

# Chapitre 26

## Probabilités sur un univers fini

### 1 Expérience aléatoire et univers

#### 1.1 Expérience aléatoire

**Définition 1.1**

Une *expérience aléatoire* est une action dont le résultat ne peut être prévu avec certitude.

**Exemples.**

1. Lancer d'une pièce : à chaque lancer, même en jetant la pièce exactement de la même façon (a priori...), le côté visible est différent.
2. La plupart des expériences scientifiques sont en réalité aléatoires : aléas des appareils de mesure, des produits utilisés, des conditions d'utilisation, etc. On comble ces aléas grâce aux marges d'erreur dont les justifications sont données par la théorie des probabilités.

#### 1.2 Univers

On cherche à relier les expériences aléatoires aux mathématiques. Pour cela, on effectue ce qu'on appelle une modélisation.

**Définition 1.2**

L'*univers* (ou univers des possibles) d'une expérience aléatoire est l'ensemble des résultats possibles (ou des issues, ou des réalisations).

**Remarques.**

1. L'univers est en général noté  $\Omega$
2. A priori, chaque expérience aléatoire a son propre univers.

3. Le choix de l'univers pour modéliser notre expérience dépend de l'objectif qu'on se donne. On peut par exemple lancer deux dés, et étudier les couples obtenus, mais aussi la somme des nombres obtenus. L'univers sera  $\llbracket 1, 6 \rrbracket^2$  dans le premier cas, et  $\llbracket 2, 12 \rrbracket$  dans le deuxième.

### Exemples.

1. Pour "pile ou face", l'univers est  $\Omega = \{ "pile", "face" \}$ .
2. Lancer d'un dé 6 faces :  $\Omega = \{ 1, 2, 3, 4, 5, 6 \}$
3. Lancer de deux dés 6 faces :  $\Omega = \{ (1, 1), (1, 2), \dots, (6, 5), (6, 6) \} = \llbracket 1, 6 \rrbracket \times \llbracket 1, 6 \rrbracket$  soit 36 résultats possibles (car  $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket) \times \text{card}(\llbracket 1, 6 \rrbracket) = 6 \times 6$ ) ou  $\Omega = \{ \{1, 1\}, \{1, 2\}, \dots, \{6, 6\} \}$  si l'ordre n'a pas d'importance. Déterminons le cardinal de  $\Omega$ .

Soit  $\Omega_1$  l'ensemble des résultats où les deux dés sont distincts : il s'agit de l'ensemble des combinaisons de 2 éléments parmi 6, donc  $\text{card}(\Omega_1) = \binom{6}{2} = \frac{6 \times 5}{2} = 15$ .

Puis soit  $\Omega_2$  l'ensemble des doubles. On a  $\text{card}(\Omega_2) = 6$ .

Enfin, on a  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  avec  $\Omega_1 \cap \Omega_2 = \emptyset$ , donc  $\text{card}(\Omega) = \text{card}(\Omega_1) + \text{card}(\Omega_2) = 15 + 6 = 21$ .

### Méthode 1.3

Attention au choix de l'univers lors de "tirages dans une urne". Si on considère une urne contenant  $n$  boules toutes de couleur différente, dans laquelle on veut prendre  $p$  boules. On peut :

1. Faire un **tirage simultané** : on prend en une fois les  $p$  boules. L'univers est alors l'ensemble des parties à  $p$  boules distinctes de l'ensemble des  $n$  boules, de cardinal  $\binom{n}{p}$ .
2. On peut effectuer un **tirage avec remise**. On remplace la boule tirée avec de recommencer : on procède  $p$  fois. Comme chaque boule peut être tirée plusieurs fois, l'univers est ici l'ensemble des  $p$ -listes de boules, de cardinal  $n^p$ .
3. On peut effectuer un **tirage sans remise**. Les boules sont tirées successivement, mais pas remise après tirage. L'univers est alors l'ensemble des  $p$ -arrangements de boules, de cardinal  $A_n^p$ .

### Remarques.

1. Lorsque l'ordre des boules n'est pas important, le tirage simultané ou sans remise donne le même résultat.
2. Ce genre de situations apparaît dans des modèles de prises d'échantillon dans une population pour des sondages.

**Dans toute la suite de la sup, on ne considérera que des univers finis.**

## 1.3 Événement

### Définition 1.4 (Événement)

Un *événement* d'une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  est un sous-ensemble de  $\Omega$ .

**Remarque.**

Un événement au sens donné ci-dessus est donc la modélisation mathématique d'un événement au sens courant du terme. Par exemple, lorsqu'on lance un dé, on peut considérer l'événement  $\{1, 2\}$ , qui correspond à l'événement (au sens courant) que le nombre obtenu est 1 ou 2.

**Exemples.**

1. On lance un dé à 6 faces. L'univers est  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ . L'événement "le lancer a donné un nombre pair" est modélisé par l'ensemble  $\{2, 4, 6\}$ .
2. De même,  $\{4, 5, 6\}$  modélise l'événement "le lancer a donné un nombre supérieur ou égal à 4".
3. Puis  $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  modélise l'événement "le dé a été lancé".

**Remarque.**

Si  $\text{card}(\Omega) = n$ , on a  $2^n$  événements possibles.

**Définition 1.5**

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ .

1. L'événement *certain* est l'ensemble  $\Omega$ .
2. L'événement *impossible* est  $\emptyset$ .
3. Un événement *élémentaire* est un singleton  $\{\omega\}$ , où  $\omega \in \Omega$ .

**1.4 Traduction probabiliste des opérations ensemblistes****Définition 1.6**

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ , et soient  $A$  et  $B$  deux événements.

1. L'événement " $A$  ou  $B$ " est l'événement  $A \cup B$ .
2. L'événement " $A$  et  $B$ " est l'événement  $A \cap B$ .
3. L'événement contraire de  $A$  est l'événement  $\overline{A}$ .

**Exemple.**

"Le lancer de dé est pair et supérieur ou égal à 4" se modélise par  $\{2, 4, 6\} \cap \{4, 5, 6\} = \{4, 6\}$

**Remarque.**

Il est souvent très intéressant pour le calcul de décomposer un événement en union ou intersection d'événements.

**1.5 Système complet d'événements****Définition 1.7 (Événements incompatibles)**

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . Deux événements sont *incompatibles* si  $A \cap B = \emptyset$ .

**Exemple.**

Par exemple "obtenir un lancer pair" et "obtenir un lancer impair" sont incompatibles.

**Définition 1.8 (Système complet d'événement)**

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ . Un *système complet d'événements* est une famille (nécessairement finie) d'événements  $(A_k)_{k \in [1, n]}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) telle que :

1. Pour tout  $(i, j) \in [1, n]^2$ ,  $i \neq j \implies A_i \cap A_j = \emptyset$ .
2. 
$$\bigcup_{k=1}^n A_k = \Omega.$$

**Remarques.**

1. La première condition se lit "les événements sont deux à deux incompatibles".
2. Les  $A_k$  peuvent être vides. Si tous sont non vide, on parle de partition de  $\Omega$ .

**Proposition 1.9**

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$ .

1. Pour tout événement  $A$ , la famille  $(A, \overline{A})$  est un système complet d'événement.
2. La famille  $(\{\omega\})_{\omega \in \Omega}$  est un système complet d'événement.

**Remarque.**

Choisir  $(A, \overline{A})$  comme système complet d'événement signifie qu'en général, on s'intéresse seulement à la réalisation ou non de l'événement  $A$ .

**Exemples.**

1. Pour le lancer de dé, "obtenir un résultat pair" et "obtenir un résultat impair" forme un système complet d'événements.
2. Pour le lancer de deux dés, "obtenir deux dés différents" (ce qu'on avait noté  $\Omega_1$ ) et "obtenir un doublon" (ce qu'on a noté  $\Omega_2$ ) forment un système complet d'événement.
3. Considérons encore comme expérience aléatoire le lancer de deux dés. On peut étudier la somme des deux dés, ou les couples obtenus. Les univers ont alors  $[2, 12]$  dans le premier cas, et  $[1, 6]^2$  dans le deuxième. Pour  $i \in [2, 12]$ , notons  $S_i$  l'événement "la somme des deux dés vaut  $i$ ". Dans le premier cas, l'événement est l'ensemble  $\{i\}$ . Dans le deuxième, c'est  $\{(1, i-1), (2, i-2), \dots, (i-1, 1)\}$ . Dans les deux cas, la famille  $(S_i)_{i \in [2, 12]}$  est un système complet d'événements.
4. Considérons  $n$  urnes distinctes  $U_1, \dots, U_n$ , chacune contenant un certain nombre de boules blanches et noires. On choisit au hasard une urne, et on tire une boule dans cette urne. Pour  $i \in [1, n]$ , notons  $T_i$  l'événement "le tirage a lieu dans l'urne  $U_i$ ,  $B$  l'événement "la boule est blanche",  $N$  "elle est noire".

Les familles  $(T_i)_{i \in [1, n]}$  et  $(B, N)$  sont des systèmes complets d'événements.

## 2 Espaces probabilisés finis

Dans ce paragraphe, on cherche à modéliser la notion intuitive de chance qu'un événement arrive. Cette notion est liée à celle de fréquence : quand on jette un dé  $n$ -fois, et qu'on compte le nombre  $n_i$  de fois où on obtient  $i$ , on dira que la probabilité d'obtenir  $i$  est  $n_i/n$ .

On remarque que ces "chances" sont comprises entre 0 et 1, que la somme de deux de ces chances est la chance d'obtenir l'une des deux (les événements sont incompatibles). D'où la définition :

### 2.1 Probabilité

#### Définition 2.1 (Probabilité)

Soit une expérience aléatoire d'univers  $\Omega$  fini. Une *probabilité sur  $\Omega$*  est une application  $P : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$  telle que

1.  $P(\Omega) = 1$ .
2. Pour tous événements  $A$  et  $B$  incompatibles,  $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$  (additivité).

#### Définition 2.2 (Espace probabilisé fini)

Un *espace probabilisé fini* est un couple  $(\Omega, P)$ , où  $\Omega$  est un univers fini, et  $P$  une probabilité sur  $\Omega$ .

### 2.2 Propriétés

#### Théorème 2.3

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $A$  et  $B$  deux événements. Alors :

1.  $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$ .
2.  $P(\emptyset) = 0$ .
3. Si  $A \subset B$ ,  $P(A) \leq P(B)$  (croissance de  $P$ ).
4. Si  $A \subset B$ , alors  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$ .
5.  $P(B \setminus A) = P(B) - P(A \cap B)$ .
6.  $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ .
7.  $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$ .
8. Si  $A \subset B$  et  $P(B) = 0$ , alors  $P(A) = 0$ .
9. Si  $A \subset \overline{B}$  et  $P(B) = 1$ , alors  $P(A) = 0$ .

#### Proposition 2.4 (Additivité finie)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) une famille finie d'événements deux à deux incompatibles. Alors

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) = \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

**Proposition 2.5 (Inégalité de Boole)**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) une famille finie d'événements. Alors

$$P(A_1 \cup \dots \cup A_n) \leq \sum_{i=1}^n P(A_i).$$

**Proposition 2.6 (Probabilité d'un système complet d'événements)**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $(A_i)_{i=1, \dots, n}$  ( $n \in \mathbb{N}^*$ ) un système complet d'événements. Alors

$$\sum_{i=1}^n P(A_i) = 1.$$

De plus, si  $B$  est un événement, on a

$$P(B) = \sum_{i=1}^n P(B \cap A_i).$$

**2.3 Images des événements élémentaires**

Dans ce paragraphe, on montre qu'une probabilité sur un univers fini est entièrement déterminé par la connaissance de la probabilité des événements élémentaires.

**Théorème 2.7 (Probabilité et événements élémentaires)**

Soit  $\Omega$  un univers fini.

1. Soit  $P$  une probabilité sur  $\Omega$ . Pour  $\omega \in \Omega$ , on pose  $p_\omega = P(\{\omega\})$ . Alors :

$$(1) \quad \forall \omega \in \Omega, p_\omega \geq 0, \quad (2) \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1.$$

2. Réciproquement, soit  $(p_\omega)_{\omega \in \Omega}$  une famille (finie) de réels vérifiant les conditions (1) et (2). Alors il existe une unique probabilité  $P$  sur  $\Omega$  telle que, pour tout  $\omega \in \Omega$ ,  $P(\{\omega\}) = p_\omega$ . De plus, si  $A$  est un événement, on a

$$P(A) = \sum_{\omega \in A} p_\omega.$$

**Exemple.**

On lance un dé à 6 faces, truqué. On suppose que la probabilité d'obtenir  $k$  est proportionnelle à  $k$ . Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ? Il faut d'abord comprendre quel est l'univers : c'est  $[1, 6]$ . Puis, on définit une probabilité  $P$  sur  $\Omega$  par

$$\forall i \in [1, 6], P(\{i\}) = Ci,$$

où  $C \in \mathbb{R}_+^*$ . La somme de toutes les probabilités doit valoir 1, donc  $C = \frac{1}{21}$ . La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc  $\frac{1}{21}(2 + 4 + 6) = \frac{4}{7}$ .

**Remarque.**

S'il existe  $\omega \in \Omega$  tel que  $P(\{\omega\}) = 1$ , alors  $P(\{\omega'\}) = 0$  si  $\omega' \neq \omega$ .

### **Théorème 2.8 (Probabilité uniforme)**

Soit  $\Omega$  un univers fini. Il existe une unique probabilité sur  $\Omega$  prenant la même valeur sur tous les événements élémentaires, appelée *probabilité uniforme sur  $\Omega$* . Elle est définie par :

$$\forall \omega \in \Omega, P(\{\omega\}) = \frac{1}{\text{card}(\Omega)}.$$

De plus, si  $A$  est un événement, on a

$$P(A) = \frac{\text{card}(A)}{\text{card}(\Omega)}.$$

### **Remarques.**

1. Il s'agit de la modélisation de l'équiprobabilité pour tous les événements élémentaires.
2. La probabilité d'un événement quelconque se lit "nombre de cas favorables sur nombre de cas possibles".
3. On fait essentiellement du dénombrement quand on travaille avec une probabilité uniforme.

### **Exemple.**

Une boîte contient 7 jetons, dont 5 sont numérotés de 1 à 5, et 2 portent le numéro 6. On tire au hasard un jeton. Quelle est la probabilité d'obtenir un nombre pair ? Il faut d'abord comprendre quel est l'univers : on peut prendre l'ensemble des jetons. On prend comme probabilité sur  $\Omega$  la probabilité uniforme. La probabilité d'obtenir un nombre pair est donc  $\frac{4}{7}$ .

### **Méthode 2.9 (Construire une probabilité)**

Lorsqu'on veut construire une probabilité pour une expérience aléatoire :

1. On détermine tous les cas possibles qui constitueront nos événements élémentaires. Cela nous donne l'univers  $\Omega$ .
2. On construit la probabilité  $P$  en donnant pour chaque événement élémentaire sa probabilité.
3. On vérifie la cohérence de notre modélisation : a-t-on bien  $P(\Omega) = 1$  ?

### **Exemples.**

1. Pile ou face. On a deux résultats possibles :  $\Omega = \{P, F\}$ . Quelle probabilité donner aux événements élémentaires ? Si on veut modéliser une pièce équilibrée, on définira la probabilité  $P$  en posant  $P(P) = P(F) = 1/2$ . On a bien  $P(\Omega) = P(P) + P(F) = 1$ .

Si on veut modéliser une pièce truquée, on choisit un  $p \in [0, 1]$  et on définira  $P$  en posant  $P(P) = p$  et  $P(F) = 1 - p$ . Un tel modèle est appelé "modèle de Bernoulli de paramètre  $p$ ".

2. Prenons l'exemple du lancer de deux dés 6 faces non pipés. Premier modèle :  $\Omega = \llbracket 1, 6 \rrbracket^2 = \{(i, j), i \in \llbracket 1, 6 \rrbracket, j \in \llbracket 1, 6 \rrbracket\}$ . Tous les éléments ont même probabilité de se produire : on utilise la probabilité uniforme. Ainsi, pour tout  $(i, j) \in \Omega$ ,  $P(\omega) = \frac{1}{36}$ .

Deuxième modèle : on ne distingue plus les dés. On a alors  $\Omega$  de cardinal 21 ( $\binom{6}{2}$  pour les combinaisons et 6 doublons). Cette fois, ce n'est plus uniforme : la combinaison  $\{1, 2\}$  par exemple peut être obtenue en faisant  $(1, 2)$  ou  $(2, 1)$ , alors que  $\{1, 1\}$  n'est obtenu que avec  $(1, 1)$ . Ainsi, on a deux fois moins de chance d'avoir un double que d'avoir deux dés différents. En revanche, tous les doubles ont même probabilité d'arriver, et toutes les combinaisons également. Notons  $p_1$  la proba d'un double et  $p_2$  celle de deux différents.

On a  $p_2 = 2p_1$ , et comme on veut  $P(\Omega) = 1$  avec  $\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2$  on obtient :

$$15p_2 + 6p_1 = 1$$

d'où

$$30p_1 + 6p_1 = 1$$

et enfin  $p_1 = \frac{1}{36}$  et  $p_2 = \frac{1}{18}$ .

Au final, on a  $P(\{i, j\}) = \frac{1}{18}$  si  $i \neq j$ , et  $P(\{i, j\}) = \frac{1}{36}$  si  $i = j$  : la probabilité n'est plus uniforme bien que les lancers de dés soit bien au hasard et les dés sont équilibrés.

### 3 Probabilités conditionnelles

Dans ce paragraphe, on cherche à modéliser la situation suivante : on lance un dé 6 face mais on cache le résultat avant qu'on ait eu le temps de le voir. Quelqu'un regarde le nombre obtenu et annonce que le résultat est pair. Quelle est la probabilité d'avoir un 6 ?

Sans l'information de parité, on modélise l'expérience en posant  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  muni de la probabilité uniforme. En notant  $A$  l'événement "avoir un 6", on a  $A = \{6\}$  et donc  $P(A) = \frac{1}{6}$ .

Or, on sait que le résultat est pair. Notons  $B$  cet événement. On a  $B = \{2, 4, 6\}$ , et on peut alors changer notre  $\Omega$ , puisque les résultats 1, 3 et 5 n'arrivent jamais. On poserait ainsi  $\tilde{\Omega} = \{2, 4, 6\}$ , munit également de la probabilité uniforme. On a alors  $P(A) = \frac{1}{3}$ .

On voudrait faire le raisonnement précédent, sans changer d'univers. On va parler de "probabilité d'avoir un 6, sachant qu'on a un nombre pair".

Dans le cas d'une probabilité uniforme, la probabilité d'obtenir l'événement  $B$ , sachant que l'événement  $A$  est réalisé, est  $\frac{\text{card}(A \cap B)}{\text{card}(A)} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)}$ .

#### 3.1 Définition

##### Définition 3.1 (Probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $B$  un événement tel que  $P(B) \neq 0$ . La *probabilité de  $A$  sachant  $B$*  est le réel

$$P_B(A) = P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

##### Théorème 3.2 (Probabilité conditionnelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $B$  un événement tel que  $P(B) \neq 0$ . L'application

$$\begin{aligned} P_B : \mathcal{P}(\Omega) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ A &\longmapsto P_B(A) \end{aligned}$$

est une probabilité sur  $\Omega$ , appelé *probabilité conditionnelle à B*.

### Remarques.

1. Attention :  $P_B(A) \neq P(A \cap B)$ . En effet,  $P(A \cap B)$  est la probabilité d'avoir un élément de  $A \cap B$  dans l'univers  $\Omega$ , alors que  $P_B(A)$  est la probabilité d'avoir un élément de  $A$  dans l'univers  $B$ .
2. Attention : il n'existe pas d'événement  $(A|B)$ .

### Exemple.

Dans l'introduction, on cherche en fait  $P_B(A)$  avec le modèle  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  muni de la probabilité uniforme.

On a  $P(B) = P(\{2, 4, 6\}) = 3/6 = \frac{1}{2}$  et  $P(A \cap B) = P(\{6\}) = 1/6$ , d'où  $P_B(A) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$ .

## 3.2 Formule des probabilités composées

### Proposition 3.3

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soient  $A$  et  $B$  deux événements. Alors

1.  $P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$  si  $P(A) \neq 0$ .
2.  $P(A \cap B) = P(B)P_B(A)$  si  $P(B) \neq 0$ .

### Remarque.

Il est en général plus simple de calculer une probabilité conditionnelle que de calculer la probabilité d'une intersection. On utilise donc la proposition 3.3 pour calculer la probabilité d'une intersection après avoir calculé une probabilité conditionnelle.

### Exemple.

Une urne contient 5 boules jaunes (numérotées de 1 à 5), et 7 boules rouges (numérotées de 1 à 7). Quelle est la probabilité d'obtenir une boule jaune impaire? On peut bien entendu compter, mais on peut aussi noter  $J$  l'événement "la boule est jaune", et  $I$  l'événement "le numéro est impair". On cherche  $P(I \cap J)$ . On a donc

$$P(I \cap J) = P(J)P(I|J) = \frac{5}{12} \frac{3}{5} = \frac{1}{4}.$$

### Théorème 3.4 (Formule des probabilités composées)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini. Soit  $n \geq 2$  et  $(A_1, A_2, \dots, A_n)$  une famille d'événements telle que  $P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}) \neq 0$ . Alors

$$P(A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_n) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2) \times \dots \times P(A_n|A_1 \cap A_2 \cap \dots \cap A_{n-1}).$$

### Méthode 3.5

Cette formule est utilisée en particulier quand des événements se succèdent chronologiquement. Elle permet d'éviter des dénombrements compliqués en calculant des probabilités au fur et à mesure.

**Exemple.**

Un chapeau magique contient 3 lapins jaunes et 4 lapins bleus. On tire au hasard, successivement et sans remise 4 lapin de ce chapeau. On s'intéresse à la probabilité de l'événement  $A$ ="obtenir alternativement un lapin rouge et un lapin jaune en commençant par un jaune".

**Première étape :** On suppose qu'on a un espace probabilisé  $(\Omega, P)$  qui modélise notre expérience, mais on ne le précise pas. On introduit ensuite les événements dont on va avoir besoin. Pour tout  $i \in [1, 4]$ , on introduit l'événement  $J_i$  : "le  $i$  ème lapin extrait est jaune." On introduit de même  $B_i$  : "le  $i$  ème lapin est bleu". (en fait  $B_i = \bar{J}_i$ ). On a

$$P(J_1) = 3/7 \quad \text{et} \quad P(B_1) = 4/7.$$

En revanche, on ne connaît pas  $P(J_2)$ ,  $P(J_3)$  ni  $P(J_4)$ .

**Deuxième étape :** On traduit la question : on cherche à calculer  $A = J_1 \cap B_2 \cap J_3 \cap B_4$ . D'après la formules des probabilités composées, on a :

$$P(A) = P(J_1 \cap B_2 \cap J_3 \cap B_4) = P(J_1)P_{J_1}(B_2)P_{J_1 \cap B_2}(J_3)P_{J_1 \cap B_2 \cap J_3}(B_4).$$

Or,  $P(J_1) = 3/7$ . Pour  $P_{J_1}(B_2)$  cela revient à prendre un univers  $\tilde{\Omega}$  où on a plus que 2 lapins jaune et 4 bleu, le tout muni de la loi uniforme. On obtient donc

$$P_{J_1}(B_2) = \frac{4}{6}.$$

De même,  $P_{J_1 \cap B_2}(J_3) = \frac{2}{5}$ . Enfin  $P_{J_1 \cap B_2 \cap J_3}(B_4) = \frac{3}{4}$ , d'où

$$P(A) = \frac{3}{7} \frac{4}{6} \frac{2}{5} \frac{3}{4} = \frac{3}{35}.$$

**3.3 Formule des probabilités totales**

Dans ce paragraphe, on cherche à calculer une probabilité en décomposant les événements suivant un système complet d'événements.

**Proposition 3.6**

Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $A$  un événement. Pour tout événement  $B$ , on a

$$P(B) = P(B \cap A) + P(B \cap \bar{A}).$$

De plus, si  $0 < P(A) < 1$ , alors

$$P(B) = P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A}).$$

**Exemples.**

1. Les conducteurs se divisent en deux catégories : ceux enclins aux accidents, représentant 20% des conducteurs, et ayant une probabilité de  $1/2$  d'avoir un accident dans l'année, et les autres, avec une probabilité de  $1/10$  d'avoir un accident dans l'année. On veut déterminer la probabilité qu'un conducteur ait un accident dans l'année. Notons  $N$  l'événement "le conducteur a un accident dans l'année", et  $A$  "il est enclin aux accidents". On a  $P(A) = 0,2$ , donc  $P(\bar{A}) = 0,8$ , et  $P_A(N) = 0,5$ ,  $P_{\bar{A}}(N) = 0,1$ . Alors

$$P(N) = P_A(N)P(A) + P_{\bar{A}}(N)P(\bar{A}) = 0,2 \times 0,5 + 0,8 \times 0,1 = 0,18.$$

2. M. X a perdu son parapluie dans un des trois bâtiments dans lesquels il s'est rendu ( $A$  ( $n$  étages),  $B$  ( $m$  étages) ou  $C$  ( $p$  étages)). Le parapluie a autant de chance de se trouver dans un immeuble que dans un autre :  $P(A) = P(B) = P(C) = \frac{1}{3}$ . M. X fouille l'immeuble  $A$  (qui a  $n$  étages). Il n'est pas dans un étage  $< n$ . Quelle est la probabilité qu'il se trouve à l'étage  $n$  de l'immeuble  $A$ ?

En effet, notons  $E_i$  l'événement "le parapluie se trouve à l'étage  $i$  de l'immeuble  $A$ ". On a alors :

$$\forall i \in \llbracket 1, n \rrbracket, P_A(E_i) = \frac{1}{n}$$

(équiprobabilité d'être à un étage de l'immeuble  $A$ ). On cherche

$$P(E_n | \bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1}) = \frac{P(E_n \cap \bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1})}{P(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1})}.$$

Mais on a  $E_n \cap \bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1} = E_n$ . Or,

$$P(E_n) = P(E_n \cap A) = P_A(E_n)P(A) = \frac{1}{3n}.$$

Mais

$$P(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1}) = P(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1} \cap A) + P(\bar{E}_1 \cap \dots \cap \bar{E}_{n-1} \cap \bar{A}) = P(E_n) + P(\bar{A}) = \frac{1}{3n} + \frac{2}{3}.$$

La probabilité cherchée est donc  $\frac{1}{1+2n}$ .

### Méthode 3.7

Si on a une suite d'événements  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  pour laquelle on connaît  $P(A_n | A_{n-1})$  et  $P(A_n | \bar{A}_{n-1})$ , on peut déterminer une relation de récurrence entre  $P(A_n)$  et  $P(A_{n-1})$  en utilisant la proposition 3.6 avec  $A = A_{n-1}$  et  $B = A_n$ .

### Exemple.

On considère une voiture qui fonctionne ainsi :

Si elle démarre un jour  $n - 1$ , elle a une probabilité  $p$  de démarrer le jour  $n$ .

— Si elle ne démarre pas le jour  $n - 1$ , elle a une probabilité  $q$  de ne pas démarrer le jour  $n$ .

Ici,  $p, q \in ]0, 1[$ . On suppose que la voiture démarre le jour 0. On note  $D_n$  l'événement "la voiture démarre le jour  $n$ ", et  $p_n = P(D_n)$ . On veut déterminer  $p_n$ , ainsi que sa limite quand  $n$  tend vers  $+\infty$ .

D'après la proposition 3.6, on a, si  $0 < P(D_{n-1}) < 1$ ,

$$P(D_n) = P(D_n | D_{n-1})P(D_{n-1}) + P(D_n | \bar{D}_{n-1})P(\bar{D}_{n-1}).$$

Or, par hypothèse, on a  $P(D_n|D_{n-1}) = p$  et  $P(\overline{D}_n|\overline{D}_{n-1}) = q$ , donc  $P(D_n|\overline{D}_{n-1}) = 1 - q$ , et donc

$$p_n = pp_{n-1} + (1 - q)(1 - p_{n-1}).$$

Cette égalité reste vérifiée pour  $P(D_{n-1})$  valant 0 ou 1 en utilisant la première forme de la proposition.

— La suite est classique : c'est une suite arithmetico-géométrique, et avec  $\ell = \frac{1-q}{2-p-q}$ , on étudie  $p_n - \ell$ , qui est géométrique de raison  $p + q - 1$ , et

$$p_n = \frac{1-p}{2-p-q}(p+q-1)^n + \frac{1-q}{2-p-q}.$$

Comme  $p + q - 1 \in ]-1, 1[$ , on a  $p_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} \frac{1-q}{2-p-q}$ .

### **Théorème 3.8 (Formule des probabilités totales)**

Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements ( $n \in \mathbb{N}^*$ ). Pour tout événement  $B$ , on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(B \cap A_k).$$

De plus, si pour tout  $k \in [1, n]$ ,  $P(A_k) \neq 0$ , alors

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P_{A_k}(B)P(A_k).$$

### **Méthode 3.9**

On utilise en particulier la formule des probabilités totales quand l'expérience se déroule en plusieurs étapes, et que la première aboutit à plusieurs événements incompatibles entre-eux, donnant un système complet d'événements.

### **Exemple.**

On a  $n$  urnes  $U_1, \dots, U_n$ , l'urne  $U_k$  contenant  $k$  boules blanches et  $n - k$  boules noires. On a également un sac contenant  $k$  jetons portant le numéro  $k$ ,  $k = 1, \dots, n$ . On tire un jeton dans le sac, et on tire une boule dans l'urne portant le numéro inscrit sur le jeton. Quelle est la probabilité pour que la boule soit blanche ?

On note  $T_k$  l'événement "on tire dans l'urne  $U_k$ ", et  $B$  l'événement "la boule tirée est blanche". La famille  $(T_1, \dots, T_n)$  est un système complet d'événement de probabilité non nulle. D'après la formule des probabilités totales, on a donc

$$P(B) = \sum_{k=1}^n P(T_k)P(B|T_k) = \sum_{k=1}^n \frac{k}{1+2+\dots+n} \times \frac{k}{n} = \frac{2n+1}{3n}.$$

### **Remarque.**

On peut illustrer la formule par un arbre de probabilité, où chaque noeud correspond à un événement (la racine est l'événement certain, les événements issus d'un même noeud forment un système complet d'événement), et chaque branche est affectée de la probabilité conditionnelle correspondante. La probabilité d'une feuille est le produit des probabilités des chemins qui y aboutissent (formule des probabilités composées), et la formule des probabilités totales nous dit que la probabilité d'un événement est la somme des probabilités des chemins qui y aboutissent.

### 3.4 Formule de Bayes

#### Proposition 3.10 (formule de Bayes)

Soient  $A$  et  $B$  des événements de probabilité non nulle d'un l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ . Alors

$$P(A|B) = \frac{P(A)P(B|A)}{P(B)}.$$

#### Remarque.

On appelle cette formule la *formule de probabilité des causes*, ou *formule à remonter le temps* : si l'événement  $B$  se produit après l'événement  $A$ , on peut déterminer  $P_B(A)$ , qui ne respecte pas la chronologie des événements.

#### Exemple.

On reprend l'exemple précédent. Sachant qu'on tire une boule blanche, quelle est la probabilité pour qu'elle provienne de l'urne  $U_1$  ? On a

$$P(T_1|B) = \frac{P(B|T_1)P(T_1)}{P(B)} = \frac{6}{n(n+1)(2n+1)}.$$

#### Théorème 3.11 (formule de Bayes)

Soit  $\{A_1, A_2, \dots, A_n\}$  un système complet d'événements de l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$ , tel que pour tout  $k = 1, \dots, n$ ,  $P(A_k) \neq 0$ . Soit  $B$  un événement tel que  $P(B) \neq 0$ . Alors pour tout  $i \in [1, n]$ , on a

$$P_B(A_i) = \frac{P(A_i)P_{A_i}(B)}{\sum_{k=1}^n P(A_k)P_{A_k}(B)}$$

#### Exemple.

Une maladie touche 1 personne sur 10000. Un test détecte à 99% la maladie lorsqu'elle est présente, mais donne également 0,1% de faux positifs. Quelle est la probabilité pour qu'une personne testée positivement soit malade ? Si on note  $M$  l'événement "la personne est malade" et  $T$  "le test est positif", on cherche  $P(M|T)$ . D'après la formule de Bayes, on a

$$P(M|T) = \frac{P(T|M)P(M)}{P(T|M)P(M) + P(T|\overline{M})P(\overline{M})}.$$

Or,  $P(M) = 1/10000$ ,  $P(T|M) = 0,99$ ,  $P(T|\overline{M}) = 0,001$ , donc  $P(M|T) = 0,09$ , soit 9%.

## 4 Événements indépendants

### 4.1 Couple d'événements indépendants

#### Définition 4.1 (Indépendance de deux événements)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé. Deux événements  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité  $P$  si  $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ .

**Proposition 4.2**

Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé, et  $A, B$  deux événements tels que  $P(A) \neq 0$ . Alors  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité  $P$  si et seulement si  $P_A(B) = P(B)$ .

**Exemples.**

1. On lance deux fois une pièce de monnaie équilibrée. Quel est la probabilité d'obtenir pile la deuxième fois? Quel est la probabilité d'avoir pile deux fois de suite? Si on a déjà obtenu pile la première fois, a-t-on moins de chance d'avoir pile la seconde fois?

Modélisons entièrement l'expérience : on a deux lancers dont l'ordre est important, donc l'univers (l'ensemble des résultats) est

$$\Omega = \{(P, F), (P, P), (F, P), (F, F)\}$$

La pièce étant équilibrée, tous les événements élémentaires sont équiprobables, donc on choisit la probabilité uniforme. Soit  $A$  l'événement "obtenir pile la première fois" et  $B$  l'événement "obtenir pile la deuxième fois". On a  $A = \{(P, F), (P, P)\}$  donc

$$P(A) = \text{card}(A)/\text{card}(\Omega) = \frac{1}{2}.$$

De même  $B = \{(F, P), (P, P)\}$  et  $P(B) = \frac{1}{2}$ .

Avoir deux fois piles est l'événement  $A \cap B$  et  $P(A \cap B) = P(\{(P, P)\}) = \frac{1}{4}$ . Mais sachant qu'on a déjà obtenu pile la première fois, on a

$$P_A(B) = P(A \cap B)/P(A) = P(\{(P, P)\})/P(A) = \frac{1/4}{1/2} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi,  $P_A(B) = P(B)$  : le fait d'avoir  $A$  ne change pas la probabilité d'avoir  $B$ .

2. On lance un dé honnête, et on s'intéresse aux événements suivants :

- $A$  : le résultat est paire
- $B$  : le résultat est  $\geq 3$
- $C$  : le résultat est  $\leq 3$

Étudiez l'indépendance de  $A$  et  $B$  et de  $A$  et  $C$ . Soit  $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  muni de la probabilité uniforme. On a  $A = \{2, 4, 6\}$ ,  $B = \{3, 4, 5, 6\}$ ,  $C = \{1, 2, 3\}$ , et  $P(A) = 3/6 = 1/2$ ,  $P(B) = 2/3$ ,  $P(C) = 1/2$ . Or,  $A \cap B = \{4, 6\}$  donc  $P(A \cap B) = 2/6 = 1/3 = P(A)P(B)$ , donc  $A$  et  $B$  sont indépendants. Mais  $A \cap C = \{2\}$  donc  $P(A \cap C) = 1/6 \neq P(A)P(C)$  donc  $A$  et  $C$  ne sont pas indépendants.

**Remarques.**

1. Il ne faut pas confondre l'incompatibilité (notion ensembliste) et l'indépendance (notion probabiliste). Si  $A$  et  $B$  sont incompatibles, on a  $A \cap B = \emptyset$ , et  $P(A \cap B) = 0$ . Mais si  $A$  et  $B$  sont de probabilité non nulle, on a  $P(A)P(B) \neq 0$ , donc  $A$  et  $B$  ne sont pas indépendants.
2. Insistons encore un peu : l'indépendance de deux événements est une notion qui dépend de la probabilité choisie. C'est pour cette raison qu'on peut insister en parlant "d'indépendance pour la probabilité  $P$ ", cf. l'exemple ci-dessous.

3. On verra en particulier en td le cas des probabilités conditionnelles, cf. la méthode 4.3.  
 4. De même, si  $A$  et  $B$  sont indépendants,  $A$  et  $A \cap B$  ne le sont pas en général, et  $A$  et  $A \cup B$  non plus. En effet,  $P(A \cap B) = P(A)P(B) = P(A \cap (A \cap B))$ , et

$$P(A)P(A \cap B) = P^2(A)P(B) \neq P(A)P(B),$$

dès que  $P(A) \neq 0, 1$  et  $P(B) \neq 0$ . De même,  $P(A \cap (A \cup B)) = P(A)$ , et

$$P(A)P(A \cup B) \neq P(A)$$

dès que  $P(A) \neq 0, 1$  et  $P(A \cup B) \neq 1$ .

### Exemple.

Prenons par exemple  $\Omega = \{1, 2\}^2$ . On note  $P$  la probabilité uniforme sur  $\Omega$ , et  $P'$  la probabilité définie par

$$P'(\{(i, j)\}) = \begin{cases} \frac{1}{3} & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{6} & \text{sinon.} \end{cases}$$

C'est une probabilité car la somme des probabilités des événements élémentaires vaut 1. Soit  $A = \{(1, 1); (1, 2)\}$  et  $B = \{(1, 1); (2, 1)\}$ . On a alors

$$P(A \cap B) = P(\{(1, 1)\}) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P(A)P(B).$$

Mais

$$P'(A \cap B) = \frac{1}{3} \neq \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = P'(A)P'(B),$$

donc  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité  $P$ , mais pas pour la probabilité  $P'$ .

### Méthode 4.3

Soient  $A, B$  et  $C$  trois événements. Lorsqu'on sait que les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants une fois que l'événement  $C$  a eu lieu, cela signifie que  $A$  et  $B$  sont indépendants pour la probabilité conditionnelle  $P_C$ , i.e. que  $P_C(A \cap B) = P_C(A)P_C(B)$ .

### Proposition 4.4

Soient  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé fini, et  $A, B$  deux événements.

1. Si  $P(B) = 0$  ou  $P(B) = 1$ , alors les événements  $A$  et  $B$  sont indépendants.
2. Les événements  $A$  et  $\emptyset$  sont indépendants,  $A$  et  $\Omega$  sont indépendants.
3. Si  $A$  et  $B$  sont deux événements indépendants,  $A$  et  $\overline{B}$  sont indépendants,  $\overline{A}$  et  $B$  sont indépendants et  $\overline{A}$  et  $\overline{B}$  sont indépendants.

## 4.2 Famille d'événements mutuellement indépendants

### Définition 4.5 (Indépendance mutuelle)

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soient  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$ . Les événements  $A_1, \dots, A_n$  sont *mutuellement indépendants* (ou *indépendants*) pour la probabilité  $P$  si pour tout sous-ensemble non vide  $I$  de  $[1, n]$ , on a

$$P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

**Définition 4.6 (Indépendance deux à deux)**

Des événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  de l'espace probabilisé  $(\Omega, P)$  sont deux à deux indépendants si

$$\forall i, j \in \llbracket 1, n \rrbracket, i \neq j, P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

**Remarques.**

1. L'indépendance mutuelle entraîne l'indépendance deux à deux, mais la réciproque est fautive comme le prouve l'exemple suivant.
2. L'indépendance mutuelle est une condition très forte : il faut vérifier  $2^n - n - 1$  égalités (nombre de sous-ensemble d'un ensemble à  $n$  éléments, auquel on soustrait 1 (l'ensemble vide) et le nombre de singletons). En général, elle fait partie des hypothèses (expériences aléatoires aux résultats indépendants).

**Exemple.**

On lance deux fois une pièce équilibrée. On considère comme univers  $\Omega = \{P; F\}^2$  muni de la probabilité uniforme. On considère les événements suivants :

$A$  : "le premier lancer donne pile".

—  $B$  : " le deuxième lancer donne pile".

—  $C$  : "les deux lancers ont donné le même résultat".

Alors  $P(A) = P(B) = P(C) = 1/2$ ,  $P(A \cap B) = P(A \cap C) = P(B \cap C) = 1/4$ , et  $P(A \cap B \cap C) = 1/4$ . Les événements  $A$ ,  $B$  et  $C$  ne sont pas mutuellement indépendants, mais bien deux à deux indépendants.

**Proposition 4.7 (Sous-famille d'événements mutuellement indépendants)**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soient  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mutuellement indépendants. Pour tout  $I \subset \llbracket 1, n \rrbracket$ , la famille  $(A_i)_{i \in I}$  est mutuellement indépendante.

**Proposition 4.8**

Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé et soient  $n$  événements  $A_1, A_2, \dots, A_n$  mutuellement indépendants. Soit pour  $i \in \llbracket 1, n \rrbracket$  un événement  $B_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ . Alors les événements  $B_1, \dots, B_n$  sont mutuellement indépendants.

## 5 Compétences

1. Savoir modéliser des expériences aléatoires en fonction des demandes de l'énoncé.
2. Savoir quand utiliser la formule des probabilités composées, totales, ou la formule de Bayes.
3. Ne pas confondre événements indépendants et incompatibles.
4. Ne pas confondre indépendance mutuelle et deux à deux.