

TP n°12

Pendule pesant

PCSI₂ 2021 – 2022

Objectifs :

- Utiliser un capteur angulaire.
- Observer les paramètres dont dépend la période du mouvement.
- Tracer et analyser un portrait de phase.

I Présentation du dispositif

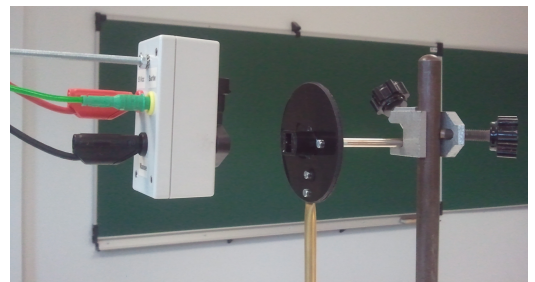
On étudie les oscillations d'un pendule pesant, constitué d'une tige légère d'environ 50 cm de long, sur laquelle un cylindre massif (appelé « lest » dans la suite) peut être déplacé à volonté, permettant ainsi de faire varier le moment d'inertie du pendule (cf. schéma ci-dessous). La tige est également équipée d'une plaque de plastique (appelée « aérofrein » dans la suite) de grande surface mais très légère, permettant de moduler l'intensité des frottements avec l'air ambiant (selon l'angle formé par cette plaque avec le plan du mouvement).

La tige tourne autour d'un axe horizontal Δ , passant par O . Sa position est repérée par l'angle θ qu'elle forme avec la verticale ; cet angle est mesuré à l'aide d'un capteur angulaire sans contact, constitué d'une partie mobile, équipée d'un aimant et solidaire de la tige en rotation, et d'une partie fixe, constituant la partie sensible du capteur, solidaire d'un boîtier de raccordement électrique et immobilisée sur une potence.

Contraintes de fonctionnement du capteur :

- la couche d'air entre les 2 parties du capteur doit être inférieure à 5 mm (non respecté sur la photo ci-contre !) et la distance entre les axes de ces 2 parties ne doit pas excéder 2 mm.
- le capteur doit être alimenté par une tension continue 0 – 5V, la valeur 5V ne devant absolument pas être dépassée sous peine de destruction du capteur.

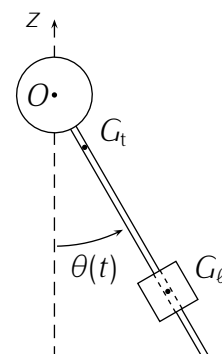
Dans ces conditions, la tension en sortie de capteur est une fonction affine de l'angle θ .



II Étude théorique du pendule pesant

On utilisera les notations suivantes :

	Tige seule	Lest
Masse	m	M
Moment d'inertie par rapport à Δ	J_t	J_ℓ
Barycentre	G_t	G_ℓ
Position barycentre	$\ell = OG_t$	$L = OG_\ell$



- Appliquer le théorème du moment cinétique au pendule en négligeant tout frottement ; en déduire que l'angle θ vérifie l'équation différentielle

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = 0 \quad (\text{Éq. 1})$$

et exprimer la pulsation propre ω_0 en fonction des paramètres m , M , ℓ , L , J_t , J_ℓ et g (intensité du champ de pesanteur).

- En assimilant le lest à un objet ponctuel, exprimer J_ℓ en fonction de M et L .
- En déduire l'expression de la période T_0 des petites oscillations en fonction de m , M , ℓ , L , J_t et g .

III Étude expérimentale

1. Installation

- Vérifier que les 2 parties du capteur angulaire satisfont les contraintes de position données en 1. et que les 2 potences supportant chacune des parties du capteur sont reliées entre elles par une tige solidement fixée.
- Alimenter la partie électrique du capteur grâce à l'alimentation présente sur l'interface Sysam, en utilisant les bornes « masse » et « 5 V » ; la borne « Sortie » du capteur doit être reliée à une des entrées de l'interface, de manière à mesurer cette tension u par rapport à la masse.
- Placer le lest à l'extrémité inférieure de la tige du pendule et l'aérofrein dans un plan parallèle à celui du mouvement, le plus haut possible sur la tige, de façon à minimiser les frottements fluides.
- Paramétrer le logiciel LatisPro pour faire une acquisition de la tension issue du capteur et tester le bon fonctionnement de l'ensemble en faisant osciller le pendule : la tension u visualisée doit être à l'image des oscillations du pendule.

2. Étalonnage

La tension u disponible en sortie de capteur est une fonction affine de l'angle θ ; un étalonnage est nécessaire pour déterminer cette fonction.

- Relever la valeur u_0 de la tension u lorsque le pendule est à l'équilibre ($\theta = 0$), en mesurant u pendant quelques secondes, puis en moyennant.
- À l'aide d'une potence annexe, immobiliser la tige du pendule parfaitement à l'horizontale : mesurer pour cela la distance entre la tige et la table à l'aide d'un mètre-ruban. Relever alors la valeur u_{90} de la tension u dans cette position du pendule ($|\theta| = 90^\circ$).
- Déterminer la relation donnant θ (en degrés) en fonction de u et des grandeurs u_0 et u_{90} , sous forme littérale.
- Entrer cette relation dans une feuille de calcul (F3) et afficher la courbe $\theta(t)$.

3. Non-isochronisme des oscillations

La résolution approchée de (Éq. 1) dans le cas d'angles quelconques (pas forcément petits) montre que les oscillations obtenues ne sont pas sinusoïdales et que leur période T dépend de l'amplitude $\theta_{\max}$ des oscillations et de la période propre T_0 du pendule.

Pour $\theta_{\max} \leq 90^\circ$, on montre que $T \approx T_0 \left(1 + \frac{\theta_{\max}^2}{N}\right)$, si $\theta_{\max}$ est exprimé en radians (cette relation est connue sous le nom de *formule de Borda*). On souhaite évidemment déterminer expérimentalement la valeur de N , qui est un entier !

- Mesurer la valeur de la période d'oscillation du pendule pour différentes valeurs d'amplitude des oscillations (en respectant $\theta_{\max} \leq 90^\circ$). On attend **beaucoup** de mesures, pas 3 ou 4.
- Entrer vos mesures dans une liste Python.

- Écrire une fonction qui calcule la valeur de N , donnée par la formule de Borda, pour une mesure.
- Écrire une fonction qui prend en argument la liste des périodes T et qui renvoie la liste des valeurs de N correspond.
- Que valent les demi-largeurs des plages de variabilité de T_0 , T et θ_0 ?
- En vous inspirant du script du TP1, trouver la valeur moyenne et l'incertitude-type de N .

4. Déplacement du lest

On s'intéresse à la modification de la période des oscillations en fonction du déplacement du lest le long de la tige. On travaillera dans le cadre des petits angles, sans changer la position de l'aérofrein (frottements négligés).

- Rappeler l'expression de T_0^2 en fonction de m , M , ℓ , L , J_t et g trouvée dans l'étude théorique. Cette expression sera notée (0) dans la suite.

4.a. Relevé de valeurs

- Mesurer la valeur de la période d'oscillation T_0 du pendule pour différentes positions (une dizaine au moins) du lest le long de la tige, repérées par la valeur de L .
- Mesurer également la valeur de la période d'oscillation T_{vide} du pendule en absence de lest.
- Mesurer la masse M du lest à l'aide d'une balance.

L'expression (0) montre que l'on ne peut pas trouver de jeu de variables (X, Y) permettant d'obtenir un graphe sous forme de droite. Des hypothèses simplificatrices doivent être formulées.

4.b. Hypothèse 1

On suppose que l'influence de la tige sur le pendule est négligeable par rapport à celle du lest ($m\ell \ll ML$ et $J_t \ll J_\ell$).

- Donner la nouvelle expression, notée (1), de T_0^2 , en fonction de L et g .
- Dans quel repère $Y_1 = f(X_1)$ doit-on placer les point expérimentaux de façon à obtenir une droite ?
- Tracer ce graphe et vérifier la validité de l'hypothèse 1. Conclure.

4.c. Hypothèse 2

On améliore le modèle précédent en ne retenant que l'hypothèse $m\ell \ll ML$.

- Donner la nouvelle expression, notée (2), de T_0^2 , en fonction de M , L , J_t et g .
- Dans quel repère $Y_2 = f(X_2)$ doit-on placer les point expérimentaux de façon à obtenir une droite ?
- Tracer ce graphe et vérifier la validité de l'hypothèse 2.
- Dédire de ces mesures la valeur approchée de J_t , puis de $m\ell$ (en utilisant les résultats en l'absence de lest).

5. Portrait de phase

On rappelle que le portrait de phase est la représentation de $\dot{\theta}$ en fonction de θ .

- Placer à nouveau le lest sur la tige, le plus bas possible.
- Tracer le portrait de phase du pendule peu amorti (aérofrein parallèle au plan d'oscillation) d'une part dans le cas de petits mouvements, d'autre part dans le cas de mouvements de grande amplitude.
- Tracer le portrait de phase du pendule fortement amorti (aérofrein perpendiculaire au plan d'oscillation et placé le plus bas possible sur la tige) dans le cas d'un mouvements de grande amplitude initiale.
- Quelle(s) information(s) nouvelle(s) apporte(nt) cette représentation ?