatoires)
2. Et pour un atome d'hélium (Hélium 4) à température ambiante ? On admettra que la vitesse d'agitation thermique d'un atome est liée à la température par la relation suivante : $\frac{1}{2}mv^2 = \frac{3}{2}k_B T$ (On donne $k_B = 1,38 \cdot 10^{-23}$ J/K la constante de Boltzmann et la masse d'un nucléon : $1,67 \cdot 10^{-27}$ kg)
3. On se propose maintenant de trouver un ordre de grandeur de température limite au-delà de laquelle les effets quantiques ne jouent pas
 - (a) En utilisant l'équation d'état des gaz parfaits $pV = nRT$, exprimer la densité d'un gaz parfait en fonction de la température, de la pression et de la masse molaire du gaz.

- (b) En déduire un ordre de grandeur de la distance interparticulaire (c'est-à-dire la distance moyenne entre une particule et sa plus proche voisine). On pourra supposer que toutes les particules sont séparées par la même distance et qu'elles sont réparties de façon régulières.
- (c) À partir des questions précédentes, trouvez la température en deçà de laquelle il faut prendre en compte les effets quantiques.
- (d) Vérifiez l'homogénéité du résultat précédent.

Exercice 4 : Absorption de photons

1. En utilisant une analogie avec les modes propres d'une corde vibrante, déterminer l'expression des énergies totales E_n d'un quanton de masse m confiné dans un puits de potentiel infini de largeur L .
2. Ce puits quantique peut émettre ou absorber un photon de fréquence ν_{nk} si l'écart $E_n - E_k$ entre deux niveaux d'énergie vérifie : $E_n - E_k = h\nu_{nk}$.
 - (a) Quelle est l'interprétation physique de la relation précédente ?
 - (b) Déterminer les fréquences ν_{12} et ν_{31} , ainsi que les longueurs d'onde correspondantes pour un puits à semi-conducteur à base d'arséniure de gallium, d'épaisseur $L = 6$ nm et tel que $m_a = 0,067m$ avec m la masse de l'électron.
 - (c) À quel domaine du spectre appartiennent les rayonnements ?

Exercice 5 : Cellule photoélectrique au potassium

La cathode d'une cellule photoélectrique au potassium est éclairée par deux radiations lumineuses monochromatiques de longueur d'onde $\lambda = 490$ nm et $\lambda = 660$ nm. La puissance $P = 9,00$ W de ces deux sources de rayonnement est la même. Le travail d'extraction d'un électron du potassium est $W_0 = 2,25$ eV.

1. Les deux radiations permettent-elles l'émission d'électrons ?
2. Déterminer l'expression de la vitesse des électrons émis par la cathode et calculer sa valeur numérique.
3. On observe que l'intensité du courant de saturation est $I_s = 4,00 \cdot 10^{-8}$ A. Déterminer le rendement quantique de la cellule, c'est-à-dire le rapport du nombre d'électrons émis au nombre de photons reçus. On supposera que tous les électrons participent au courant de saturation.

Exercice 6 : Fractionnement du carbone comme signature de la vie sur Terre

Le fractionnement isotopique lors de la fixation du carbone par les organismes vivants est principalement dû à un effet cinétique isotopique (*kinetic isotopic effect*), c'est-à-dire à la variation de la vitesse d'une réaction chimique lorsqu'un atome appartenant à l'un des réactifs est remplacé par l'un de ses isotopes. Ce problème propose de comprendre en quoi cet effet isotopique cinétique peut être d'origine quantique puis de traiter l'exemple de la photosynthèse du cycle de Calvin. Données numériques :

- constante de Planck : $h = 6,6 \cdot 10^{-34}$ J.s, constante de Planck réduite $\hbar = \frac{h}{2\pi}$,
- constante de Boltzmann : $k_B = 1,4 \cdot 10^{-23}$ J.K⁻¹,
- vitesse de la lumière $c = 3,0 \cdot 10^8$ m.s⁻¹,
- masse d'un nucléon (proton ou neutron) $m = 1,67 \cdot 10^{-27}$ kg.

On considère un atome de masse m situé au sein d'une molécule. Dans un modèle unidimensionnel où la fonction d'onde décrivant l'atome ne dépend que l'abscisse x , on suppose que l'environnement de l'atome peut être modélisé par l'énergie potentielle $E_p(x) = E_0 + \frac{1}{2}K_0(x - x_0)^2$, où K_0 désigne une constante positive.

1. Sans agitation thermique, où se situe l'atome à l'équilibre dans une description classique ? Que vaut alors son énergie ?

On note Δx l'écart-type de la position de l'atome le long de l'axe Ox et p_x la quantité de mouvement de l'atome selon Ox . En notant $\langle \rangle$ la valeur moyenne, on rappelle que, par définition de l'écart-type, $(\Delta x)^2 = \langle (p_x - \langle p_x \rangle)^2 \rangle$.

2. Après avoir rappelé l'inégalité de Heisenberg spatiale, expliquer pourquoi la mécanique quantique interdit l'état d'équilibre prédit par la mécanique classique.

3. Justifier que $\langle p_x^2 \rangle = (\Delta p_x)^2$ d'une part et que $\langle x \rangle = x_0$ d'autre part.

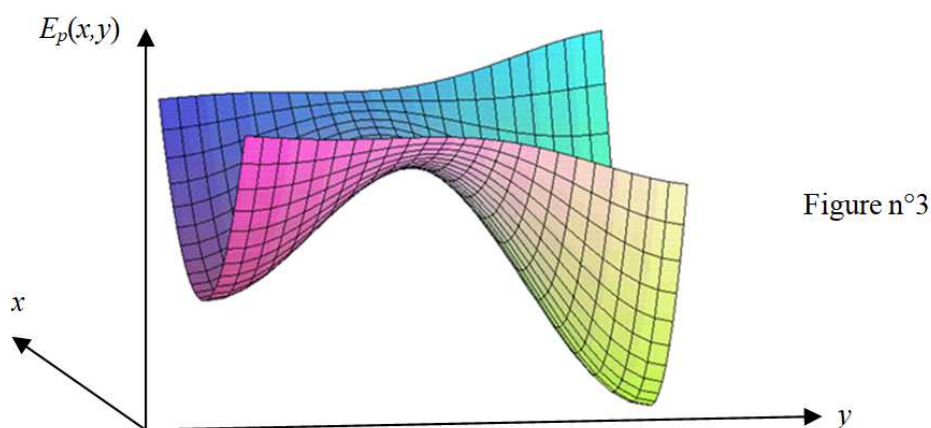
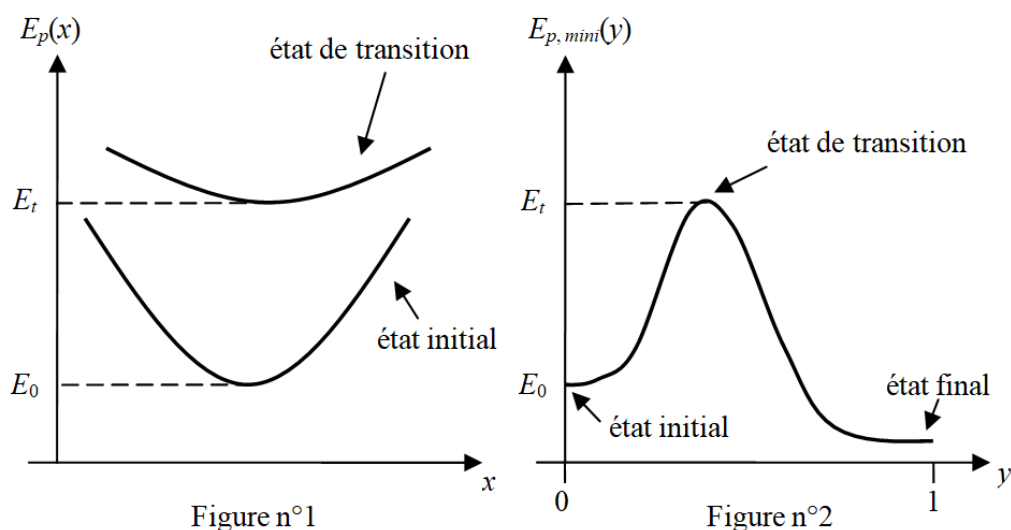
4. En déduire que l'énergie E de l'atome dans un état stationnaire est minorée par la quantité $E_{min} = \frac{h^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}K_0 (\Delta x)^2 + E_0$.

5. En déduire que le confinement de l'atome entraîne que l'énergie de son état fondamental vaut au minimum $E_{ZPE,0} = E_0 + \frac{\eta\omega_0}{2}$. Exprimer ω_0 en fonction de K_0 et m . Que représente concrètement ω_0 dans une description classique de l'atome ?

On admettra pour la suite que $E_{ZPE,0}$, appelé parfois l'« énergie du point zéro », correspond exactement à l'énergie de l'état fondamental de l'atome.

On étudie maintenant le cas d'une réaction chimique : l'environnement de l'atome change au cours de la réaction, dont on paramètre la progression par une variable y , appelée « coordonnée de la réaction ». Pour $y = 0$, le système est constitué des réactifs (la réaction n'a pas commencé) et pour $y = 1$, il est constitué des produits (la réaction est terminée). Très fréquemment, lors de la réaction, le système se trouve dans un état de transition énergétiquement défavorable. Le passage par cet état est l'étape cinétiquement limitante de la réaction. Lorsque le système est dans l'état de transition, l'énergie potentielle de l'atome vaut $E_p(x) = E_t + \frac{1}{2}K_t(x - x_t)^2$, avec $E_t > E_0$ et $K_t \geq 0$.

La figure n°1 représente la courbe $E_p(x)$ pour l'état initial et l'état de transition. La figure n°2 représente le minimum de l'énergie potentielle en fonction de la coordonnée de réaction y . Enfin la figure n°3 donne l'allure de l'énergie potentielle E_p en fonction de x et de y .



Lorsqu'elle existe, la constante de vitesse k de la réaction dépend fortement de la température T en suivant la loi d'Arrhenius qui s'écrit $k = A \exp\left(-\frac{E_a}{k_B T}\right)$, où A est un facteur constant et le paramètre E_a , appelé l'énergie d'activation, correspond à la différence d'énergie du système entre l'état de transition et l'état initial (grandeur positive). Dans le cadre de l'étude de l'effet isotopique cinétique, on compare les constantes de réaction k_L et k_H de la même réaction chimique, mais impliquant dans l'un des réactifs respectivement un atome léger (light) de masse m_L et l'un de ses isotopes, plus lourd (heavy), de masse m_H . On définit alors l'effet isotopique cinétique KIE par le rapport $\frac{k_L}{k_H}$.

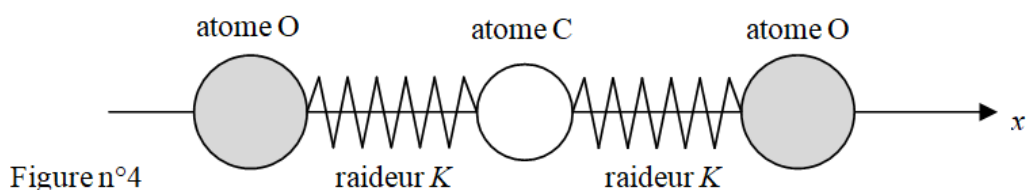
6. En supposant que l'atome reste dans son état de plus basse énergie tout au long de la réaction, expliquer comment le résultat de la question 5 permet d'expliquer l'effet isotopique cinétique. On pourra compléter avantageusement la figure n°1 en faisant apparaître les énergies d'activation des deux réactions.

Dans la grande majorité des cas, dans l'état de transition, les forces de liaison agissant sur l'atome sont plus faibles (car l'étape cinétiquement déterminante consiste souvent en une rupture de liaison). On dit que l'effet isotopique cinétique est normal si $KIE > 1$.

7. Justifier le qualificatif « normal ».

L'assimilation du carbone par les organismes vivants peut se faire de différentes manières. On traite le cas (le plus fréquent) de la photosynthèse des plantes de type C_3 , où le carbone provient du CO_2 (atmosphérique ou dissous) qui est intégré dans des molécules organiques lors de l'étape de carboxylation du cycle de Calvin : une enzyme (ribulose-1,5-bisphosphate carboxylase, encore appelée le "RuBisCo") permet de fixer le carbone selon une réaction dite de carboxylation de la forme $CO_2 + R - H = R - COOH$. On se propose d'évaluer la valeur de KIE pour cette réaction

à l'aide d'un modèle se voulant le plus simple possible. On modélise pour cela la molécule de CO_2 par un système de trois masses et de deux ressorts, comme l'illustre la figure n°4.



En spectroscopie infrarouge, la molécule CO_2 possède un pic d'absorption pour une longueur d'onde $\lambda_0 = 4,3 \mu\text{m}$, correspondant à la résonance du mode de vibration d'élongation antisymétrique, pour lequel les deux atomes O d'une part et l'atome C d'autre part oscillent en opposition de phase. On note m_C la masse de l'atome de carbone. Pour simplifier, on suppose que les atomes O, étant plus massifs, sont immobiles.

8. Avec cette hypothèse simplificatrice, relier K , m_C et λ_0 et c . On fait l'hypothèse que l'étape cinétiquement limitante de la carboxylation implique la rupture de la liaison π entre C et l'un des atomes O. Pour simplifier, on considère que l'état de transition de CO_2 correspond au cas où l'un des deux ressorts est absent (une liaison σ étant moins forte qu'une liaison π).
9. Quel lien simple existe-t-il alors entre K_0 et K_t ? On montre en mécanique quantique que les différents niveaux d'énergie des états stationnaires d'un oscillateur harmonique de pulsation propre ω_0 valent $(n + \frac{1}{2}) \hbar \omega_0$ avec n un entier naturel.
10. Peut-on valider ou non l'hypothèse selon laquelle l'atome C reste dans son état de plus basse énergie pendant la réaction de carboxylation à température ambiante? Une application numérique est attendue.
11. En supposant que le facteur pré-exponentiel A dans la loi d'Arrhenius est identique pour les deux isotopes, déduire des différents résultats précédents que l'effet cinétique isotopique en remplaçant $^{12}\text{CO}_2$ par $^{13}\text{CO}_2$ pour la réaction de carboxylation a pour expression

$$K/E = \exp \left(\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \left(1 - \sqrt{\frac{12}{13}} \right) \frac{hc}{2\lambda_0 k_B T} \right)$$

. Des mesures de compositions isotopiques montrent que la matière végétale des plantes de type C3 possède un rapport $^{13}\text{C}/^{12}\text{C}$ entre 1,6 et 2,7 % (avec une moyenne de 2,0 %) plus faible que celui du CO_2 atmosphérique (d'après l'article de Manfred Schidlowski, carbon isotopes as biogeochemical recorders of life over 3.8 Ga of Earth history : evolution of a concept, Precambrian Research, 106 (2001) 117-134).

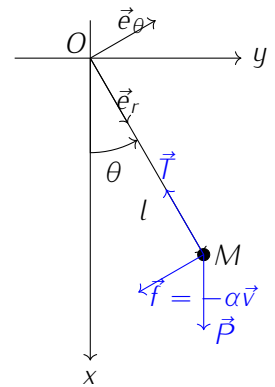
12. Confronter ces valeurs à ce que prévoit le modèle précédent. Commenter.

MOMENT CINÉTIQUE

Définir le moment en A d'une force $\vec{F}$ appliquée au point M .

MOMENT CINÉTIQUE

En quelle unité s'exprime le moment d'une force ?

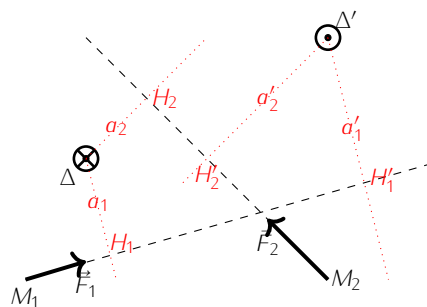


Exprimer $\vec{M}_O(\vec{T})$, $\vec{M}_O(\vec{P})$ et $\vec{M}_O(\vec{f})$

MOMENT CINÉTIQUE

Définir le moment d'une force $\vec{F}$ autour d'un axe orienté Δ , orienté par $\vec{e}_\Delta$

MOMENT CINÉTIQUE



Exprimer $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_1)$, $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_2)$, $\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_1)$ et $\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_2)$

MOMENT CINÉTIQUE

Définir le moment cinétique en A d'un point matériel M de masse m et de vitesse $\vec{v}$.

MOMENT CINÉTIQUE

Exprimer, dans la base cylindrique, le moment cinétique en O d'un point M

MOMENT CINÉTIQUE

Exprimer le moment cinétique en O d'un point M en mouvement circulaire.

MOMENT CINÉTIQUE

Démontrer le théorème du moment cinétique.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{T}) &= \vec{0} \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{f}) &= -\alpha l^2 \dot{\theta} \vec{e}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) &= -mg \sin \theta \vec{e}_z\end{aligned}$$

$$N.m$$

$$\vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{L}_A(M/\mathcal{R}) = m \overrightarrow{AM} \wedge \vec{v}(M/\mathcal{R})$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_1) = -a_1 F_1$$

$$\mathcal{M}_{\Delta}(\vec{F}_2) = -a_2 F_2$$

$$\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_1) = a'_1 F_1$$

$$\mathcal{M}_{\Delta'}(\vec{F}_2) = -a'_2 F_2$$

$$M_{\Delta}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) \cdot \vec{e}_{\Delta} \text{ avec } A \in \Delta$$

$$\begin{aligned}&\left(\frac{d\vec{L}_A}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \\ &m\left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \wedge \vec{v} + m\overrightarrow{AM} \wedge \left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} \\ &\text{Si } A \text{ est fixe } \left(\frac{d\overrightarrow{AM}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{v} \text{ et si } \\ &\text{le référentiel est galiléen} \\ &m\left(\frac{d\vec{v}}{dt}\right)_{\mathcal{R}} = \vec{F} \text{ Ainsi} \\ &\left(\frac{d\vec{L}_A(M)}{dt}\right)_{\mathcal{R}_g} = \overrightarrow{AM} \wedge \vec{F} = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F})\end{aligned}$$

$$\vec{L}_0 = mR^2\omega\vec{e}_z$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= m \begin{vmatrix} r & \\ 0 & \wedge \\ z & \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \\ &= m \begin{vmatrix} -zr\dot{\theta} \\ -r\dot{z} + \dot{r}z \\ r^2\dot{\theta} \end{vmatrix}\end{aligned}$$

M_5 Théorème du moment cinétique

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_3 .
- Privilégier la version scalaire du théorème du moment cinétique.
- Pour déterminer le moment d'une force par rapport à un point ou sa projection sur un axe, faire une figure sur laquelle cette force doit apparaître, utiliser ensuite la notion de bras de levier ou la décomposition des vecteurs suivant les vecteurs de base.
- Utiliser une technique analogue pour le calcul d'un moment cinétique.
- Toujours vérifier la cohérence des résultats en utilisant par exemple la règle de la main droite.

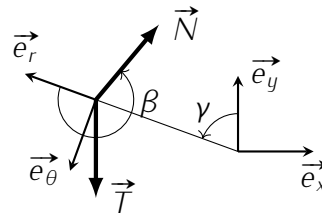
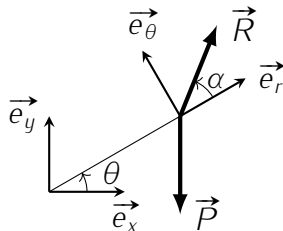
Projections préparatoires



Entraînement 18.1 — Calculs de produits scalaires.



On considère les vecteurs suivants où $\vec{P}$ et $\vec{T}$ sont verticaux.



Calculer les produits scalaires suivants en fonction des normes ($\vec{P}$, $\vec{T}$, etc.) ainsi que des différents angles apparaissant sur les schémas.

- | | | | | | |
|-----------------------------------|----------------------|------------------------------|----------------------|-----------------------------------|----------------------|
| a) $\vec{P} \cdot \vec{e}_\theta$ | <input type="text"/> | c) $\vec{R} \cdot \vec{e}_y$ | <input type="text"/> | e) $\vec{N} \cdot \vec{e}_r$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{N} \cdot \vec{e}_y$ | <input type="text"/> | d) $\vec{T} \cdot \vec{e}_r$ | <input type="text"/> | f) $\vec{N} \cdot \vec{e}_\theta$ | <input type="text"/> |



Entraînement 18.2 — Projections dans une base.



En utilisant la formule donnant la décomposition d'un vecteur $\vec{v}$ dans une base orthonormée $(\vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\vec{v} = (\vec{v} \cdot \vec{e}_1) \vec{e}_1 + (\vec{v} \cdot \vec{e}_2) \vec{e}_2,$$

décomposer les vecteurs de l'exercice précédent dans chaque base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ et $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- | | | | |
|---|----------------------|---|----------------------|
| a) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ | <input type="text"/> | e) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ | <input type="text"/> |
| b) $\vec{P}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ | <input type="text"/> | f) $\vec{R}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ | <input type="text"/> |
| c) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ | <input type="text"/> | g) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ | <input type="text"/> |
| d) $\vec{T}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ | <input type="text"/> | h) $\vec{N}$ dans $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$ | <input type="text"/> |

Produit vectoriel



Entraînement 18.3 — Produits vectoriels à partir de décompositions.



En utilisant le schéma du premier exercice et les décompositions du deuxième, donner l'expression des produits vectoriels suivants. Comme d'habitude, on complète la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$ par le vecteur $\vec{e}_z$ suivant la « règle de la main droite ».

- | | | | | | |
|-------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|
| a) $\vec{P} \wedge \vec{R}$. | <input type="text"/> | b) $\vec{T} \wedge \vec{e}_r$. | <input type="text"/> | c) $\vec{e}_x \wedge \vec{N}$. | <input type="text"/> |
|-------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|---------------------------------|----------------------|



Entraînement 18.4 — Produits vectoriels à partir des coordonnées.



On donne les quatre vecteurs suivants de $\mathbb{R}^3$ définis de manière numérique :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad \vec{B} = \begin{pmatrix} 6 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad \vec{C} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \vec{e}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Calculer les produits vectoriels et produits scalaires suivant :

- | | | | |
|---|----------------------|--|----------------------|
| a) $\vec{A} \wedge \vec{B}$ | <input type="text"/> | d) $\vec{A} \cdot (\vec{B} \wedge \vec{e}_x)$ | <input type="text"/> |
| b) $(\vec{B} + \vec{A}) \wedge \vec{A}$ | <input type="text"/> | e) $\vec{A} \wedge (\vec{B} \wedge \vec{C})$ | <input type="text"/> |
| c) $\vec{e}_x \cdot (\vec{A} \wedge \vec{B})$ | <input type="text"/> | f) $(\vec{A} \cdot \vec{C}) \vec{B} - (\vec{A} \cdot \vec{B}) \vec{C}$ | <input type="text"/> |

Moment cinétique

Entraînement 18.5 — Bataille de moments cinétiques.



Parmi les quatre planètes décrites dans le tableau ci-dessous, laquelle présente le moment cinétique autour du Soleil le plus important ?

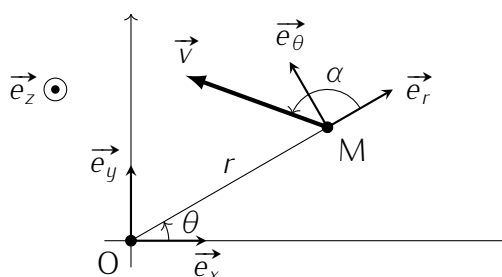
	Masse	Distance au Soleil	Vitesse sur l'orbite
Mercure	$3 \times 10^{26} \text{ g}$	$58 \times 10^9 \text{ m}$	$170 \times 10^3 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$
Vénus	$5 \times 10^{27} \text{ g}$	$1,1 \times 10^{13} \text{ cm}$	$35 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$
Terre	$6 \times 10^{21} \text{ t}$	$150 \times 10^6 \text{ km}$	$30 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$
Mars	$6 \times 10^{23} \text{ kg}$	$230 \times 10^6 \text{ km}$	$87 \times 10^5 \text{ cm} \cdot \text{h}^{-1}$

.....

Entraînement 18.6 — Un moustique allumé.



On considère un moustique M de masse m dont le vecteur vitesse de norme v fait un angle $\alpha \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$ avec le vecteur $\overrightarrow{OM}$ comme représenté dans le schéma ci-dessous.



Exprimer le moment cinétique du moustique M par rapport à O en fonction de m , r , v et α

.....

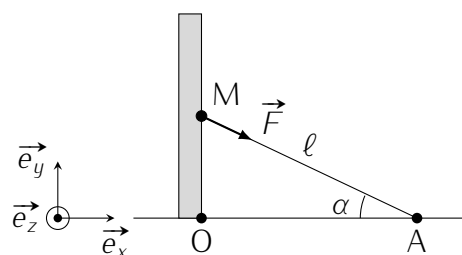
Moment d'une force

Entraînement 18.7 — Fil accroché au mur.



On considère un mur auquel est accroché un filin qu'on tire depuis un point A. Il s'agit de trouver le moment de la force $\vec{F}$ par rapport aux axes (Oz) et (Az) en fonction de F , ℓ et α .

Calculer :



a) $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F})$

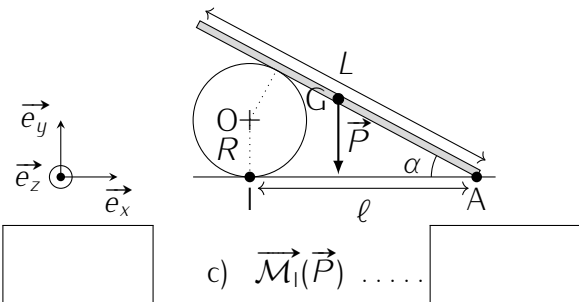
b) $\mathcal{M}_{Az}(\vec{F})$

Entraînement 18.8 — Une planche de cirque.



On considère une planche homogène de masse m appuyée sur un cylindre.

Calculer le moment du poids de cette planche par rapport aux divers points intéressants du système.



- a) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) \dots \dots \dots$ b) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) \dots \dots \dots$ c) $\overrightarrow{\mathcal{M}}_I(\vec{P}) \dots \dots \dots$

Réponses mélangées

$$\begin{aligned} & \vec{P} \vec{R} \cos(\theta + \alpha) \vec{e}_z \quad -mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z \quad -7 \quad 0 \\ & \begin{pmatrix} 7 \\ -14 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \vec{P} = -\vec{P} \vec{e}_y \quad m r v \sin(\alpha) \vec{e}_z \quad \text{la Terre} \\ & \vec{R} \sin(\theta + \alpha) \quad \frac{mgL}{2} \cos \alpha \vec{e}_z \quad \vec{N} \cos(\beta) \quad -mg \left(\ell - \frac{L}{2} \cos \alpha \right) \vec{e}_z \\ & -\vec{T} \sin(\gamma) \vec{e}_z \quad -\vec{T} \cos(\gamma) \quad \begin{pmatrix} -7 \\ 14 \\ -7 \end{pmatrix} \quad \vec{N} \cos(\gamma + \beta) \vec{e}_z \\ & \vec{R} (\cos(\theta + \alpha) \vec{e}_x + \sin(\theta + \alpha) \vec{e}_y) \quad \vec{N} (-\sin(\beta + \gamma) \vec{e}_x + \cos(\gamma + \beta) \vec{e}_y) \\ & \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \vec{P} (-\sin(\theta) \vec{e}_r - \cos(\theta) \vec{e}_\theta) \quad \vec{N} (\cos(\beta) \vec{e}_r + \sin(\beta) \vec{e}_\theta) \quad -\vec{P} \cos \theta \\ & -\ell F \sin \alpha \cos \alpha \quad -7 \quad \begin{pmatrix} -6 \\ -33 \\ 24 \end{pmatrix} \quad \vec{T} = \vec{T} (-\cos(\gamma) \vec{e}_r + \sin(\gamma) \vec{e}_\theta) \\ & \vec{N} \cos(\gamma + \beta) \quad \vec{R} (\cos(\alpha) \vec{e}_r + \sin(\alpha) \vec{e}_\theta) \quad -\vec{T} \vec{e}_y \quad \vec{N} \sin(\beta) \end{aligned}$$



Exercice 1 : Non conservation de l'énergie mécanique

Au cours d'une de ses aventures, Indiana Jones se retrouve glissant sans frottement sur un plan horizontal verglacé, lié par un filin inextensible et de masse négligeable à un poteau d'axe vertical placé en O . Le filin ne s'enroule pas sur le poteau mais glisse autour sans frottement.

Pour simplifier, on assimile notre héros à un point matériel A de masse m .

1. Indiana Jones tourne autour du poteau à la distance $l = OA$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$ dans le référentiel lié au plan, supposé galiléen.

Quelle est la nature de son mouvement? Exprimer le module T de la tension du filin.

2. Après calcul, notre héros décide, pour sortir de sa situation, de "remonter" lentement de long du filin.

(a) Montrer qu'au cours de l'opération son moment cinétique par rapport à O reste constant.

(b) En déduire la vitesse finale v' d'Indiana Jones en A' tel que $OA' = \frac{l}{2}$.

(c) Exprimer la variation d'énergie mécanique au cours de la remontée.

Du point de vue énergétique, quel a été le rôle de notre héros?

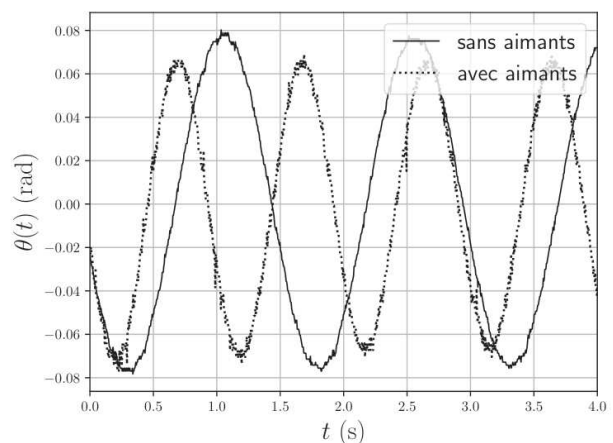
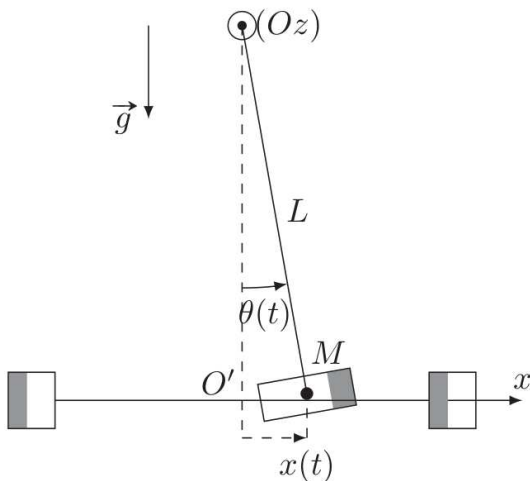
3. Discuter de ce qui va arriver s'il continue sa remontée.



Exercice 2 : Pendule magnétique

Wylem constitue un pendule avec une fine tige rigide de masse négligeable à l'extrémité de laquelle il fixe un assemblage M assimilable à un aimant. L'axe de rotation est l'axe (Oz) , la liaison pivot étant réalisée à l'aide d'un potentiomètre non représenté sur la figure qui permet l'acquisition de l'angle $\theta(t)$. Deux aimants extérieurs sont placés de part et d'autre de M sur l'axe $(O'x)$ de sorte qu'ils repoussent M lorsque celui-ci s'en approche.

Des enregistrements de $\theta(t)$ sont réalisés avec et sans les aimants extérieurs et présentés sur la figure ci-dessous.



Wylem propose une modélisation du problème dans laquelle le pendule est assimilé à un pendule simple de longueur L fixé en O et dont l'assemblage M supposé ponctuel porte toute la masse $m = 0,26$ kg. Le mouvement de M s'effectue dans le plan $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ et l'angle $\theta(t)$ est toujours très petit en valeur absolue. L'action exercée sur M par les aimants extérieurs est ramenée à une force

$$\vec{F} = -k x(t) \vec{u}_x$$

où k est une constante à déterminer et $x(t)$ l'abscisse de M à l'instant t .

Le référentiel d'étude R est supposé galiléen. L'accélération de la pesanteur est

$$\vec{g} = -g \vec{u}_y$$

avec $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Déterminer les valeurs expérimentales des périodes respectivement T_0 et T du pendule sans aimants et avec aimants extérieurs.
2. Discuter le modèle proposé par Wylem.
3. Utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) pour déterminer l'expression littérale de la période T_0 du pendule simple en l'absence d'aimants extérieurs. En déduire la longueur L du pendule.
4. Utiliser le théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz) pour déterminer la période T du pendule simple en présence des aimants extérieurs. En déduire la valeur de k .

Exercice 3 : Pendule conique

Considérons un pendule conique constitué d'une masse ponctuelle m attachée à une extrémité d'une tige de longueur l sans masse. L'autre extrémité de la tige est fixée à un point O . On oriente l'axe (O_z) selon la verticale descendante. La masse m décrit un mouvement circulaire uniforme dans un plan horizontal à une hauteur h en dessous du point O . On note α l'angle (constant!) entre (O_z) et $\vec{OM}$.

1. Rappeler l'expression du théorème du moment cinétique pour un point matériel.
2. Faire un schéma.
3. On utilise les coordonnées cylindriques pour repérer le point M . Justifiez que le vecteur position $\vec{OM}$ peut s'écrire comme $\vec{OM} = l \cos(\alpha) \vec{e}_z + l \sin(\alpha) \vec{e}_r$. (Attention : le « centre » des coordonnées cylindrique est bien le centre du cercle décrit par M).
4. Exprimer le vecteur vitesse de la masse m .
5. Exprimer le moment cinétique $\vec{L}$ de la masse m par rapport au point O en fonction de la vitesse v de la masse, de la longueur l , et de l'angle α que fait la tige avec la verticale.
6. Exprimer le moment en O des forces appliquées sur M .
7. En utilisant le théorème du moment cinétique, montrer que la vitesse angulaire ω de la masse autour de l'axe vertical passant par O est constante.
8. Trouver une relation entre la vitesse angulaire ω , la longueur l , l'angle θ et l'accélération de la pesanteur g .

Exercice 4 : Pendule électrostatique

Un pendule électrostatique est constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium et suspendue à une potence par un fil de masse négligeable. La boule est préalablement chargée avec une charge électrique $Q = 2,3 \cdot 10^{-4} \text{ C}$. L'ensemble est placé entre deux plaques de cuivre planes et parallèles soumises à une différence de potentiel telle qu'elles génèrent un champ électrique uniforme $\vec{E} = E \vec{u}_y$ avec $E = 500 \text{ V} \cdot \text{m}^{-1}$. La longueur du pendule est $OM = R = 10 \text{ cm}$ et la masse de la boule assimilée à un point M est $m = 20 \text{ g}$. L'accélération de la pesanteur est $g = 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

1. Appliquer le théorème du moment cinétique à M .
2. Déterminer la position d'équilibre θ_e du pendule.
3. On écarte le pendule légèrement de sa position d'équilibre. Déterminer la pulsation ω_0 des oscillations puis calculer sa période. On admettra que pour $|\epsilon| \ll \theta_e$, on a $\cos(\theta_e + \epsilon) \simeq \cos(\theta_e) - \epsilon \sin(\theta_e)$ et $\sin(\theta_e + \epsilon) \simeq \sin(\theta_e) + \epsilon \cos(\theta_e)$.

FORCES CENTRALES

Qu'est-ce qu'une force centrale ?

FORCES CENTRALE

Montrer qu'une particule soumise à une force centrale possède un moment cinétique en O constant.

FORCES CENTRALES

Définir la constante des aires.

FORCES CENTRALES

Montrer qu'une particule soumise à une force centrale possède un mouvement plan.

FORCES CENTRALES

Démontrer la loi des aires.

FORCES CENTRALES

Soit une particule matérielle dans un champ de force centrale conservative. Établir l'expression de son énergie potentiel effective.

FORCES CENTRALES

Soit une particule soumise à une force Newtonienne

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

. Montrer que si $k < 0$ la particule est toujours en état de diffusion.

FORCES CENTRALES

Soit une particule soumise à une force Newtonienne

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$$

attractive ($k > 0$). À quelle condition sur l'énergie mécanique son mouvement est lié ?

FORCES CENTRALES

Énoncer les lois de Kepler.

On définit la constante des aires $\vec{C}$ par $\vec{L}_O(M) = m\vec{C}$

D'après le théorème du moment cinétique
 $\frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$. Ainsi
 $\vec{L}_O(M)$ est constant.

Une force est dite centrale si sa droite d'action passe constamment par un point fixe du référentiel appelé centre de force.

L'énergie mécanique vaut
 $E_m = \frac{1}{2}mv^2 + E_p$ or
 $v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2$ et $C = r^2\dot{\theta}$
 Donc $E_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{mC^2}{2r^2} + E_p$.
 Ainsi

$$E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} + E_p$$

L'aire balayée par le rayon vecteur pendant dt est
 $dA = \frac{1}{2} |\vec{OM} \wedge \vec{v} dt| = \frac{C}{2} dt$.
 Ainsi

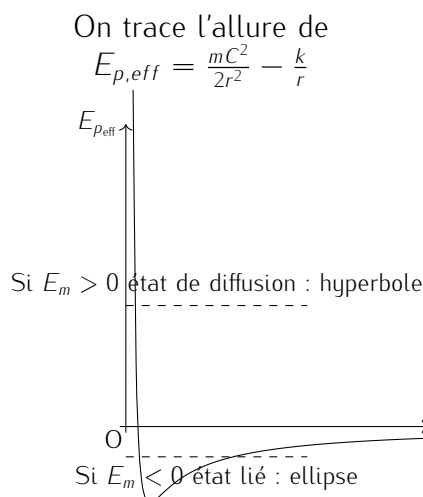
$$\frac{dA}{dt} = \frac{C}{2}$$

D'après la conservation du moment cinétique, à tout instant

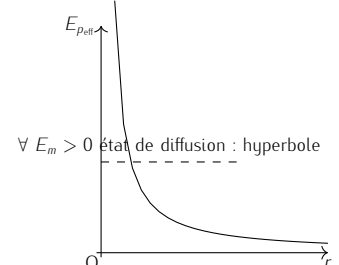
$$\vec{OM} \wedge \vec{v} = \vec{C}$$

Ainsi le plan $(\vec{OM}, \vec{v})$ reste orthogonal à $\vec{C}$ qui est fixe. Le mouvement est donc plan.

Dans le référentiel de Kepler les planètes P décrivent des ellipses dont le soleil S est l'un des foyers. Pendant l'intervalle de temps Δt , l'aire balayée par le vecteur position $\vec{SP}$ est proportionnelle à Δt . Le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire (T période, a demi-grand axe).



L'énergie potentielle effective de la particule est
 $E_{p,eff} = \frac{mC^2}{2r^2} - \frac{k}{r}$. Il s'agit d'une fonction strictement décroissante, ainsi quelle que soit la valeur de l'énergie mécanique la particule se trouve en état de diffusion.



FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation. Montrer que si le mouvement est circulaire alors il est uniforme.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation en mouvement circulaire uniforme. Déterminer sa période de rotation.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation en mouvement circulaire uniforme. Déterminer l'expression de son énergie mécanique.

FORCES CENTRALE

On considère un objet soumis à la force de gravitation et dans un état lié. Déterminer l'expression de son énergie mécanique en fonction du demi-grand axe de la trajectoire.

FORCES CENTRALE

Citer des exemples d'orbites de satellites ainsi que leur mission.

FORCES CENTRALES

Justifier la localisation des satellites géostationnaires dans le plan équatorial.

FORCES CENTRALES

Déterminer l'altitude des satellites géostationnaires.

FORCES CENTRALES

Exprimer la première vitesse cosmique.

FORCES CENTRALES

Exprimer la seconde vitesse cosmique.

On a $E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r}$ et la seconde loi de Newton donne $-m\frac{v^2}{R} = -\frac{k}{R^2}$ donc

$$E_m = -\frac{k}{2R}$$

La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$ donne $-mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\frac{mM}{r^2}$ or $\dot{\theta} = \frac{2\pi}{T}$ d'où $T^2 = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M}R^3$

On a $r = R = cste$ et d'après la conservation du moment cinétique $r^2\dot{\theta} = C$ donc $\dot{\theta} = cste$, ainsi $\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta$ et $v = R\dot{\theta} = cste$

Pour qu'un satellite reste en position fixe par rapport à un point sur la surface terrestre, il doit orbiter à la même vitesse angulaire que la rotation de la Terre. De plus, les satellites ne sont soumis qu'à la seule force gravitationnelle, leur mouvement est donc dans un plan qui contient le centre de la Terre. Le seul plan possible est le plan équatorial.

- Orbites basses polaires (< 2000 km) : observation terrestre
- Orbites moyennes (entre 2000 et 20000 km) : navigation
- Orbite géostationnaire (36 000 km) : communication

Au périégée $E_m(r_p) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_p^2} - \frac{k}{r_p}$

À l'apogée

$$E_m(r_a) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r_a^2} - \frac{k}{r_a}$$

La bonne combinaison donne :

$$E_m \times (r_p^2 - r_a^2) = 0 - k(r_p - r_a) \Leftrightarrow E_m \times (r_p - r_a)(r_p + r_a) = -k(r_p - r_a) \Leftrightarrow E_m = -\frac{k}{r_p + r_a} = -\frac{k}{2a}$$

Donc

$$E_m = -\frac{k}{2a}$$

Pour un satellite à la surface de la Terre et possédant une trajectoire parabolique (état de diffusion) :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM}{R_T} = Cte = 0$$

Donc :

$$v_l = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M}{R_T}} \simeq 11,2 \text{ km.s}^{-1}$$

Par application de la seconde loi de Newton sur M dans la base polaire, pour un satellite en orbite circulaire rasante on obtient $m\frac{v^2}{R_T} = \frac{\mathcal{G}mM}{R_T^2} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{R_T}} \simeq 7,92 \text{ km.s}^{-1}$

Le satellite possède une vitesse angulaire $\omega = \frac{2\pi}{T_S}$ avec $T_S = 23 \text{ h } 56 \text{ min}$

La seconde loi de Newton projetée selon $\vec{e}_r$: $r\omega^2 =$

$$\mathcal{G}\frac{M}{r^2} \Rightarrow r = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}M}{\Omega^2}} = \sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}MT_S^2}{4\pi^2}}$$

d'où $h = R - R_T =$

$$\sqrt[3]{\frac{\mathcal{G}MT_S^2}{4\pi^2}} - R_T = 3,579.10^3 \text{ km}$$

M_6 Champ de force centrale

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_5 .
- Privilégier la version scalaire du théorème du moment cinétique.
- Pour déterminer le moment d'une force par rapport à un point ou sa projection sur un axe, faire une figure sur laquelle cette force doit apparaître, utiliser ensuite la notion de bras de levier ou la décomposition des vecteurs suivant les vecteurs de base.
- Utiliser une technique analogue pour le calcul d'un moment cinétique.
- Toujours vérifier la cohérence des résultats en utilisant par exemple la règle de la main droite.

Satellites



Entraînement 19.1 — Mission INTEGRAL.



International Gamma-Ray Astrophysics Laboratory (INTEGRAL) est un observatoire spatial d'astrophysique européen mis en orbite en 2002. Son orbite de travail autour de la Terre est une ellipse dont le périhélie et l'apogée se trouvent respectivement à 9 000 km et 153 000 km du centre de la Terre. Données : la masse de la Terre est $M_T = 6,0 \cdot 10^{24}$ kg, celle du satellite $m = 3,5$ tonnes. La constante de gravitation vaut $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{kg}^{-1} \text{s}^{-2}$.

a) Déterminer le demi-grand axe a de l'orbite du satellite.

b) Calculer la période de révolution d'INTEGRAL.

c) Calculer l'énergie mécanique du satellite.

d) Calculer la norme de la vitesse du satellite à son apogée.

e) Calculer la norme de la vitesse du satellite à son périhélie.



Entraînement 19.2 — Lois de Kepler.



a) Sachant que la trajectoire de la Terre est presque un cercle de rayon $a = 150 \cdot 10^6$ km et que la constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI, calculer la masse du soleil.

.....

b) La période de révolution de Mars autour du Soleil est de 1,9 année, en déduire a' le demi grand axe de l'ellipse décrite par Mars du soleil.

.....

c) La comète de Halley est passée en 1986 au voisinage de la Terre. Sa période de révolution autour du Soleil est de 76 ans et sa distance minimale au Soleil est 0,59 u.a (unité astronomique correspondant à la distance moyenne Terre Soleil). Calculer la plus grande distance de cette comète au Soleil.

.....



Entraînement 19.3 — Lois de Kepler.



Le Petit Prince réside sur un astéroïde de rayon $R = 30$ m et de masse $m = 2,0 \cdot 10^8$ kg. La constante de gravitation vaut $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$.

a) Calculer la norme v_s de la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il parcoure une orbite basse autour de l'astéroïde (vitesse de satellisation).

.....

b) Calculer la norme v_l de la vitesse qu'il faut communiquer à un objet pour qu'il échappe à l'attraction de l'astéroïde (vitesse de libération).

.....

Réponses mélangées

$$63\text{h}36 \text{ min} \quad M_S \simeq 2 \cdot 10^{30} \text{ kg} \quad v_s = 0,021 \text{ m.s}^{-1}$$

$$9,2 \text{ km.s}^{-1} \quad v_s = 0,030 \text{ m.s}^{-1} \quad 81 \cdot 10^3 \text{ km}$$

$$-8,6 \text{ GJ.} \quad 230 \cdot 10^6 \text{ km} \quad r_A = 35,29 \text{ u.a} \quad 0,54 \text{ km.s}^{-1}$$

Exercice 1 : Oscillateur en rotation

On considère un point matériel M de masse m , attaché à l'extrémité d'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 . L'autre extrémité de ce ressort est attachée en un point, fixe par rapport au référentiel terrestre que l'on supposera galiléen, et autour duquel l'ensemble est libre de tourner dans un plan horizontal. Il est lancé avec une vitesse initiale v_i orthoradiale, et une longueur initiale $r = r_i$. On néglige tout frottement.

1. Montrer que le moment cinétique de ce système se conserve au cours du mouvement. En déduire une expression de $\dot{\theta}$ en fonction de r et des paramètres initiaux, et montrer qu'il est possible de résumer le mouvement à une équation différentielle portant uniquement sur la variable r .
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur r_i et v_i pour que le mouvement soit circulaire.

Exercice 2 : Le cauchemar de Philippe

Le petit Philippe passe une nuit agitée. Il rêve que la loi de la gravitation est élevée à la puissance $\frac{5}{2}$!! Dans son cauchemar, les journées s'écoulaient dans l'angoisse d'une catastrophe imminente. Élevée à la puissance $5/2$, la loi de la gravitation ne permettait plus à la Terre qu'une orbite circulaire particulièrement instable autour du Soleil. Les prédicateurs de tout poil ne manquaient aucune occasion d'annoncer la fin du monde. Certains affirmaient que la Terre s'écraserait bientôt sur le Soleil, d'autres pensaient qu'elle dériverait vers l'infini et au-delà.

Dans le cauchemar de Philippe, la loi de la gravitation est remplacée par une force de type $\vec{F} = -\frac{k}{r^5}\vec{e}_r$, avec $k > 0$.

1. Définir et exprimer une énergie potentielle effective pour la Terre.
2. Montrer qu'une trajectoire circulaire est possible.
3. Discuter sa stabilité.

Exercice 3 : Satellites

La station spatiale internationale (ou ISS, masse m) décrit une orbite circulaire autour de la Terre à une altitude $h = 300$ km (orbite dite basse). On donne le rayon de la Terre $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et la valeur du champ de pesanteur terrestre au niveau du sol $g_0 = 9,8 \text{ m.s}^{-2}$.

1. Pourquoi l'ISS est-elle placée sur une orbite basse ?
2. Exprimer g_0 en fonction de R_T , $\mathcal{G}$ et M_T la masse de la Terre. (On pourra rappeler l'expression du poids, d'une part, et de la force gravitationnelle d'autre part).
3. Déterminer la vitesse de l'ISS sur son orbite, ainsi que la valeur de sa période de révolution T .
4. Un second satellite est également en orbite circulaire autour de la Terre, à une altitude $h' = 2h$. Que vaut la période T de ce satellite ?

Exercice 4 : Premier vol habité (par un homme)

Le 12 avril 1961, le commandant soviétique Y. Gagarine fut le premier cosmonaute, le vaisseau spatial satellisé était un engin de masse $m = 4725$ kg. Les altitudes au périgée P et à l'apogée A étaient $z_P = 180$ km et $z_A = 327$ km.

Exprimer la vitesse v du satellite en fonction de son altitude z , de z_P , z_A , M_T , R_T (masse et rayon de la Terre) et de $\mathcal{G}$, la constante de gravitation. Calculer v en P et en A .

Exercice 5 : Satellite et frottements

Un satellite M de masse m est placé sur une orbite circulaire de rayon r_0 contenue dans le plan équatorial de la Terre. On travaillera dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$ considéré comme galiléen. On notera Ω la vitesse angulaire de rotation de la Terre dans $\mathcal{R}_{\text{Géo}}$.

1. Déterminer la vitesse v_0 du satellite, l'énergie potentielle E_{p0} , cinétique E_{c0} et mécanique E_{m0} du satellite sur cette orbite en fonction de la constante de gravitation $\mathcal{G}$, M_T la masse de la Terre et des données.
2. Avant d'être placé sur son orbite, le satellite est posé sur le sol, en un point P de latitude λ . Sa vitesse est la vitesse d'entraînement $\vec{v}_e$ due à la rotation de la Terre, supposée sphérique de rayon R_T . Déterminer E_{p1} , E_{c1} et E_{m1} du satellite au point P . Pour le placer sur son orbite, il faut lui fournir $\Delta E = E_{m0} - E_{m1}$.
Où doit-on placer les bases de lancement pour que ΔE soit minimale ?
3. On suppose maintenant que l'altitude du satellite étant faible devant R_T , il subit les frottements de l'atmosphère. Son énergie mécanique E_m diminue avec le temps selon la loi $E_m = E_{m0}(1 + \alpha t)$. Quel est le signe de α ? On suppose que la trajectoire reste pratiquement circulaire. Déterminer en fonction de t , le rayon r de la trajectoire, et la vitesse v du satellite. Comment v varie-t-elle ? Commentez.



Exercice 6 : Force de gravitation

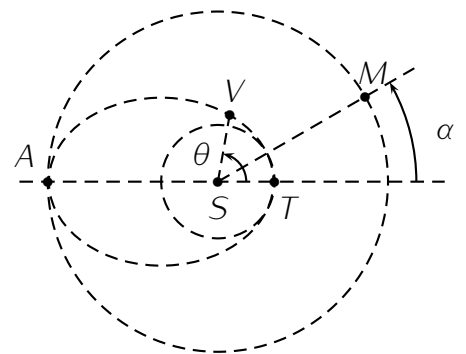
1. Rappeler l'expression de la force de gravitation exercée par la Terre de centre T et de masse M_T sur un objet A de masse m en fonction de la Constante de gravitation $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI et de $r = TA$.
2. En déduire l'expression de l'énergie potentielle de gravitation.
3. Donner l'expression de l'énergie mécanique du point A ayant une vitesse v à la surface de la Terre, en déduire la valeur de la vitesse de libération v_L : vitesse minimale donnée à l'objet pour qu'il puisse se libérer de l'attraction terrestre. Calculer v_L . ($M_T = 6 \cdot 10^{24}$ kg et $R_T = 6400$ km).
4. La Terre décrit autour du soleil S de masse $M_S = 0,33 \cdot 10^6 M_T$ une orbite pratiquement circulaire de rayon $a = 150 \cdot 10^6$ km. Déterminer en fonction de a , la position d'équigravité du système $T - S$ par rapport à la Terre ; endroit de l'espace où la force de gravitation due à S est compensée par celle due à T .



Exercice 7 : Voyage Terre – Mars

Au cours d'un voyage interplanétaire, un vaisseau spatial V de masse $m = 1000$ kg, est transféré depuis la Terre T jusqu'à la planète Mars M . Ce transfert s'effectue selon une orbite elliptique (ellipse de HOHMANN) tangente aux deux orbites coplanaires pratiquement circulaires, de T et M , de rayons $r_T = ST = 150$ millions de km et $r_M = SM = 230$ millions de km, et dont le soleil est un foyer.

On négligera l'influence des autres corps et on ne considérera que l'attraction solaire. Masse du soleil $M_S = 2 \cdot 10^{30}$ kg et $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}$ SI. Toutes les grandeurs sont à déterminer en fonction de r_T , r_M , $\mathcal{G}$ et M_S , puis à évaluer numériquement.



1. Le demi-grand axe de l'orbite de transfert de HOHMANN.
2. Rappeler l'énoncé de la troisième loi de Kepler. Quelle portion de l'ellipse de transfert, le vaisseau décrit-il ? En déduire la durée τ de ce voyage.
3. Que vaut l'énergie mécanique du vaisseau lorsqu'il se trouve sur l'orbite terrestre ? Sur l'orbite de transfert ? En déduire la variation de vitesse à communiquer au vaisseau lors du lancement depuis l'orbite terrestre. Puis, de la même manière, trouver la variation de vitesse à lui communiquer lors de son arrivée aux abords de Mars.

4. Quelle est l'augmentation de l'énergie mécanique totale du vaisseau au cours de ce transfert.
5. Mars doit se situer en A au même instant que le vaisseau V . En appliquant la troisième de Kepler, trouver la période de rotation de Mars. En déduire sa vitesse angulaire. Et enfin, en déduire la position que doit avoir M par rapport à T à l'instant du départ : angle $\alpha = (ST, SM)$.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Qu'est-ce qu'un solide
indéformable ?

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Définir un mouvement de
translation pour un solide.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Définir un mouvement de
translation rectiligne pour un
solide.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Définir un mouvement de
translation circulaire.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Définir un mouvement de
rotation autour d'un axe fixe.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Définir le centre de masse
d'un système de points
matériels.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Comment localiser le centre
de masse d'un solide ?

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Montrer que la quantité de
mouvement de deux points
matériel est $\vec{p} = m\vec{v}_G$ avec m
la masse totale et v_G la
vitesse du centre de masse.

MÉCANIQUE DU
SOLIDE

Énoncer la loi de la quantité
de mouvement appliquée à un
système de points ou à un
solide.

Un solide est en mouvement rectiligne si tous ses points ont un mouvement rectiligne.

Un solide est en translation si son champ de vecteurs vitesses est uniforme.

Un solide indéformable est un corps à l'état solide tel que pour tout couple de points (M_1, M_2) appartenant au solide la distance M_1M_2 reste constante.

Le centre de masse d'un système de points est le point G tel que

$$\vec{OG} = \frac{\sum_{i=1}^n m_i \vec{OM_i}}{\sum_{i=1}^n m_i}$$

Un solide est en rotation autour d'une axe fixe si tous ses points ont un mouvement circulaire autour du même axe fixe.

Si tous les points d'un solide en translation ont un mouvement circulaire alors celui-ci possède un mouvement de translation circulaire.

Dans un référentiel galiléen la dérivée temporelle de la quantité de mouvement d'un système fermé est égale à la somme des forces extérieures appliquées au système.

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

La quantité de mouvement $\vec{p}$ d'un système de deux points matériels est

$$\vec{p} = m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2$$

Or

$$\vec{OG} = \frac{m_1 \vec{OM}_1 + m_2 \vec{OM}_2}{m_1 + m_2}$$

Donc

$$\vec{v}_G = \frac{m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2}{m_1 + m_2}$$

$$\text{et } \vec{p} = m \vec{v}_G \text{ avec } m = m_1 + m_2$$

Le centre de masse d'un solide appartient aux éventuels axes ou plans de symétrie du solide.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Définir le moment d'inertie autour de l'axe (Oz) d'un système de points matériels.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Définir le moment d'inertie d'un solide en rotation autour de l'axe (Oz) à la vitesse angulaire ω .

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Énoncer le théorème scalaire du moment cinétique pour un solide indéformable en rotation autour d'un axe fixe.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

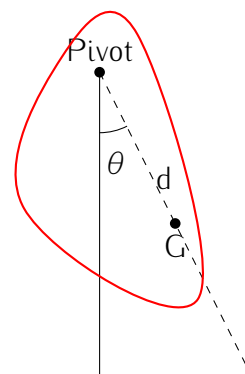
Qu'est-ce qu'un couple de force ?

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Qu'est-ce qu'une liaison pivot parfaite ?

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Établir l'équation du mouvement du pendule pesant.



MÉCANIQUE DU SOLIDE

Établir une intégrale première du mouvement pour le pendule pesant.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Soit un solide de moment d'inertie J suspendu à un fil exerçant un couple de torsion $\Gamma = -C\theta$, établir l'équation du mouvement du solide.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Établir une intégrale première du mouvement pour le pendule de torsion.

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle du moment cinétique d'un solide indéformable, en rotation autour d'un axe fixe, par rapport à ce même axe est égale à la somme des moments des forces extérieures appliquées au solide par rapport à l'axe de rotation.

$$J_{Oz} \dot{\omega} = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext})$$

$$L_{Oz} = J_{Oz} \omega$$

$$J_{Oz} = \sum m_i r_i^2$$

$$\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J} \sin \theta = 0$$

Une liaison pivot restreint le mouvement à la seule rotation autour de l'axe (Oz). Si elle est parfaite, elle exerce un moment nul autour selon l'axe (Oz).

Deux forces $\vec{f}_1$ et $\vec{f}_2$ forment un couple de force si leur résultante est nulle
 $\vec{f}_1 = \vec{f}_2 = \vec{0}$

On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ pour obtenir après intégration :

$$\frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} C \theta^2 = cste$$

$$\ddot{\theta} + \frac{C}{J} \theta = 0$$

On multiplie l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$

$$\ddot{\theta} \dot{\theta} + \frac{mgd}{J} \dot{\theta} \sin \theta = 0$$

Soit

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mgd}{J} \cos(\theta) \right) = 0$$

D'où

$$\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 - \frac{mgd}{J} \cos(\theta) = Cste$$

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Exprimer l'énergie cinétique d'un solide de moment d'inertie J en rotation autour d'un axe fixe à la vitesse angulaire ω

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Exprimer la puissance d'un moment M_Δ s'appliquant sur un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ fixe

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Établir le théorème de la puissance cinétique pour un solide en rotation autour d'un axe fixe.

MÉCANIQUE DU SOLIDE

Énoncé le théorème de la puissance cinétique pour un solide déformable en rotation autour d'un axe fixe.

On multiplie le TSMC terme
à terme par ω :

$$J\dot{\omega}\omega = M_{\Delta}\omega$$

on obtient alors :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} J \omega^2 \right) = \mathcal{P}$$

soit :

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}$$

$$\mathcal{P} = M_{\Delta}\omega$$

$$E_c = \frac{1}{2} J \omega^2$$

Dans un référentiel galiléen,
la dérivée temporelle de
l'énergie cinétique d'un solide
déformable en rotation
autour d'un axe fixe est égale
à la puissance des forces
extérieures et intérieures
appliquées au solide.

$$\frac{dE_c}{dt} = \mathcal{P}_{\text{ext}} + \mathcal{P}_{\text{int}}$$

M7 Mécanique du solide

Conseils pour ce TD

- Les mêmes que ceux de M_5 .
- Privilégier la version scalaire du théorème du moment cinétique.
- Pour déterminer le moment d'une force par rapport à un point ou sa projection sur un axe, faire une figure sur laquelle cette force doit apparaître, utiliser ensuite la notion de bras de levier ou la décomposition des vecteurs suivant les vecteurs de base.
- Utiliser une technique analogue pour le calcul d'un moment cinétique.
- Toujours vérifier la cohérence des résultats en utilisant par exemple la règle de la main droite.

Calculs de moments

Entraînement 20.1 — Basculement d'une barre en T.



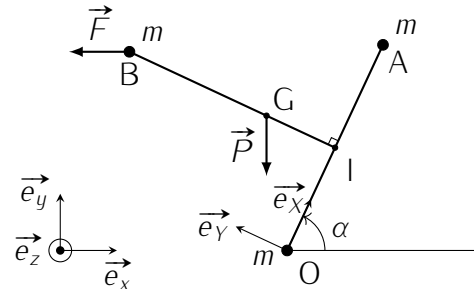
On considère trois masses m réparties aux trois sommets d'un triangle OAB isocèle en B et reliées par des tiges sans masse vérifiant

$$OA = IB = a.$$

On note I le milieu du segment $[OA]$.

On note G le centre de gravité des trois masses, qui est situé sur le segment $[IB]$ de sorte que $GB = \frac{2}{3}a$.

On notera P et F les normes des deux forces représentées sur le schéma.



a) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OB}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

b) Écrire le vecteur $\overrightarrow{OG}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

c) Écrire le vecteur $\vec{P}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

d) Écrire le vecteur $\vec{F}$ dans la base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y)$

e) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{F})$

f) Calculer $\overrightarrow{\mathcal{M}}_O(\vec{P})$

g) En supposant qu'il y ait équilibre entre les deux moments, déterminer l'expression $\tan(\alpha)$ dans ce cas.

.....

Solide déformable



Entraînement 20.2 — Salsa.



Maria est danseuse de salsa. Lors des tours en pivot, elle tourne autour de son axe $(\Delta) = (Gz)$ vertical en donnant une petite impulsion à l'aide de son pied gauche, l'appui se faisant sur son pied droit. La position de ses bras lui permet de modifier sa vitesse de rotation ω . G est le centre de masse de Maria.

L'appui au sol s'accompagne d'un couple de frottement de moment C_f par rapport à l'axe (Gz) que nous supposons constant. Nous négligeons tout frottement fluide et supposons le référentiel terrestre R galiléen. L'impulsion donne à Maria une vitesse angulaire initiale $\omega_0 = 2\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ autour de (Δ) orienté. Ses bras sont tendus de sorte que son moment d'inertie par rapport à son axe de rotation (Δ) est $J_{\Delta 1} = 2,4 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$. Elle réalise alors juste un tour avant de s'arrêter.

a) Appliquer à Maria le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à (Δ) . En déduire

la valeur du couple C_f

b) Déterminer l'énergie cinétique initiale de Maria.

c) Quelle énergie a été dissipée dans les frottements au cours de son tour ?

d) Maria prend maintenant la même impulsion lui conférant la vitesse angulaire ω_0 puis replie presque instantanément ses bras de sorte que son moment d'inertie par rapport à (Δ) devient $J_{\Delta 2} = 0,80 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Quelle vitesse angulaire ω'_0 possède Maria après avoir replié ses bras ? ...

e) Combien de tours réalise alors Maria avant de s'arrêter ?

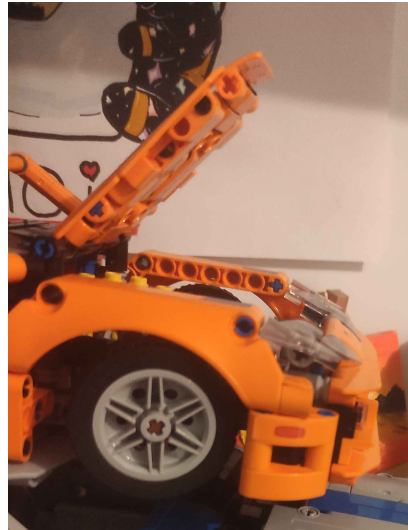
Réponses mélangées

$F(-\cos \alpha \vec{e}_x + \sin \alpha \vec{e}_y)$	$aF \left(\frac{\sin \alpha}{2} + \cos \alpha \right) \vec{e}_z$	3	$\frac{3P - 6F}{3F + 2P}$
-7,5 N.m	-47 J	$6\pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$	$aP \left(-\frac{\cos \alpha}{2} + \frac{\sin \alpha}{3} \right) \vec{e}_z$
$\frac{a}{2} \vec{e}_x + \frac{a}{3} \vec{e}_y$	47 J	$P(-\sin \alpha \vec{e}_x - \cos \alpha \vec{e}_y)$	$\frac{a}{2} \vec{e}_x + a \vec{e}_y$



Exercice 1 : La voiture de Yuna

Yuna a construit une voiture en Lego technique, en brillante physicienne, elle décide de faire quelques expériences avec celle-ci. Elle remarque que le capot peut rester ouvert tant que l'angle qu'il forme avec l'horizontal n'est pas trop petit.

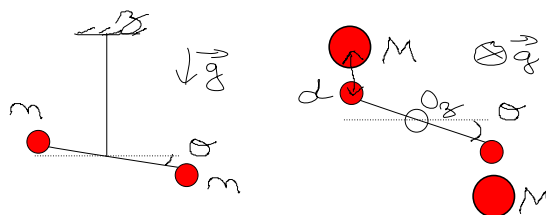


1. Qu'est-ce qui permet au capot de rester ouvert (donc, de ne pas tomber) ?
2. Yuna a ensuite décidé de faire quelques mesures : la masse du capot est $m = 32$ g, sa longueur est $L = 6$ cm, et l'angle minimal qui permet de maintenir le capot ouvert est $\theta_{min} = 45^\circ$. En supposant que le capot est un solide homogène, trouver la force du couple de frottement au niveau de la liaison pivot.



Exercice 2 : Expérience de Cavendish

La figure ci-dessous illustre le principe de l'expérience de Cavendish. Deux particules de masse m sont fixées aux extrémités d'une tige de longueur $2l$, un fil de torsion relie le centre de la tige à un point fixe du laboratoire, réalisant ainsi un pendule de torsion. En approchant deux sphères de masse M à une distance d de chacune des extrémités du pendule, on observe une déviation angulaire dont la mesure permet de déterminer G la constante de gravitation.



Dans la suite, on note θ la déviation angulaire du pendule à sa position d'équilibre. On note k la raideur angulaire du fil de torsion : le moment du couple de rappel est $-k\theta\vec{u}_z$. Les sphères de masse M et les particules m sont considérées comme des particules ponctuelles.

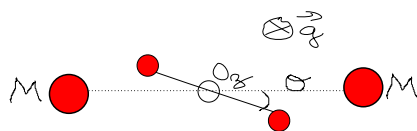
Méthode historique

1. Pour calculer la déviation angulaire θ due à l'attraction des sphères, on suppose $\theta l \ll d$ et $l \gg d$. Montrez, en justifiant les simplifications que la couple exercé par les deux masses sur le pendule est $\Gamma_M = 2G\frac{Mm}{d^2}$.

- Appliquer le théorème scalaire du moment du cinétique au pendule pour trouver l'expression de l'angle θ à l'équilibre.
- Pour son expérience, Cavendish a utilisé les paramètres suivants : $m = 0,80 \text{ kg}$, $M = 158 \text{ kg}$, $l = 1,0 \text{ m}$, $d = 20 \text{ cm}$ et $k = 3,6 \cdot 10^{-4} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Calculer la valeur numérique de θ .
- Parmi les différentes grandeurs qui interviennent dans la détermination de G à partir de la mesure de θ , laquelle vous semble la plus difficile à déterminer directement ? Proposer une expérience complémentaire pour mesurer cette grandeur. Exprimer G en fonction de M , l , d et θ et du résultat de la mesure que vous avez proposée.

Méthode dynamique

- On suppose que la masse de la tige qui relie les deux particules de masse m est négligeable. Calculer le moment d'inertie I du pendule de torsion par rapport à son axe de rotation.
- En l'absence des masses M , quelle est la période T des oscillations du pendule de torsion ?
- On ajoute les masses M à une distance d des masses m , mais cette fois-ci dans l'alignement de la tige du pendule. On cherche la nouvelle période des oscillations. On suppose à nouveau que $l\theta \ll d$. Montrer que le couple exercé par les masses M est $\Gamma_M M = -G \frac{Mm}{d^2} l\theta$.
- Quelle est la période des oscillations T' ?
- Montrer que l'on peut alors mesurer G à l'aide de T et T' et surtout que la grandeur difficile à mesurer n'apparaît plus dans son expression.



Exercice 3 : Étude d'une poulie Une masse m de $5,0 \text{ kg}$ est suspendue à l'extrémité d'une corde enroulée sur une poulie de masse $m_p = 1,0 \text{ kg}$ et de rayon $R = 10 \text{ cm}$ en liaison pivot idéale autour de son axe (horizontale) avec un support fixe. Le moment d'inertie de la poulie par rapport à son axe vaut $I = \frac{1}{2} m_p R^2$

- Si la poulie est en rotation uniforme autour de son axe à la vitesse angulaire $\dot{\theta}$, quelle est la vitesse de la masse m ?
- La poulie est retenue par un opérateur. Où ce dernier a-t-il le plus intérêt à appliquer sa force et dans quelle direction ? Quelle est la force minimale qu'il doit exercer sur la poulie pour l'empêcher de tourner ?
- L'opérateur lâche la poulie qui se met en mouvement. Déterminer l'accélération de la masse ainsi que la tension de la corde

Exercice 4 : Volant d'inertie

Initialement immobile, une machine tournante de moment d'inertie J par rapport à son axe est soumise à partir de l'instant $t = 0$ à l'action d'un couple moteur de moment Γ_0 constant. On étudie le mouvement de la machine en supposant que l'ensemble des forces de frottement a un moment de la forme $-k\omega$.

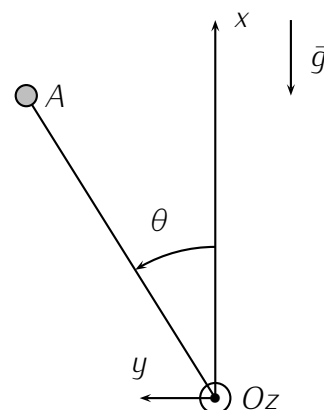
- Analyser ce mouvement en identifiant d'abord la vitesse angulaire ω_0 atteinte en régime permanent ainsi que le temps de relaxation τ du système. Donner l'expression de ω/ω_0 en fonction de t/τ et décrire l'évolution. Faire un bilan des forces et des moments qui s'exercent sur le volant. Appliquez le théorème du moment cinétique pour aboutir à une équation différentielle du premier à coefficients constants.

2. On reprend l'étude précédente en supposant que, en raison de vibration indésirables, le couple moteur n'est plus une constante mais est modulé à la pulsation Ω avec un taux de modulation η tel que $\Gamma = \Gamma_0(1 + \eta \cos \Omega t)$. Établir l'équation différentielle définie par la fonction $\zeta(t)$ telle que $\omega(t) = \omega_0(1 + \zeta(t))$. Montrer que, au bout d'un temps suffisant $\zeta(t)$ est une fonction sinusoïdale de pulsation Ω que l'on cherchera sous la forme : $\zeta = \alpha \cos(\Omega t + \varphi)$. Appliquez la même méthode qu'à la question précédente. Déterminer les constantes α et $\tan(\varphi)$. On a affaire à une équation différentielle dont le second membre est sinusoïdal. On peut alors faire l'étude en régime sinusoïdal forcé. Passez l'équation différentielle dans le domaine des complexes et exprimer l'amplitude complexe de ζ . À l'aide des expressions précédentes, expliquer pourquoi, de façon à régulariser le fonctionnement d'une machine tournant, on adjoint aux parties tournantes un anneau massif de rayon rayon appelé volant.

Exercice 5 : Pendule de Holweck – Lejay.

Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité A d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = OA$, articulée en O et mobile dans un plan vertical.

Un ressort "spirale" (non représenté sur la figure) exerce sur M , via la tige, un couple de rappel équivalent à un moment de force dont la projection sur Oz est : $\mathcal{M}_{Oz} = -C\theta$.



- Déterminer, par application du théorème scalaire du moment cinétique, l'équation différentielle vérifiée par θ .
- À quelle condition, la position $\theta = 0$ correspond-elle à un équilibre stable ?
- Si cette condition est vérifiée, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$ et mettre T sous la forme $T = 2\pi\sqrt{\frac{L}{G-g}}$. On donnera l'expression de G .
- Calculer $\frac{\Delta T}{T}$ la variation relative de T si g varie de Δg . Voyez-vous une application ?

Exercice 6 : Chute d'un arbre (ou d'un stylo)

On assimile un arbre à une tige longue et homogène de longueur L et de masse m . On le scie à sa base et l'arbre bascule en tournant autour de son point d'appui au sol. On suppose que le point d'appui reste fixe et ne glisse pas et on repère la position de l'arbre par l'angle θ qu'il fait avec la verticale. À $t = 0$, l'arbre fait un angle $\theta_0 = 5^\circ$ avec la verticale et est immobile.

On donne le moment d'inertie par rapport à un axe orthogonal à l'arbre et passant par une des extrémités : $I = \frac{1}{3}mL^2$

- Établir l'équation du mouvement de chute de l'arbre. Faire un bilan des forces et appliquez le théorème du moment cinétique.
- Montrer que, lorsque l'arbre fait un angle θ , sa vitesse angulaire est :

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{3g}{L}(\cos \theta_0 - \cos \theta)}$$

L'astuce souvent employée consiste à multiplier terme à terme l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ puis d'intégrer. Faites attention aux constantes d'intégration.

- ré-écrire cette relation en utilisant la méthode de séparation des variables telle qu'elle a été vue en cinétique chimique (mettre tout les t et dt d'un côté et tout les θ et $d\theta$ de l'autre)

4. Déterminer le temps de chute d'un arbre de 30 m. On donne pour $\theta = 5^\circ$ Il s'agit d'intégrer l'équation différentielle.

$$\int_{\theta_0}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{\sqrt{\cos \theta_0 - \cos \theta}} = 5,1$$

5. Proposez un programme permettant d'évaluer cette intégrale dans le cas général.
6. On se rend compte que lorsque $\theta_0 \rightarrow 0$, l'intégrale tend vers l'infini. Et le temps de chute ? Est-ce surprenant ?
7. Par une méthode similaire, calculer la période des oscillations d'un pendule simple en fonction de l'amplitude lorsque l'on ne peut pas faire l'approximation des petites amplitudes. (on exprimera le résultat sous forme d'une intégrale que l'on ne cherchera pas à calculer)

méca → thermo

Définir les échelles
microscopiques et
macroscopiques puis l'échelle
mésoscopique.

méca → thermo

Qu'est ce qu'un système fermé

méca → thermo

Qu'est ce qu'un système isolé

méca → thermo

Qu'est ce qu'un paramètre
d'état extensif. Donner des
exemples.

méca → thermo

Qu'est ce qu'un paramètre
d'état intensif. Donner des
exemples.

méca → thermo

Définir l'équilibre
thermodynamique d'un
système.

méca → thermo

Définir la vitesse quadratique
moyenne d'une particule.

méca → thermo

Définir le libre parcours
moyenne et donner des
exemples d'ordres de
grandeurs.

méca → thermo

Citer les hypothèses du
modèle du gaz parfait
monoatomique.

Un système fermé n'échange ni matière ni énergie avec le milieu extérieur.

Un système fermé n'échange pas de matière avec le milieu extérieur.

On peut considérer chaque particule et on modélise le système à l'aide des interactions entre particules : échelle microscopique On peut considérer le système de façon moyenne en considérant un petit nombre de paramètres (température, pression) : échelle macroscopique On définit une échelle intermédiaire, suffisamment grande pour contenir un grand nombre de particules et pour pouvoir définir des grandeurs moyennes, mais suffisamment petite pour que ces grandeurs soient homogènes : échelle mésoscopique .

Un système thermodynamique, livré à lui même dans des conditions extérieures ne variant pas, est dit en équilibre thermodynamique lorsque toutes ses propriétés macroscopiques ne varient plus.

Un paramètre d'état est intensif s'il est indépendant de la quantité de matière et il est défini en un point du système : masse volumique, température, pression

Un paramètre d'état est extensif s'il est proportionnel à la quantité de matière et relatif au système entier : volume, masse, charge...

Particules ponctuelles sans interaction. Pas de mouvement d'ensemble. Isotropie de la distribution des vitesses.

On appelle libre parcours moyen la distance moyenne parcourue par les particules du système entre deux chocs.

- à température et pression ambiante pour un gaz : $l \simeq 70 \text{ nm}$
- à température ambiante et 1 Pa pour un gaz : $l \simeq 10 \text{ mm}$
- pour un liquide : 10^{-10} m

$$v^* = \sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N v_i^2}$$

méca → thermo

On imagine un gaz parfait monoatomique hypothétique dans lequel toutes les particules ont la même vitesse en norme v^* et ne se déplacent que selon les trois directions de l'espace (Ox , Oy , Oz). Établir l'expression de la pression cinétique.

méca → thermo

Définir la température cinétique.

méca → thermo

Citer l'équation d'état du gaz parfait.

méca → thermo

Définir la pression au sein d'un fluide.

méca → thermo

Exprimer l'énergie interne d'un gaz parfait monoatomique en fonction de sa température.

méca → thermo

Qu'est ce qu'une fonction d'état ?

méca → thermo

Définir la température d'un système réel.

méca → thermo

Définir l'énergie interne d'un système réel.

méca → thermo

Qu'est-ce que la capacité thermique à volume constant d'un corps ?

$$pV = nRT$$

$$\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_B T$$

$$p = \frac{1}{3}mn^*v^{*2}$$

On appelle fonction d'état d'un système thermodynamique, une fonction dont la valeur ne dépend que des paramètres d'états.

$$U = \frac{3}{2}nRT$$

La pression p est définie telle que sur la surface élémentaire $d\vec{S}$ d'une paroi, la force élémentaire exercée par le fluide sur la paroi s'exprime :

$$d\vec{F}_{\text{fluide} / \text{paroi}} = p d\vec{S}$$

avec $d\vec{S}$ un vecteur de norme dS , l'aire de la surface élémentaire considérée, normal à la surface et orientée du fluide vers la paroi.

$$C_v = \left(\frac{\partial U}{\partial T} \right)_v$$

L'énergie interne d'un système est la somme de l'énergie cinétique propre de ses composants (énergie cinétique microscopique, E_c^*) et de l'énergie potentielle d'interaction entre les composants (énergie de liaison dans un cristal par exemple) :

$$U = E_{c,\text{micro}} + E_{p,\text{int}}$$

La température d'un corps au repos thermodynamique est définie par référence à la température d'un gaz parfait monoatomique avec lequel il est placé en équilibre thermique.

méca → thermo

Qu'est-ce qu'une phase condensée ?

méca → thermo

Exprimer la variation d'état interne d'une phase condensée incompressible et indilatable.

méca → thermo

Dans quelles limites peut-on assimiler un gaz réel à un gaz parfait ?

méca → thermo

Énoncer la première loi de Joule.

méca → thermo

Comment définir la température d'un système réel ?

Un gaz réel peut être assimilé à un gaz parfait dans la limite des grands volumes ou des basses pressions.

$$\Delta U = C\Delta T$$

On appelle phase condensée une phase dans laquelle les particules sont quasiment au contact.

La température d'un système peut être définie comme la température du gaz parfait avec lequel il est placé en équilibre.

L'énergie interne d'un gaz parfait ne dépend que de sa température.

T_1 – De la mécanique à la thermodynamique

Conseils pour ce TD

- Bien faire la différence entre les grandeurs microscopiques (nombre de particules N , énergie cinétique moyenne d'une particule ...) et les grandeurs macroscopiques (quantité de matière, énergie interne ...). On peut souvent les relier par l'intermédiaire de la constante d'Avogadro d'où des ordres de grandeurs bien différents.
- Retenez les hypothèses du gaz parfait monoatomique (particules ponctuelles sans interaction) et la méthode du calcul qui permet d'obtenir l'expression de la pression cinétique.
- On peut retrouver rapidement la relation liant u la vitesse quadratique moyenne des particules du gaz parfait à sa température en partant de l'expression de son énergie interne ou de l'énergie cinétique moyenne d'une particule. Vérifier que vous en êtes capable.
- Partant de la relation précédente et de l'équation d'état, on peut remonter à celle liant la pression cinétique à la vitesse quadratique.

Entraînement au calcul

Entraînement 21.1 — Quelques calculs de volume.



Calculer le volume (en L) occupé à $T = 25^\circ\text{C}$ et sous une pression $P = 1,0\text{ bar}$ pour les gaz suivants.

- a) 100 g d'argon ($M_{\text{Ar}} = 40\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)
- b) 32 g de dioxygène O_2 ($M_{\text{O}} = 16\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)
- c) 1,2 kg de dioxyde de carbone CO_2 ($M_{\text{C}} = 12\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

Entraînement 21.2 — Bouteille de butane.



Une bouteille de 30,6 L, maintenue à 20°C , contient du butane (C_4H_{10}) qui est sous la forme d'un mélange liquide/gaz comprimé. Le contenu de la bouteille présente une masse m de 13 kg. On donne $M_{\text{H}} = 1\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{\text{C}} = 12\text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

- a) Combien vaut la masse molaire (en $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$) du butane ?
- b) Quelle serait la pression à l'intérieur de la bouteille si tout le butane était à l'état gazeux ?
.....

c) Quel volume occuperait le contenu de la bouteille, s'il était entièrement à l'état gazeux, sous une pression de 1,0 bar et à la température de 20 °C?



Entraînement 21.3 — Volume molaire.



Calculer le volume molaire (en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1}$) d'un gaz parfait :

a) sous 1,00 bar et à 25,0 °C

b) sous 2,00 bar et à 50,0 °C

Entraînement 21.4 — Surchauffe ?



Un pneu de voiture, de volume supposé constant, est gonflé à froid, à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$, sous la pression $P_1 = 2,0\text{ bar}$. Après avoir roulé un certain temps, le pneu affiche une pression $P_2 = 2,3\text{ bar}$.

Quelle est alors sa température (en $^\circ\text{C}$) si l'on assimile l'air à un gaz parfait ?

Entraînement 21.5



Un récipient de volume V_1 enferme de l'air (assimilé à un gaz parfait) à la température $T_1 = 20^\circ\text{C}$ et sous une pression $P_1 = 1,20\text{ bar}$.

Que vaut la pression finale (en bar) si l'on augmente :

a) le volume de 20% ?

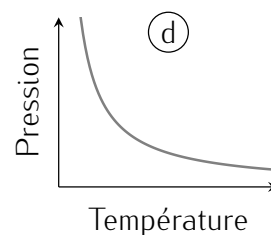
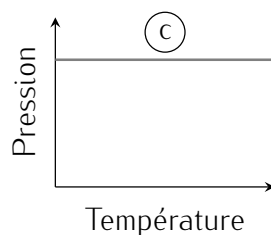
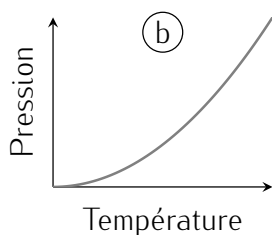
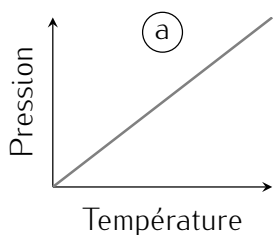
b) la température de 10°C ?

Manipulations algébriques

Entraînement 21.6 — Faire le lien entre une formule et un graphique.

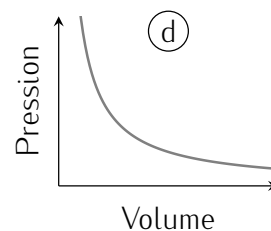
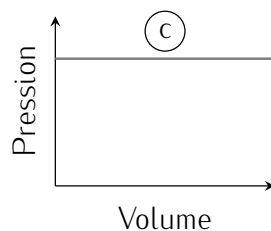
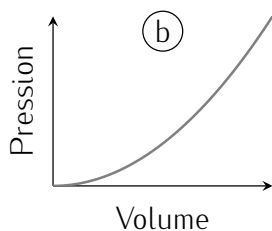
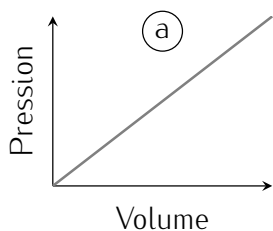


a) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et température lorsque n et V sont fixés ?



.....

b) Lequel de ces graphes représente la relation entre pression et volume lorsque n et T sont fixés ?



.....

Entraînement 21.7 — Masse volumique de l'eau.



On considère un gaz parfait de masse molaire M , à la pression P et à la température T .

a) Exprimer sa masse volumique ρ en fonction de M , P et T

b) La vapeur d'eau a pour masse volumique $\rho = 0,595 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$ à 100°C et 1013 hPa . Sa masse molaire est $M_{\text{H}_2\text{O}} = 18 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Est-ce compatible avec le modèle du gaz parfait?

Entraînement 21.8 — Compression d'un gaz.



Un gaz, initialement à la pression P_1 et à la température $T_1 = 25^\circ\text{C}$, est comprimé jusqu'à une pression valant $P_2 = 4P_1$. Sa masse volumique initiale est de ρ_1 .

Exprimer sa masse volumique finale ρ_2 en fonction de ρ_1 si sa température T_2 vaut :

a) $T_2 = T_1$

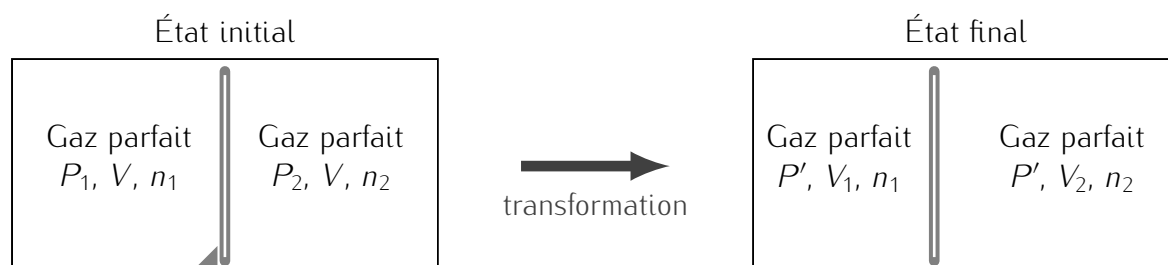
b) $T_2 = 50^\circ\text{C}$

Entraînement 21.9 — Mouvement d'un piston.



Une enceinte maintenue à une température T est divisée en deux parties d'égal volume V , par un piston mobile sans frottement.

Initialement, le piston est bloqué, et chaque compartiment contient un gaz parfait de pressions respectives P_1 et P_2 . On note n_1 et n_2 les quantités de matière dans chaque compartiment.



Une fois débloquent, le piston se déplace librement de façon à ce que les pressions dans chaque compartiment deviennent égales.

Déterminer :

a) la relation entre n_1 , n_2 , P_1 et P_2

b) le volume V_1 en fonction de V , P_1 et P_2

Entraînement 21.10 — Expression de la densité d'un gaz.



La densité d d'un gaz A est le rapport entre la masse volumique du gaz A et la masse volumique de l'air sous les mêmes conditions de pression et de température. Autrement dit, c'est

$$d = \frac{\rho_A}{\rho_{\text{air}}}.$$

On note M_A la masse molaire de A et M_{air} celle de l'air.

Exprimer la densité d en fonction de M_A et M_{air} à l'aide de la loi du gaz parfait

Entraînement 21.11 — Bulle de savon.



Une bulle de savon sphérique de rayon r enferme n moles d'air à la température ambiante T_0 .

La pression qui règne à l'intérieur de la bulle de savon est donnée par

$$P = P_0 + \frac{4\gamma}{r}$$

où γ est la tension superficielle de l'eau savonneuse et où P_0 est la pression atmosphérique.

a) Donner l'expression du volume de la bulle en fonction r

b) Exprimer n en fonction de P_0 , T_0 , γ et r

Réponses mélangées

$\frac{2P_1}{P_1 + P_2} V$	1,24 bar	64 °C	non	$\frac{4\pi P_0 r^3 + 16\pi \gamma r^2}{3RT_0}$
25 L	(d)	$4\rho_1$	$\frac{MP}{RT}$	58 g · mol ⁻¹
$\frac{n_2}{n_1} = \frac{P_2}{P_1}$	3,7 ρ_1	$\frac{M_A}{M_{\text{air}}}$	1,00 bar	13,4 L · mol ⁻¹
$\frac{4}{3}\pi r^3$	24,8 L · mol ⁻¹	62 L	5,5 m ³	1,8 × 10 ² bar

Exercice 1 : Description microscopique d'un Gaz parfait

Un récipient cubique contient, sous une pression $p = 1$ bar et à la température $t = 0^\circ\text{C}$, $n = 10^3$ moles d'argon de masse molaire $M = 39,9 \text{ g.mol}^{-1}$.

En considérant ce gaz comme parfait, calculer la masse m d'un atome, le nombre N d'atomes d'argon, le volume V du récipient ainsi que son arête L , le nombre moyen n^* d'atome par mètre cube, l'ordre de grandeur a de l'espacement entre deux atomes, l'énergie cinétique moyenne d'un atome et la vitesse quadratique moyenne u des atomes.

Exercice 2 : Caractéristiques d'un Gaz Parfait Monoatomique, fuite de Gaz

Soit un récipient de volume constant $V = 10 \text{ L}$. Il contient un GPM (de l'hélium) à une pression $p = 2,1$ bar et à la température $T = 300 \text{ K}$.

On donne : $R = 8,31 \text{ J.mol}^{-1}.\text{K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits, $k = \frac{R}{N_A} \simeq 1,38.10^{-23} \text{ J.K}^{-1}$, la constante de Boltzmann et $M_{He} = 4 \text{ g.mol}^{-1}$, la masse molaire de l'hélium.

Exprimer en fonction des données puis calculer :

1. La masse m d'hélium contenue dans le récipient et la densité particulaire n^* des atomes dans le récipient.
2. L'énergie cinétique totale E_c du gaz enfermé puis l'énergie cinétique moyenne par atome $\langle e_c \rangle$ et la vitesse quadratique moyenne u des atomes.
3. Par suite d'une fuite de gaz, la pression passe à $p' = 1,4$ bar et la température à $T' = 290 \text{ K}$. Calculer la masse du gaz échappé Δm .
4. On colmate la fuite, à quelle température T_1 doit-on porter le gaz pour atteindre à nouveau p ?

Exercice 3 : Energie interne, tables thermodynamiques.

Le tableau ci-dessous donne, avec trois chiffres significatifs, le volume molaire V_m (en $\text{m}^3.\text{mol}^{-1}$) et l'énergie interne molaire U_m (en kJ.mol^{-1}) de la vapeur d'eau à la température $t = 500^\circ\text{C}$ pour différentes valeurs de la pression p (en bars). On donne en outre la constante des gaz parfaits : $R = 8,314 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$

p	1	10	20	40	70	100
V_m	$6,43.10^{-2}$	$6,37.10^{-3}$	$3,17.10^{-3}$	$1,56.10^{-3}$	$8,68.10^{-4}$	$5,90.10^{-4}$
U_m	56,33	56,23	56,08	55,77	55,47	54,78

1. Justifier sans calcul que la vapeur d'eau ne se comporte pas comme un gaz parfait.
2. On se propose d'adopter le modèle de Van der Waals pour lequel on a

$$\left(p + \frac{a}{V_m^2}\right)(V_m - b) = RT \quad U_m = U_{m,GP} - \frac{a}{V_m}$$

- (a) Calculer le coefficient a en utilisant les énergies internes des états à $p = 1$ bar et $p = 100$ bars. Calculer b en utilisant l'équation d'état à $p = 100$ bars et en déduire un ordre de grandeur du rayon des particules r_S dans le modèle des sphères dures.
- (b) Quelle valeur obtient-on alors pour U_m à $p = 40$ bars ? Quelle température obtient-on alors en utilisant l'équation d'état avec $p = 40$ bars et $V_m = 1,56.10^{-3} \text{ m}^3.\text{mol}^{-1}$? Conclure sur la validité du modèle.

**Exercice 4 : Vitesses quadratiques moyennes**

1. L'air est constitué principalement de dioxygène O_2 et de diazote N_2 .
Calculer les vitesses quadratiques moyennes de ces molécules à la température $t_0 = 20\text{ °C}$.
On donne $R = 8,31\text{ J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits et les masses molaires $M_N = 14\text{ g.mol}^{-1}$ et $M_O = 16\text{ g.mol}^{-1}$.
2. Calculer, en électron-volts (eV), l'énergie cinétique moyenne $\langle e_c \rangle$ d'une molécule O_2 à la température t_0 . L'énergie molaire de la liaison $O - O$ a pour valeur $E_{O-O} = 498\text{ kJ.mol}^{-1}$.
Calculer, en électron-volts, l'énergie de la liaison $O - O$ pour une molécule et comparer au résultat précédent. Que peut-on en conclure ?
Pour quelle valeur de la température T_c a-t-on rupture de O_2 (vérifier que l'on reste dans le cadre de la mécanique classique).
3. Calculer numériquement la valeur de la vitesse de libération du diazote à la surface de la Terre. Quelle devrait être la température à la surface de la Terre pour que N_2 échappe à son attraction. Mêmes questions pour la Lune ($R_L = 1800\text{ km}$, $M_L = 7,4 \cdot 10^{22}\text{ kg}$, $\mathcal{G} = 6,67 \cdot 10^{-11}\text{ SI}$ la constante de gravitation universelle).

**Exercice 5 : Retour dans l'atmosphère d'une capsule spatiale**

Lors de son retour dans l'atmosphère, un engin spatial se déplace à la vitesse d'environ $40\,000\text{ km.h}^{-1}$. L'atmosphère dans laquelle il se trouve est alors uniquement constitué de diazote (par hypothèse). À quelle température l'engin sera-t-il soumis ? Conclure.
On donne $R = 8,31\text{ J.mol}^{-1}\text{.K}^{-1}$, la constante des gaz parfaits et les masses molaires $M_N = 14\text{ g.mol}^{-1}$.

**Exercice 6 : Effusion gazeuse**

Une cabine de navette spatiale (volume $V = 2\text{ m}^3$) contient N_0 molécules d'air à la température T . A l'instant $t = 0$, une petite météorite perce dans la paroi un petit trou de section $s = 1\mu\text{m}^2$ par lequel le gaz peut s'échapper dans le vide. On supposera que le trou est suffisamment petit pour que la distribution des vitesses des particules dans la navette ne soit pas perturbée. On note $N(t)$ le nombre de molécules présentes à l'intérieur de l'enceinte à l'instant t . On prendra un modèle dans lequel les molécules se déplacent selon 6 directions, avec des vitesses de même norme (égale à la vitesse quadratique moyenne v^*).

1. Montrez qu'à un instant t , le nombre de molécules sortant de l'enceinte pendant dt s'écrit :

$$dN_s = \frac{N_s}{6V} v^* dt$$

2. Faire un bilan de particules sur le gaz contenu dans la navette et en déduire une équation différentielle sur $N(t)$, on fera apparaître un temps caractéristique dont on vérifiera la dimension.
3. En déduire l'expression du nombre de molécule dans l'enceinte à l'instant t .
4. Donnez finalement l'expression de l'instant $t_{1/2}$ au bout duquel la pression dans l'enceinte a diminuée de moitié.

