TP n°7
Méthode d'Euler – Amplificateur Linéaire Intégré

PCSI$_2$ 2025 – 2026

I Résolution numérique d'équations différentielles

La méthode d'Euler permet de résoudre de manière approchée des équations différentielles présentées sous la forme

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(y(t), t\big), \quad t \in [t_0, t_0 + T] \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

où F est une fonction de deux variables (y, t), définie au voisinage de (y_0, t_0). Ce cadre permet d'étudier la plupart des équations différentielles du premier ordre sur un intervalle de temps fini $[t_0, t_0 + T]$, munie d'une condition initiale à l'instant t_0.

On rappelle qu'une solution est : une fonction $y : t \in [t_0; t_0 + T] \mapsto y(t) \in \mathbb{R}^p$ vérifiant la condition initiale $y(t_0) = y_0$ et pour tout $t \in [t_0; t_0 + T]$, la relation $y'(t) = F(y(t), t)$. Dans les bons cas, F est définie sur une partie de $\mathbb{R}^p \times [t_0; t_0 + T]$. Les cas les plus usuels correspondent à $p \leq 3$ et même très souvent $p = 1$.

1. Cas des équations différentielles du premier ordre dans $\mathbb{R}$

Ici, on s'intéresse au cas $p = 1$ (qui nous servira de référence par la suite).

1.a. Exemples

$$\begin{cases} y'(t) = -2\,y(t), \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 1, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto -2x \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) + \cos(t)\,y(t) = \sin(t), \quad t \in [0, 2\pi] \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto \sin(t) - x\cos(s) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) = 2y(t)(1 - y(t)), \quad t \in [0, 10] \\ y(0) = 10^{-4}, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mapsto 2x(1 - x) \in \mathbb{R}$$

$$\begin{cases} y'(t) = \sqrt{1 - t(y(t))^2}, \quad t \in [0, 1] \\ y(0) = 0, \end{cases} \qquad F : (x, t) \in \left\{(x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R} \mid t\,x^2 < 1\right\} \mapsto \sqrt{1 - tx^2} \in \mathbb{R}_+$$

1.b. Principe de la méthode d'Euler

Graphiquement, la méthode d'Euler consiste à approcher la courbe (le graphe) de la fonction solution y, inconnue, par une ligne brisée que l'on construit point après point (approximation affine par morceaux).
On peut aussi penser une situation physique où un mobile est à un instant t à une position $M(t)$, avec une vitesse $\vec{v}(t) = \vec{F}(M(t), t)$. Comment approcher sa position à l'instant $t + \mathrm{d}t$?

$\vec{O}M(t + h) = \vec{O}M(t) + \mathrm{d}t\vec{v}(t)$.

On imagine que si l'on prend dt assez petit, on pourra ainsi tracer la trajectoire comme une succession de lignes brisées approchant assez bien la réalité, la vitesse aux instants utiles étant facile à obtenir en utilisant l'approximation de trajectoire faite.

On décompose l'intervalle d'étude en y répartissant $n + 1$ instants régulièrement espacés (donc il y a n intervalles de temps) : $t_0 < t_1 < t_2 < \cdots < t_{n-1} < t_n = t_0 + T$.
Deux instants consécutifs sont donc séparés d'un même pas temporel $h = \frac{T}{n}$

— La valeur de la solution en l'instant t_0 est donnée par l'équation : c'est y_0.
  On partira donc du point M_0 (t_0, y_0)
— Pour construire le point suivant, on ne connaît pas la courbe solution entre t_0 et t_1, mais sa tangente au point d'abscisse t_0 (vitesse à la date t_0) est connue grâce à l'équation différentielle. En effet, la pente de cette tangente (la vitesse) vaut

$$y'(t_0) = F(y(t_0), t_0) = F(y_0, t_0) \text{ qui est calculable.}$$

  On décide d'assimiler la courbe de y sur l'intervalle $[t_0; t_1]$ à sa tangente en t_0 (on suppose la vitesse constante pendant l'intervalle). On en déduit une approximation de $y(t_1)$:

$$y(t_1) = y(t_0 + h) \simeq y(t_0) + hF(y_0, t_0) = y_0 + hF(y_0, t_0)$$

  On pose donc $y_1 = y_0 + hF(y_0, t_0)$ et on place le point M_1 (t_1, y_1)
— On passe de l'instant t_1 à l'instant t_2 de manière similaire. En l'instant t_2, la tangente à la courbe solution a pour pente $y'(t_1) = F(y(t_1), t_1) \simeq F(y_1, t_1)$
  En assimilant la courbe de y entre t_1 et t_2 à sa tangente en t_1, on obtient

$$y(t_2) = y(t_1 + h) \simeq y(t_1) + hF(y(t_1), t_1) \simeq y_1 + hF(y_1, t_1)$$

  On pose donc $y_2 = y_1 + hF(y_1, t_1)$ et on place le point M_2 (t_2, y_2)
— Et ainsi de suite jusqu'à arriver à t_n :

$$\begin{aligned} \forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y(t_{k+1}) = y(t_k + h) &\simeq y(t_k) + hy'(t_k) \\ &= y(t_k) + hF\big(y(t_k), t_k\big) \\ &\simeq y_k + hF(y_k, t_k) \end{aligned}$$

2. Bilan

Pour résoudre de manière approchée le problème de Cauchy

$$\begin{cases} y'(t) = F\big(y(t), t\big), & t \in [t_0, t_0 + T], \\ y(t_0) = y_0, \end{cases}$$

la méthode d'Euler consiste à introduire des instants régulièrement espacés

$$t_k = t_0 + kh \quad \text{où } h = \frac{T}{n} \text{ est le pas de la méthode },$$

puis d'approcher les valeurs de la solution aux instants t_k par les nombres y_k calculés de manière récurrente par :

$$\forall k \in [\![0, n-1]\!], \quad y_{k+1} = y_k + hF(y_k, t_k)$$

Les points $M_k(t_k, y_k)$ dessinent une ligne brisée qui approche la courbe solution sur l'intervalle $[t_0, t_0 + T]$.

3. Réponse d'un système du premier ordre à une excitation gaussienne

On souhaite résoudre numériquement le problème de Cauchy suivant :

$$\begin{aligned} y'(t) + \frac{y(t)}{\tau} &= \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right), \quad t \in \mathbb{R}_+ \\ y(0) &= 0, \end{aligned}$$

On prendra les paramètres suivants : $\tau = 2,2.10^{-4}$ s, $\sigma = 0,5\tau$ et $t_0 = 5\sigma$.

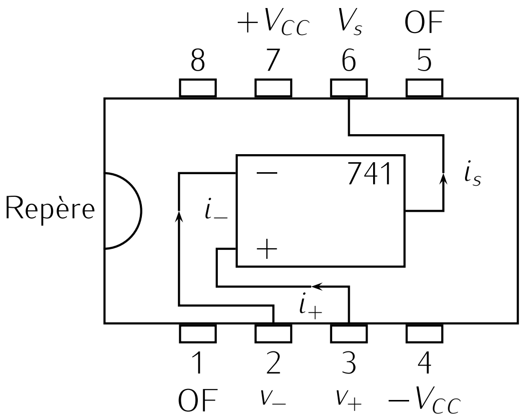
1. Importer les fonctions `exp`, `sqrt` et la constante `pi` du module `math` (`from math import exp, sqrt, pi`)
2. Définir les variables globales : `tau`, `sigma`, `t0`, `T` et `n`.
3. Définir la fonctionnelle F : écrire une fonction `F` qui prend en argument `y` et `t` et qui renvoie $F(y, t)$
4. Résoudre numériquement le problème de Cauchy à l'aide de la méthode d'Euler. On stockera les valeurs de `y` et `t` dans deux listes : `lst_y` et `lst_t`.
5. Afficher sur une même courbe $y(t)$ et le forçage $\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\left(\frac{t-t_0}{\sqrt{2}\sigma}\right)^2\right)$
6. Jouer avec le paramètre h et conclure sur son influence.

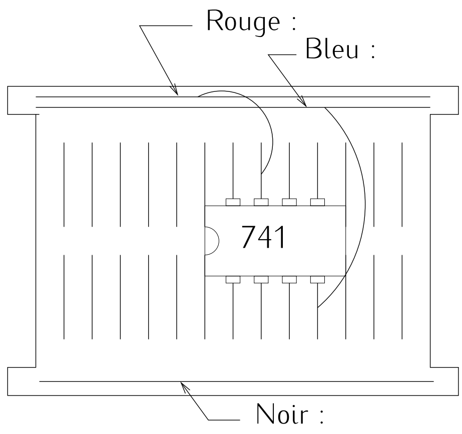
II Amplificateur linéaire intégré

1. Description du composant, alimentation

C'est un composant électronique qui contient des dizaines de transistors pour les ALI les plus simples (modèle 741 par exemple), des diodes, des résistors et des capacités montées sur quelques mm^2 de silicium. On ne s'intéressera pas à son circuit interne, on considère qu'il s'agit d'une "boite noire" dont on étudie les propriétés "vues de l'extérieur".

Les modèles μA741 (dit "741" dont les défauts sont plus faciles à mettre en évidence) et TL081 que nous utiliserons comportent 8 bornes :





- Les bornes 7 et 4 servent à polariser (alimenter) l'amplificateur à l'aide d'un générateur de tension symétrique.
  - Tension positive sur la borne 7 (notée $+V_{CC}$) $+15$ V en général et tension négative sur la borne 4 (notée $-V_{CC}$) -15 V en général.
  - Ce générateur de tension n'est pas représenté sur les schémas mais il est indispensable.
  - Le fait de polariser l'ALI le protège contre d'éventuelles erreurs de montage, c'est donc toujours la première chose à faire.

    Si on inverse le $+15$ V et le -15 V, l'ALI est rapidement détruit.
- Les bornes 2 et 3 sont les entrées de l'amplificateur. La borne 2 est l'entrée inverseuse notée $-$ au potentiel v_- et la borne 3 est l'entrée non inverseuse notée $+$ au potentiel v_+.
- La borne 6 est la sortie de l'amplificateur au potentiel v_s.
- Les bornes 1 et 5 (entrées OF) permettent de régler l'OFFSET, éventuelle tension de décalage.
- La borne 8 n'est pas connectée.

Placer l'ALI. 741 sur la plaquette labtech et le polariser (figure ci-dessus).
Pour cela, utiliser une alimentation à trois bornes : $+15$ V, 0 V et -15 V.

- Relier ces dernières aux bornes correspondantes sur la plaquette, elles mêmes reliées aux lignes $+15$ V et $-15V$ (en haut) et à la ligne de masse (en bas) de la plaquette, le vérifier en retournant la plaquette.
- Utiliser ensuite des petits fils pour relier les lignes $+15$ V et -15 V aux bornes correctes de l'ALI.

Maintenant que l'ALI est polarisé, c'est à vous de jouer. L'objectif est de comprendre le fonctionnement de ce circuit. Mais comment faire ? Toutes les idées sont les bienvenues !