

# Chapitre 24

## Applications linéaires

Dans tout ce chapitre, on fixe un corps  $K$  (en général,  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ ).

### 1 Applications linéaires

#### 1.1 Applications linéaires

<b>Définition 1.1 (Applications linéaires)</b>
--

Soient  $E$  et  $F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Une *application linéaire* de  $E$  vers  $F$  est une application  $f : E \rightarrow F$  telle que

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda \in K, f(x + y) = f(x) + f(y) \quad \text{et} \quad f(\lambda x) = \lambda f(x).$$

#### Exemples.

1. L'application de  $C^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$  qui à une fonction associe sa dérivée est linéaire. En effet, si  $f, g$  sont des fonctions dérivables, alors  $(f + g)' = f' + g'$  et  $(\lambda f)' = \lambda f'$ .

2. De même la fonction

$$\begin{aligned} C^0([0, 1]) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto \int_0^1 f(x) dx \end{aligned}$$

est linéaire. Vérifiez-le!

3. Soit  $X$  un ensemble non vide et  $x_0 \in X$ . L'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0) \end{aligned}$$

est linéaire. En effet, si  $f, g \in \mathbb{R}^X$ , et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\varphi(f + g) = (f + g)(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = f(x_0) + g(x_0) = \varphi(f) + \varphi(g),$$

et

$$\varphi(\lambda f) = (\lambda f)(x_0) = \lambda f(x_0) = \lambda \varphi(f).$$

4. L'application qui a une suite convergente associe sa limite est une application linéaire de l'espace vectoriel des suites vers le corps de base.
5. L'identité est une application linéaire.
6. L'application

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) \longmapsto (x + 2y, -x + y, 3x - y)$$

est une application linéaire. En effet,

$$\begin{aligned} f((x, y) + (x', y')) &= f((x + x', y + y')) \\ &= ((x + x') + 2(y + y'), -(x + x') + (y + y'), 3(x + x') - (y + y')) \\ &= ((x + 2y) + (x' + 2y'), (-x + y) + (-x' + y'), (3x - y) + (3x' - y')) \\ &= (x + 2y, -x + y, 3x - y) + (x' + 2y', -x' + y', 3x' - y') \\ &= f((x, y)) + f((x', y')) \end{aligned}$$

et

$$f(\lambda(x, y)) = f((\lambda x, \lambda y)) = (\lambda x + 2\lambda y, -\lambda x + \lambda y, 3\lambda x - \lambda y) = \lambda(x + 2y, -x + y, 3x - y) = \lambda f((x, y)).$$

7. Vérifiez que la fonction

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, -x + 3y - 5z)$$

est une application linéaire.

### Proposition 1.2

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels et  $f : E \longrightarrow F$  une application linéaire. Alors  $f(0_E) = 0_F$ .

### Remarque.

Ici aussi, il faut savoir qui sont ces "0".

### Proposition 1.3 (Caractérisation des applications linéaires)

Soient  $E, F$  deux  $K$ -espaces vectoriels. Une application  $f : E \longrightarrow F$  est linéaire si et seulement si

$$\forall x, y \in E, \forall \lambda, \mu \in K, f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y).$$

### Définition 1.4

- On note  $\mathcal{L}(E, F)$  l'ensemble des applications  $K$ -linéaires de  $E$  vers  $F$ .
- Un *endomorphisme* de  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers  $E$ . On note  $\mathcal{L}(E)$  l'ensemble des endomorphismes de  $E$ .
- Un *forme linéaire* sur  $E$  est une application linéaire de  $E$  vers son corps de base  $K$ . On note  $E^*$  l'ensemble des formes linéaires sur  $E$ , appelé *dual* de  $E$ .

**Remarque.**

On a  $\mathcal{L}(E) = \mathcal{L}(E, E)$ ,  $E^* = \mathcal{L}(E, K)$ .

**Exemple.**

On a vu des formes linéaires plus haut :  $f \mapsto f(x_0)$  et  $f \mapsto \int_0^1 f(x)dx$ . Voici un autre exemple :

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x, y, z) & \longrightarrow & 2x - 3y + 2z \end{array}$$

Vérifiez que c'est une forme linéaire.

**Proposition 1.5 (Image d'une combinaison linéaire)**

L'image d'une combinaison linéaire par une application linéaire est la combinaison linéaire des images, *i.e.* si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $x_1, \dots, x_n$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) sont des vecteurs de  $E$  et  $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in K^n$ , alors

$$f \left( \sum_{k=1}^n \lambda_k x_k \right) = \sum_{k=1}^n \lambda_k f(x_k).$$

**1.2 Combinaisons linéaires et composition d'applications linéaires****Proposition 1.6**

L'ensemble  $\mathcal{L}(E, F)$  est un sous-espace vectoriel du  $K$ -espace vectoriel  $\mathcal{F}(E, F)$ , *i.e.* les combinaisons linéaires d'applications linéaires sont des applications linéaires.

**Remarque.**

Cela prouve aussi que  $E^*$  et  $\mathcal{L}(E)$  sont des espaces vectoriels.

**Proposition 1.7 (Composition d'applications linéaires)**

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors  $g \circ f \in \mathcal{L}(E, G)$ . Autrement dit, la composée de deux applications linéaires est une application linéaire.

**Proposition 1.8**

$(\mathcal{L}(E), +, \circ)$  est un anneau.

**Remarques.**

1. Par contre,  $(E^E, +, \circ)$  (ensemble de toutes les fonctions de  $E$  vers  $E$ ) n'est pas un anneau, car la distributivité à gauche nécessite la linéarité des fonctions.
2. Ces propositions permettent de prouver qu'une application est linéaire "par combinaisons linéaires et composées d'applications linéaires".

### 1.3 Isomorphismes, automorphismes

#### Définition 1.9 (Isomorphisme, automorphisme)

1. Un *isomorphisme* de  $E$  vers  $F$  est une application linéaire  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  bijective.
2. Un *automorphisme* de  $E$  est un isomorphisme de  $E$  vers  $E$ . On note  $GL(E)$  l'ensemble des automorphismes de  $E$ .

#### Exemples.

1. Une rotation est un automorphisme du plan. En effet, on a déjà vu que c'est un endomorphisme du plan. Mais on sait qu'une rotation est une bijection.

2. La fonction

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y) \longmapsto (2x - y, x + y)$$

est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ . En effet, c'est une application linéaire, puisque si  $(x, y), (x', y') \in \mathbb{R}^2$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , alors

$$\begin{aligned} f(\lambda(x, y) + (x', y')) &= f((\lambda x + x', \lambda y + y')) \\ &= (2(\lambda x + x') - (\lambda y + y'), (\lambda x + x') + (\lambda y + y')) \\ &= (\lambda(2x - y) + (2x' - y'), \lambda(x + y) + (x' + y')) \\ &= \lambda(2x - y, x + y) + (2x' - y', x' + y') \\ &= \lambda f((x, y)) + f((x', y')) \end{aligned}$$

donc  $f$  est linéaire d'après la proposition 1.3. Montrons qu'elle est bijective. Soit  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ . Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$(a, b) = f((x, y)) \iff \begin{cases} 2x - y = a \\ x + y = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a+b}{3} \\ y = \frac{-a+2b}{3} \end{cases},$$

donc pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , l'équation  $(a, b) = f((x, y))$  d'inconnue  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  admet une et une seule solution, donc  $f$  est bijective : c'est un automorphisme de  $\mathbb{R}^2$ .

3. Soit

$$g : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}_2[X] \\ (x, y, z) \longmapsto x + yX + zX^2$$

Montrons que  $g$  est un isomorphisme. Soient  $(x, y, z), (x', y', z') \in \mathbb{R}^3$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Alors

$$\begin{aligned} g(\lambda(x, y, z) + (x', y', z')) &= g((\lambda x + x', \lambda y + y', \lambda z + z')) \\ &= (\lambda x + x') + (\lambda y + y')X + (\lambda z + z')X^2 \\ &= \lambda(x + yX + zX^2) + (x' + y'X + z'X^2) \\ &= \lambda g((x, y, z)) + g((x', y', z')) \end{aligned}$$

donc  $g$  est linéaire. Puis, si  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , il existe un unique triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $P = x + yX + zX^2$  (par définition des polynômes), donc, pour tout  $P \in \mathbb{R}_2[X]$ , l'équation  $P = g((x, y, z))$  d'inconnue  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  admet une et une seule solution :  $g$  est bijective, donc  $g$  est un isomorphisme.

**Définition 1.10 (Espaces isomorphes)**

Deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$  sont isomorphes s'il existe un isomorphisme  $f : E \rightarrow F$ .

**Exemple.**

On vient de voir que  $\mathbb{R}^3$  et  $\mathbb{R}_2[X]$  sont isomorphes.

**Proposition 1.11**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  une application linéaire bijective. Alors son application réciproque  $f^{-1}$  est linéaire, *i.e.*

$$f^{-1} \in \mathcal{L}(F, E).$$

**Proposition 1.12**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel. Alors  $(GL(E))$  est un sous-groupe du groupe  $(S_E, \circ)$  des permutations de  $E$ .

## 2 Noyau et image

On fixe deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ .

### 2.1 Définitions

**Définition 2.1 (Noyau, image)**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Le *noyau* de  $f$  est  $\text{Ker}(f) = \{x \in E, f(x) = 0_F\} = f^{-1}(\{0_F\}) \subset E$ .
2. L'*image* de  $f$  est  $\text{Im}(f) = \{f(x), x \in E\} = f(E) = \{y \in F \mid \exists x \in E, y = f(x)\} \subset F$ .

**Proposition 2.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors :

1.  $0_E \in \text{Ker}(f)$ .
2.  $0_F \in \text{Im}(f)$ .

**Proposition 2.3**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

1.  $\text{Ker}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $E$ .
2.  $\text{Im}(f)$  est un sous-espace vectoriel de  $F$ .

**Exemples.**

1. Soit l'application  $\delta$  de  $C^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$  qui a une fonction associée sa dérivée. Soit  $f \in C^1(\mathbb{R})$ . Alors

$$f \in \text{Ker}(\delta) \iff \delta(f) = 0 \iff f' = 0 \underset{\mathbb{R} \text{ int.}}{\iff} f \text{ est constante,}$$

donc  $\text{Ker}(\delta)$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$ .

Déterminons l'image de  $\delta$ . On cherche les fonctions  $g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$  pour lesquelles il existe  $f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R})$  telle que  $g = \delta(f)$ , ou encore telle que  $g = f'$ . Or, si  $g$  est continue sur  $\mathbb{R}$ , elle admet une primitive sur  $\mathbb{R}$ . Notons  $f$  une primitive de  $g$  sur  $\mathbb{R}$ . Alors par définition,  $\delta(f) = f' = g$ , donc  $g \in \text{Im}(\delta)$ , et  $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \subset \text{Im}(\delta)$ . Mais par définition,  $\text{Im}(\delta) \subset \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ , donc  $\text{Im}(\delta) = \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ .

2. Soit  $X$  un ensemble non vide et  $x_0 \in X$ . Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0) \end{aligned}$$

Alors  $\text{Ker}(\varphi)$  est l'ensemble des fonctions qui s'annulent en  $x_0$ . L'image est  $\mathbb{R}$  tout entier, puisque si  $\lambda \in \mathbb{R}$ , la fonction  $f$  constante égale à  $\lambda$  vérifie  $\varphi(f) = \lambda$ .

3. Déterminons le noyau de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 2y, -x + y, 3x - y) \end{aligned}$$

Pour  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , on a

$$(x, y) \in \text{Ker}(f) \iff f((x, y)) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} x + 2y = 0 \\ -x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \end{cases} \iff (x, y) = (0, 0),$$

donc  $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ .

Déterminons également son image. Soit  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ . On cherche une condition nécessaire et suffisante pour que  $(a, b, c) \in \text{Im}(f)$ , *i.e.* pour qu'il existe  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  tel que  $(a, b, c) = f((x, y))$ . Or,

$$(a, b, c) = f((x, y)) \iff \begin{cases} x + 2y = a \\ -x + y = b \\ 3x - y = c \end{cases} \iff \begin{cases} x = \frac{a-2b}{3} \\ y = \frac{a+b}{3} \\ 2a - 7b - 3c = 0 \end{cases},$$

(l'inconnue est  $(x, y)$ ), donc un tel  $(x, y)$  existe si et seulement si  $2a - 7b - 3c = 0$ , et donc

$$\text{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 7b - 3c = 0\}.$$

Remarquez qu'en prenant  $(a, b, c) = (0, 0, 0)$ , on retrouve le noyau de  $f$ , puisqu'on résout le système  $f((x, y)) = (0, 0, 0)$ .

4. Déterminons le noyau de

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2y + z, -x + 3y - 5z) \end{aligned}$$

Soit  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$\begin{aligned} (x, y, z) \in \text{Ker}(f) &\iff f((x, y, z)) = (0, 0) \iff \begin{cases} x + 2y + z = 0 \\ -x + 3y - 5z = 0 \end{cases} \\ &\iff \begin{cases} x = -\frac{13}{5}z \\ y = \frac{4}{5}z \end{cases} \iff (x, y, z) = \left(-\frac{13}{5}, \frac{4}{5}, 1\right)z, \end{aligned}$$

donc  $\text{Ker}(f) = \text{vect}((-13/5, 4/5, 1)) = \text{vect}((-13, 4, 5))$ .

Déterminons également son image. On fixe  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , et on cherche une CNS pour qu'il existe  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  tel que  $f((x, y, z)) = (a, b)$ . Or,

$$f((x, y, z)) = (a, b) \iff \begin{cases} x + 2y + z = a \\ -x + 3y - 5z = b \end{cases} \iff \begin{cases} x = -\frac{7a+2b}{5} - \frac{13}{5}z \\ y = \frac{a+b}{5} + \frac{4}{5}z \end{cases},$$

donc pour tout  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , le système admet une solution, donc tout élément de  $\mathbb{R}^2$  est dans l'image, donc  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ .

De même ici, le cas  $(a, b) = (0, 0)$  nous donne le noyau.

### Remarque.

On retrouve les techniques déjà vues pour déterminer des sous-espaces vectoriels! Vérifiez que vous avez bien compris ce que l'on fait. Faut-il des équivalences? etc...

### Théorème 2.4 (CNS d'injectivité)

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$f \text{ injective} \iff \text{Ker}(f) = \{0_E\},$$

### Remarque.

Bien entendu,  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{Im}(f) = F$ , mais cela n'a rien à voir avec l'algèbre linéaire, c'est un résultat ensembliste.

### Exemples.

1. Soit l'application  $\delta$  de  $C^1(\mathbb{R})$  dans  $C^0(\mathbb{R})$  qui a une fonction associe sa dérivée. On a vu que  $\text{Ker}(\delta)$  est l'ensemble des fonctions constantes sur  $\mathbb{R}$ . Donc  $\text{Ker}(\delta) \neq \{0\}$ , donc  $\delta$  n'est pas injective (deux fonctions qui diffèrent d'une constante ont même dérivée..).

On a vu aussi que  $\text{Im}(\delta) = C^0(\mathbb{R})$ . Donc  $\delta$  est surjective.

2. Soit  $X$  un ensemble non vide et  $x_0 \in X$ . Soit l'application

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{R}^X &\longrightarrow \mathbb{R} \\ f &\longmapsto f(x_0) \end{aligned}$$

On a vu que  $\text{Ker}(\varphi)$  est l'ensemble des fonctions qui s'annulent en  $x_0$ . Donc  $\varphi$  n'est pas injective. Et on a vu que l'image est  $\mathbb{R}$  tout entier, donc  $\varphi$  est surjective.

3. Soit

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^2 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y) &\longmapsto (x + 2y, -x + y, 3x - y) \end{aligned}$$

On a vu que  $\text{Ker}(f) = \{(0, 0)\}$ , donc  $f$  est injective.

Puis on a vu que  $\text{Im}(f) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid 2a - 7b - 3c = 0\}$ , donc  $\text{Im}(f) \neq \mathbb{R}^3$ , donc  $f$  n'est pas surjective.

4. Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2y + z, -x + 3y - 5z)$$

On a vu que  $\text{Ker}(f) = \text{vect}((-13/5, 4/5, 1)) = \text{vect}((-13, 4, 5)) \neq \{(0, 0, 0)\}$ , donc  $f$  n'est pas injective.

Puis on a vu que  $\text{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ , donc  $f$  est surjective.

## 2.2 Quelques résultats sur les noyaux et les images

### Proposition 2.5

Soient  $E, F, G$  trois  $K$ -espaces vectoriels,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ . Alors

1.  $\text{Im}(g \circ f) \subset \text{Im}(g)$ , et plus précisément,  $\text{Im}(g \circ f) = \text{Im}(g|_{\text{Im}(f)}) = g(\text{Im}(f))$ .
2.  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(g \circ f)$ .
3.  $g \circ f = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(g)$ .

### Proposition 2.6

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . En notant  $f^2 = f \circ f$ , on a

1.  $\text{Im}(f^2) \subset \text{Im}(f)$ .
2.  $\text{Ker}(f) \subset \text{Ker}(f^2)$ .
3.  $f^2 = 0 \iff \text{Im}(f) \subset \text{Ker}(f)$ .

### Proposition 2.7

Soient  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et  $G$  un sous-espace vectoriel de  $E$ . Le noyau de la restriction  $f|_G : G \longrightarrow F$  de  $f$  à  $G$  est

$$\text{Ker}(f|_G) = \text{Ker}(f) \cap G.$$

### Méthode 2.8

Voici des exemples fréquents qui fournissent une technique générale.

1. Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + y - z, 2x - z).$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, x + y - z = 2x - z = 0\} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3, z = 2x, y = x\} \\ &= \{(x, x, 2x), x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}((1, 1, 2)). \end{aligned}$$

Montrons que  $\text{Im}(f)$  est  $\mathbb{R}^2$  tout entier. En effet, si  $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ , on a pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(x, y, z) = (a, b) \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a + x \\ z = b + 2x \end{cases}$$

qui admet une solution, donc  $(a, b) \in \text{Im}(f)$ . Cette fonction est donc surjective, non injective.

2. Soit  $E$  muni d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $F$  muni d'une base  $(f_1, f_2)$ , et

$$f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 & \longmapsto & (x + y - z)f_1 + (2x - z)f_2. \end{array}$$

Alors

$$\begin{aligned} \text{Ker}(f) &= \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E, x + y - z = 2x - z = 0\} = \{xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E, z = 2x, y = x\} \\ &= \{xe_1 + xe_2 + 2xe_3, x \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(e_1 + e_2 + 2e_3). \end{aligned}$$

Montrons que  $\text{Im}(f)$  est  $F$  tout entier. En effet, si  $af_1 + bf_2 \in F$ , on a pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$

$$f(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \end{cases} \iff \begin{cases} y = a + x \\ z = b + 2x \end{cases}$$

qui admet une solution, donc  $af_1 + bf_2 \in \text{Im}(f)$ . Cette fonction est donc surjective, non injective.

3. Soit

$$g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) & \longmapsto & (x + y - z, 2x - z, x + y, z). \end{array}$$

Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(g) \iff x + y - z = 2x - z = x + y = z = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

donc

$$\text{Ker}(g) = \{(0, 0, 0)\}$$

et  $g$  est injective. Déterminons maintenant  $\text{Im}(g)$ . Soit  $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$ . Pour  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$g(x, y, z) = (a, b, c, d) \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4, a + d = c\} = \{(a, b, c, c - a), a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}\left((1, 0, 0, -1), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\right)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $\mathbb{R}^4$ , et  $g$  n'est pas surjective.

4. Soit  $E$  muni d'une base  $(e_1, e_2, e_3)$ ,  $F$  muni d'une base  $(f_1, f_2, f_3, f_4)$ , et

$$g : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & F \\ xe_1 + ye_2 + ze_3 & \longmapsto & (x + y - z)f_1 + (2x - z)f_2 + (x + y)f_3 + zf_4. \end{array}$$

Alors

$$xe_1 + ye_2 + ze_3 \in \text{Ker}(g) \iff x + y - z = 2x - z = x + y = z = 0 \iff (x, y, z) = (0, 0, 0),$$

donc

$$\text{Ker}(g) = \{0\}$$

et  $g$  est injective. Déterminons maintenant  $\text{Im}(g)$ . Soit  $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F$ . Pour  $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ , on a

$$g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F, a + d = c\} = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + (c - a)f_4, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(f_1 - f_4, f_2, f_3)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $F$ , et  $f$  n'est pas surjective.

5. On peut refaire le dernier exemple plus rapidement. Soit  $af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F$ . Pour  $xe_1 + ye_2 + ze_3 \in E$ , on a

$$g(xe_1 + ye_2 + ze_3) = af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \iff \begin{cases} x + y - z = a \\ 2x - z = b \\ x + y = c \\ z = d \end{cases} \iff \begin{cases} x = (b + d)/2 \\ y = a + d - (b + d)/2 \\ z = d \\ a + d = c \end{cases},$$

donc

$$\text{Im}(g) = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + df_4 \in F, a + d = c\} = \{af_1 + bf_2 + cf_3 + (c - a)f_4, a, b, c \in \mathbb{R}\} = \text{vect}(f_1 - f_4, f_2, f_3)$$

C'est donc un sous-espace vectoriel de dimension 3 de  $F$ , et  $f$  n'est pas surjective. Lorsque  $a = b = c = d = 0$ , le système précédent détermine le noyau, qui est donc  $\{0\}$ .

### 3 Image d'une famille libre/génératrice, d'une base par une application linéaire

Dans ce paragraphe, on fixe deux  $K$ -espaces vectoriels  $E$  et  $F$ . Tout se passe comme les familles finies, puisqu'on a toujours des familles à support fini. Entraînez-vous!

#### Proposition 3.1

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille de vecteurs  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f(\text{vect}(e_i)_{i \in I}) = \text{vect}(f(e_i))_{i \in I}$ .

#### Proposition 3.2

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille génératrice de  $E$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. La famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
2.  $f$  est surjective si et seulement si  $F = \text{vect}(f(e_i))_{i \in I}$ .

#### Proposition 3.3

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une famille libre de  $E$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est libre.

**Théorème 3.4**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $u \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

1. La fonction  $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille libre de  $F$ .
2. La fonction  $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une famille génératrice de  $F$ .
3. La fonction  $f$  est un isomorphisme si et seulement si la famille  $(f(e_i))_{i \in I}$  est une base de  $F$ .

**Théorème 3.5 (Caractérisation d'une al par l'image d'une base)**

Soit  $(e_i)_{i \in I}$  une base de  $E$  et  $(f_i)_{i \in I}$  une famille quelconque de vecteurs de  $F$ . Il existe une unique application linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que :

$$\forall i \in I, \varphi(e_i) = f_i.$$

## 4 Applications linéaires en dimension finie

Dans ce §,  $E$  est un espace vectoriel de dimension finie  $n > 0$ . L'espace vectoriel  $F$  n'est pas nécessairement de dimension finie.

### 4.1 Image d'une famille libre, génératrice. Image d'une base

Dans ce paragraphe, il faut comprendre le comportement d'une application linéaire sur une combinaison linéaire. Les démonstrations sont importantes pour cette compréhension.

**Proposition 4.1**

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille de vecteurs de  $E$ , et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors  $f(\text{vect}(e_1, \dots, e_p)) = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ .

**Proposition 4.2**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille génératrice de  $E$ .

1.  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est une famille génératrice de  $\text{Im}(f)$ .
2.  $f$  est surjective si et seulement si  $F = \text{vect}(f(e_1), \dots, f(e_p))$ .

**Remarque.**

Cette proposition peut également s'utiliser avec une base de  $E$ , puisque c'est aussi une famille génératrice de  $E$ .

**Proposition 4.3**

Soit  $(e_1, \dots, e_p)$  une famille libre de  $E$ . Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  est injective, la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_p))$  est libre.

**Remarque.**

Cette proposition peut également s'utiliser avec une base de  $E$ , puisque c'est aussi une famille libre de  $E$ .

**Théorème 4.4**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ .

1. La fonction  $f$  est injective si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est libre dans  $F$ .
2. La fonction  $f$  est surjective si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est génératrice de  $F$ .
3. La fonction  $f$  est un isomorphisme si et seulement si la famille  $(f(e_1), \dots, f(e_n))$  est une base de  $F$ .

**Théorème 4.5 (Caractérisation d'une al par l'image d'une base)**

Soit  $B = (e_1, \dots, e_n)$  une base de  $E$ , et soient  $v_1, \dots, v_n$  des vecteurs de  $F$ .

1. Il existe une et une seule application linéaire  $\varphi \in \mathcal{L}(E, F)$  telle que  $\forall k = 1, \dots, n, \varphi(e_k) = v_k$ .
2. Si  $f, g \in \mathcal{L}(E, F)$ , alors  $\forall k = 1, \dots, n, f = g \iff f(e_k) = g(e_k)$ .

**Proposition 4.6**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1. Si  $f$  est injective,  $\dim(E) \leq \dim(F)$ .
2. Si  $f$  est surjective,  $\dim(E) \geq \dim(F)$  (et en particulier  $F$  est de dimension finie).
3. Si  $f$  est bijective (*i.e.*  $f$  est un isomorphisme),  $\dim(E) = \dim(F)$ .

**Remarques.**

1. On peut bien entendu utiliser cette proposition par contraposée. Si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et  $\dim(E) > \dim(F)$ , alors  $f$  ne peut pas être injective, et si  $\dim(E) < \dim(F)$ , alors  $f$  ne peut pas être surjective.
2. Cette proposition n'est qu'une implication. Elle ne dit bien entendu pas que si  $\dim(E) \leq \dim(F)$ , toutes les applications linéaires entre  $E$  et  $F$  sont injectives!!

**Proposition 4.7**

Soit  $E$  un  $K$ -espace vectoriel de dimension finie. Un espace vectoriel  $F$  est isomorphe à  $E$  si et seulement s'il est de dimension finie et  $\dim(F) = \dim(E)$ . En particulier, tout  $K$ -espace vectoriel de dimension  $n$  est isomorphe à  $K^n$ .

**Remarque.**

Attention, si  $\dim(E) = \dim(F)$  et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , il n'y a aucune raison pour que  $f$  soit bijective!

**Méthode 4.8**

Pour montrer qu'une application linéaire est surjective, on peut montrer que l'image d'une base est une famille génératrice de l'espace d'arrivé.

**Exemples.**

1. Soit

$$f : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) \longmapsto (x + 2y - z, x + y, -y, x + y + 2z).$$

Calculons l'image de la base canonique par  $f$ . On a

$$f(1, 0, 0) = (1, 1, 0, 1), \quad f(0, 1, 0) = (2, 1, -1, 1), \quad f(0, 0, 1) = (-1, 0, 0, 2).$$

Ces trois vecteurs sont linéairement indépendants, donc  $f$  est injective. Par contre, ils ne forment pas une famille génératrice de  $\mathbb{R}^4$  (puisque c'est un espace de dimension 4), donc  $f$  n'est pas surjective.

2. La dérivation

$$D : \mathbb{R}_n[X] \longrightarrow \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P \longmapsto P'$$

est surjective mais pas injective. En effet, on a

$$D(1) = 0, \quad D(X) = 1, \quad \dots, \quad D(X^n) = nX^{n-1},$$

donc l'image de la base  $(1, X, \dots, X^n)$  n'est pas une famille libre, donc  $D$  n'est pas injective. Par contre, c'est une famille génératrice de  $\mathbb{R}_{n-1}[X]$ , donc  $D$  est surjective.

**Méthode 4.9**

Pour montrer que deux applications linéaires sont égales, il suffit de montrer qu'elles sont égales sur une base.

**Méthode 4.10**

Le théorème de caractérisation par l'image d'une base nous permet de définir une application linéaire qu'en donnant l'image d'une base. Par exemple, on peut définir une application linéaire  $f : \mathbb{R}^5 \longrightarrow \mathbb{R}^4$  par

$$f(1, 0, 0, 0, 0) = (2, 3, 1, 4), \quad f(0, 1, 0, 0, 0) = (-1, 2, -3, 4), \quad f(0, 0, 1, 0, 0) = (3, 3, -6, 0), \\ f(0, 0, 0, 1, 0) = (1, 2, 3, 4), \quad f(0, 0, 0, 0, 1) = (-2, 0, 2, 0).$$

Que vaut alors  $f((x, y, z, t, w))$ ? On écrit que

$$(x, y, z, t, w) = x(1, 0, 0, 0, 0) + y(0, 1, 0, 0, 0) + z(0, 0, 1, 0, 0) + t(0, 0, 0, 1, 0) + w(0, 0, 0, 0, 1),$$

donc par linéarité de  $f$ , on a

$$f((x, y, z, t, w)) = xf((1, 0, 0, 0, 0)) + yf((0, 1, 0, 0, 0)) + zf((0, 0, 1, 0, 0)) + tf((0, 0, 0, 1, 0)) + wf((0, 0, 0, 0, 1)) \\ = x(2, 3, 1, 4) + y(-1, 2, -3, 4) + z(3, 3, -6, 0) + t(1, 2, 3, 4) + w(-2, 0, 2, 0) \\ = (2x - y + 3z + t - 2w, 3x + 2y + 3z + 2t, x - 3y - 6z + 3t + 2w, 4x + 4y + 4t)$$

**Exemple.**

Voici un autre exemple : soit  $E$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel de dimension 3, et  $B = (e_1, e_2, e_3)$  une base de  $E$ . Soit  $F$  un  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel (dimension pas importante), et  $v_1, v_2, v_3$  trois vecteurs de  $F$  (on ne sait rien sur eux). On définit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  par

$$\forall i = 1, 2, 3, f(e_i) = v_i.$$

Que vaut alors  $f(x)$  pour  $x \in E$ ? Soient  $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$  les composantes de  $x$  dans  $B$ . Alors  $x = \sum_{i=1}^3 x_i e_i$ , donc par linéarité de  $f$ , on a

$$f(x) = \sum_{i=1}^3 x_i f(e_i) = \sum_{i=1}^3 x_i v_i.$$

Attention :  $x$  est un vecteur de  $E$ , ce n'est pas un triplet de  $\mathbb{R}^3$ !

**4.2 Théorème du rang****Définition 4.11 (Rang)**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Le *rang* de  $f$  est la dimension de  $\text{Im}(f)$ .

**Exemple.**

L'application

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^4 \\ (x, y, z) &\longmapsto (x + 2y - z, x + y, -y, x + y + 2z) \end{aligned}$$

est de rang 3. En effet, on a

$$f((1, 0, 0)) = (1, 1, 0, 1), \quad f((0, 1, 0)) = (2, 1, -1, 1), \quad f((0, 0, 1)) = (-1, 0, 0, 2),$$

qui est une base de  $\text{Im}(f)$  puisque c'est une famille génératrice (proposition 4.2), et c'est une famille libre.

**Proposition 4.12**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et . Alors

1.  $\text{rang}(f) \leq \min(\dim(E), \dim(F))$ .
2. Si  $(e_1, \dots, e_n)$  est une base de  $E$ , alors  $\text{rang}(f) = \text{rang}(f(e_1), \dots, f(e_n))$ .

**Proposition 4.13**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ .

1.  $f$  est injective si et seulement si  $\text{rang}(f) = \dim(E)$ .
2.  $f$  est surjective si et seulement si  $\text{rang}(f) = \dim(F)$ .

**Proposition 4.14 (Conservation du rang par les injections/surjections)**

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Si  $f$  est surjective,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g)$ .
2. Si  $g$  est injective,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f)$ .

**Corollaire 4.15 (Conservation du rang par les isomorphismes)**

Soient  $E, F, G$  trois espaces vectoriels de dimension finie,  $f \in \mathcal{L}(E, F)$  et  $g \in \mathcal{L}(F, G)$ .

1. Si  $f$  est un isomorphisme,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(g)$ .
2. Si  $g$  est un isomorphisme,  $\text{rang}(g \circ f) = \text{rang}(f)$ .

**Théorème 4.16 (Théorème du rang)**

Soit  $E$  un espace vectoriel de dimension finie et  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$\dim(E) = \dim(\text{Ker}(f)) + \text{rang}(f).$$

**Méthode 4.17**

Soit  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour déterminer  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , on peut, au choix :

1. Résoudre pour tout  $y \in F$  l'équation  $y = f(x)$  d'inconnue  $x \in E$ . Les  $y$  pour lesquels on a au moins une solution donnent l'image. Le cas  $y = 0$  donne le noyau.

**ou**

2. Résoudre l'équation  $f(x) = 0$  d'inconnue  $x \in E$  pour obtenir le noyau. Déterminer alors  $\dim(\text{Ker}(f))$ , puis  $\text{rang}(f)$  grâce au théorème du rang. Enfin, on détermine  $\text{rang}(f)$ -vecteurs dans  $\text{Im}(f)$  linéairement indépendants pour obtenir une base de  $\text{Im}(f)$ . Souvent, on les choisit parmi l'image d'une base de  $E$ .

**Exemple.**

Un faire un de  $\mathbb{R}^4$  dans  $\mathbb{R}^5$  avec un noyau de dimension 1. Puis le même de  $\mathbb{R}_4[X]$  dans  $\mathbb{R}^5$ .

**Théorème 4.18**

Soient  $E$  et  $F$  deux espaces vectoriels de dimension finie tels que  $\dim(E) = \dim(F)$ . Soit  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ . Alors

$$f \text{ injective} \iff f \text{ surjective} \iff f \text{ bijective}.$$

Ce résultat est vrai en particulier lorsque  $F = E$ , *i.e.* pour les endomorphismes d'un espace vectoriel de dimension finie.

**Remarque.**

Attention : ce théorème ne dit PAS que si  $f \in \mathcal{L}(E, F)$ , et que  $E$  et  $F$  sont de dimension finie, et  $\dim(E) = \dim(F)$ , alors  $f$  est injective et  $f$  surjective et  $f$  bijective. Il dit que SI  $f$  est l'un des trois, alors elle est les deux autres...

**Exemples.**

1. Polynôme d'interpolation de Lagrange : soient  $a_0, \dots, a_n$   $n + 1$  réels distincts deux à deux. L'application

$$\begin{aligned} \mathbb{R}_n[X] &\longrightarrow \mathbb{R}^{n+1} \\ P &\longmapsto (P(a_0), \dots, P(a_n)) \end{aligned}$$

est linéaire et injective, puisque si  $P$  s'envoie sur 0, il admet  $n + 1$  racines distinctes. Comme il est de degré au plus  $n$ , il est nul. C'est donc un isomorphisme vu les dimensions. On en déduit que pour tous  $(y_0, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , il existe un unique polynôme de degré au plus  $n$  tel que

$$P(a_0) = y_0, \dots, P(a_n) = y_n.$$

2. Ce théorème n'est valable qu'en dimension finie. Par exemple, l'endomorphisme de  $\mathbb{R}[X]$  qui à  $P$  associe  $XP$  est injectif mais pas surjectif, et la dérivation des polynômes est surjective non injective.

## 5 Projections, symétries

Dans ce paragraphe, on fixe un  $K$ -espace vectoriel  $E$ .

### 5.1 Projections

#### Définition 5.1

Une *projection* (ou *projecteur*) est un endomorphisme  $p$  de  $E$  tel que  $p \circ p = p$ .

#### Remarque.

$p \circ p = p$  signifie que pour tout  $x \in E$ ,  $p(p(x)) = p(x)$ . Faire une deuxième fois la projection ne change rien.

#### Exemple.

Soit  $p : (x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ . On a

$$p(p((x, y, z))) = p((x, y, 0)) = (x, y, 0) = p((x, y, z)).$$

#### Proposition 5.2

Soit  $p$  une projection. Alors

1.  $E = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$
2.  $\text{Im}(p) = \{x \in E, p(x) = x\} = \text{Ker}(p - \text{id}_E)$ .

#### Remarque.

On dit que  $p$  est la projection sur  $\text{Im}(p)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(p)$ , et  $\text{Im}(p)$ ,  $\text{Ker}(p)$  sont les éléments caractéristiques de  $p$ .

#### Exemples.

1. Soient  $D$  et  $D'$  deux droites vectorielles dans le plan distinctes. Elles sont supplémentaires, et la projection sur  $D$  parallèlement à  $D'$  est la projection classique que vous connaissez bien.
2. Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $A = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$  et  $B = \text{vect}((0, 0, 1))$ , alors  $E = A \oplus B$  (vérifiez-le!), et la projection sur  $A$  parallèlement à  $B$  est l'application  $(x, y, z) \mapsto (x, y, 0)$ . En effet,

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$$

avec  $(x, y, 0) \in A$  et  $(0, 0, z) \in B$ .

3. Soit

$$p : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)$$

Alors  $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  (vérifiez-le!). Montrons que  $p \circ p = p$ . Cela montrera que  $p$  est une projection. On a

$$\begin{aligned} (p \circ p)((x, y, z)) &= p\left(\frac{1}{3}(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)\right) \\ &= \frac{1}{3}p(2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z) \\ &= \frac{1}{9}(2(2x - y - z) - (-x + 2y - z) - (-x - y + 2z), -(2x - y - z) + \\ &\quad 2(-x + 2y - z) - (-x - y + 2z), -(2x - y - z) - (-x + 2y - z) + 2(-x - y + 2z)) \\ &\quad \text{un deuxième } \frac{1}{3} \text{ apparaît } \frac{1}{9}(6x - 3y - 3z, -3x + 6y - 3z, -3x - 3y + 6z) \\ &= \frac{1}{3}((2x - y - z, -x + 2y - z, -x - y + 2z)) \\ &= p((x, y, z)) \end{aligned}$$

donc  $p$  est bien une projection. Déterminons maintenant  $\text{Im}(p)$  et  $\text{Ker}(p)$ . Soit  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(p) \iff p((x, y, z)) = (0, 0, 0) \iff \begin{cases} 2x - y - z = 0 \\ -x + 2y - z = 0 \\ -x - y + 2z = 0 \end{cases} \iff x = y = z \iff (x, y, z) = (x, x, x)$$

donc  $\text{Ker}(p) = \text{vect}((1, 1, 1))$ . Enfin, si  $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ , on a

$$(a, b, c) = p((x, y, z)) \iff \begin{cases} 2x - y - z = a \\ -x + 2y - z = b \\ -x - y + 2z = c \end{cases} \iff \begin{cases} y = x - \frac{a-b}{3} \\ z = x - \frac{a-c}{3} \\ a + b + c = 0 \end{cases},$$

donc  $\text{Im}(p) = \{(a, b, c) \in \mathbb{R}^3 \mid a + b + c = 0\}$ . On a aussi  $\text{Im}(p) = \text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$  (faites-le!).

Donc  $p$  est la projection sur  $\text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ , et parallèlement à  $\text{vect}((1, 1, 1))$ .

On peut vérifier que  $\dim(\text{Im}(p)) = 2$  et  $\dim(\text{Ker}(p)) = 1$  et  $\text{Im}(p) \cap \text{Ker}(p) = \{0\}$ , et on a donc bien  $\mathbb{R}^3 = \text{Im}(p) \oplus \text{Ker}(p)$ !

**Remarque.**

ATTENTION : si  $f \in \mathcal{L}(E)$  et  $E = \text{Ker}(f) \oplus \text{Im}(f)$ ,  $f$  n'est pas une projection en général! De même, en général, pour  $f \in \mathcal{L}(E)$ ,  $\text{Ker}(f) + \text{Im}(f) \neq E$  et  $\text{Ker}(f) \cap \text{Im}(f) \neq \{0\}$ .

**Proposition 5.3**

1. Soit  $p$  une projection de  $E$ ,  $a \in \text{Im}(p)$  et  $b \in \text{Ker}(p)$ . Alors  $p(a + b) = a$ .
2. Réciproquement, soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . L'application

$$\begin{aligned} E &\longrightarrow E \\ a + b &\longmapsto a, \end{aligned}$$

où  $a \in A$  et  $b \in B$  est une projection, de noyau  $B$  et d'image  $A$ .

**Remarque.**

Cette application est bien définie puisque  $E = A \oplus B$ , donc tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de  $A$  et de  $B$ .

**Méthode 5.4 (Montrer qu'une application est une projection)**

On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour montrer que  $f$  est une projection, on montre que  $f \circ f = f$ . On détermine alors  $\text{Ker}(f)$  et  $\text{Im}(f)$ , ce qui donne les éléments caractéristiques de la projection.

**Méthode 5.5 (Image d'un vecteur par une projection)**

On considère la projection  $f \in \mathcal{L}(E)$  sur  $F$  et parallèlement à  $G$ , et  $u \in \mathcal{L}(E)$ . On détermine  $f(u)$  en remarquant que  $f(u)$  est l'unique vecteur  $v \in F$  tel que  $u - v \in G$ .

## 5.2 Symétries

**Définition 5.6 (Symétries)**

Une *symétrie* de  $E$  est un endomorphisme  $s$  de  $E$  tel que  $s \circ s = \text{id}_E$ .

**Remarque.**

Les symétries sont donc les involutions de  $E$  qui sont linéaires.

**Exemples.**

1. Dans le plan, vous connaissez les symétries par rapport à une droite vectorielle, et parallèlement à une autre.
2. Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $A = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$  et  $B = \text{vect}((0, 0, 1))$ , alors  $E = A \oplus B$  (vérifiez-le!), et la symétrie par rapport à  $A$  et parallèlement à  $B$  est l'application  $(x, y, z) \mapsto (x, y, -z)$ . En effet,

$$(x, y, z) = (x, y, 0) + (0, 0, z)$$

avec  $(x, y, 0) \in A$  et  $(0, 0, z) \in B$ .

3. Dans le  $\mathbb{R}$ -espace vectoriel  $\mathbb{C}$ , la conjugaison est la symétrie par rapport à  $\mathbb{R}$  et parallèlement à  $i\mathbb{R}$ .
4. L'application

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{\mathbb{R}} & \longrightarrow & \mathbb{R}^{\mathbb{R}} \\ f & \longmapsto & x \longmapsto f(-x) \end{array}$$

est la symétrie par rapport au sous-espace vectoriel des fonctions paires et parallèlement au sous-espace vectoriel des fonctions impaires.

**Proposition 5.7**

Soit  $s$  une symétrie de  $E$ . Alors  $E = \text{Ker}(s - \text{id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ .

**Remarques.**

- Rappelons que  $\text{Ker}(s - \text{id}_E) = \{x \in E, s(x) = x\}$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}_E) = \{x \in E, s(x) = -x\}$ .
- On dit que  $s$  est la symétrie par rapport à  $\text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et parallèlement à  $\text{Ker}(s + \text{id}_E)$ , qui sont les éléments caractéristiques de  $s$ .

**Proposition 5.8**

Soient  $p, s \in \mathcal{L}(E)$  tels que  $s = 2p - \text{id}_E$ . Alors :

- $s$  est une symétrie si et seulement si  $p$  est une projection.
- Si  $s$  est une symétrie et  $p$  est une projection, alors  $\text{Im}(p) = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(p) = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ , *i.e.*  $s$  et  $p$  ont mêmes éléments caractéristiques.

**Exemple.**

Soient  $E = \mathbb{R}^3$ ,  $A = \text{vect}((1, 0, 0), (0, 1, 0))$  et  $B = \text{vect}((0, 0, 1))$ , alors  $E = A \oplus B$ , et la projection  $p$  sur  $A$  parallèlement à  $B$  est l'application  $(x, y, z) \longmapsto (x, y, 0)$  (déjà vu). On a  $\text{Im}(p) = A$  et  $\text{Ker}(p) = B$ . Soit alors  $s = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ . Alors  $s$  est la symétrie par rapport à  $A$  et parallèlement à  $B$ , et  $A = \text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $B = \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ . En effet,  $s((x, y, z)) = 2p((x, y, z)) - (x, y, z) = 2(x, y, 0) - (x, y, z) = (x, y, -z)$  : on retrouve l'exemple précédent.

**Proposition 5.9**

- Soit  $s$  une symétrie de  $E$ ,  $a \in \text{Ker}(s - \text{id}_E)$  et  $b \in \text{Ker}(s + \text{id}_E)$ . Alors  $s(a + b) = a - b$ .
- Réciproquement, soient  $A$  et  $B$  deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de  $E$ . L'application

$$\begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ a + b & \longmapsto & a - b, \end{array}$$

où  $a \in A$  et  $b \in B$ , est une symétrie, avec  $A = \text{Ker}(f - \text{id}_E)$  et  $B = \text{Ker}(f + \text{id}_E)$ .

**Remarque.**

Cette application est bien définie puisque  $E = A \oplus B$ , donc tout élément de  $E$  s'écrit de façon unique comme somme d'un élément de  $A$  et de  $B$ .

**Méthode 5.10 (Montrer qu'une application est une symétrie)**

On considère  $f \in \mathcal{L}(E)$ . Pour montrer que  $f$  est une symétrie, on montre que  $f \circ f = \text{id}_E$ . On détermine alors  $\text{Ker}(f - \text{id}_E)$  et  $\text{Ker}(f + \text{id}_E)$ , ce qui donne les éléments caractéristiques de la symétrie.

**Exemple.**

Soit

$$s : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3 \\ (x, y, z) \longmapsto \frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)$$

Alors  $s \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$  (vérifiez-le!). Montrons que  $s \circ s = \text{id}_E$ . Cela montrera que  $s$  est une symétrie. On a

$$\begin{aligned} (s \circ s)((x, y, z)) &= s\left(\frac{1}{3}(x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)\right) \\ &= \frac{1}{3}s((x - 2y - 2z, -2x + y - 2z, -2x - 2y + z)) \\ &= \frac{1}{9}((x - 2y - 2z) - 2(-2x + y - 2z) - 2(-2x - 2y + z), -2(x - 2y - 2z) + \\ &\quad (-2x + y - 2z) - 2(-2x - 2y + z), -2(x - 2y - 2z) - 2(-2x + y - 2z) + (-2x - 2y + z)) \\ &= \frac{1}{9}(9x, 9y, 9z) \\ &= (x, y, z) \end{aligned}$$

donc  $s$  est bien une symétrie. Déterminons maintenant  $\text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3})$  et  $\text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3})$ . Soit  $((x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ . Alors

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \iff s((x, y, z)) = (x, y, z) \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = 3x \\ -2x + y - 2z = 3y \\ -2x - 3y + z = 3z \end{cases} \iff x + y + z = 0,$$

donc  $\text{Ker}(s - \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} = \text{vect}((1, -1, 0), (1, 0, -1))$ .

Puis

$$(x, y, z) \in \text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) \iff s((x, y, z)) = -(x, y, z) \iff \begin{cases} x - 2y - 2z = -3x \\ -2x + y - 2z = -3y \\ -2x - 3y + z = -3z \end{cases} \iff x = y = z,$$

donc  $\text{Ker}(s + \text{id}_{\mathbb{R}^3}) = \text{vect}((1, 1, 1))$ .

On remarque qu'on tombe sur l'image et le noyau de la projection donnée en exemple pour la méthode 5.4. C'est normal, car on peut vérifier que  $s = 2p - \text{id}_{\mathbb{R}^3}$ , et on utilise la proposition 5.8.