

# Probabilités, sous espaces vectoriels

## DS7 - durée : 3h

**La calculatrice est interdite.**

### Exercice 1 :

Soit  $P_1 = 2 + X$ ,  $P_2 = -X + 2X^2$  et  $P_3 = -X^2$ .

1. Montrez que  $(P_1, P_2, P_3)$  est une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .
2. Déterminez les coordonnées du polynôme  $P(X) = X$  dans cette base.

1. Montrons que la famille est libre : on cherche  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  telles que

$$\lambda_1 P_1 + \lambda_2 P_2 + \lambda_3 P_3 = 0 \Leftrightarrow 2\lambda_1 + (\lambda_1 - \lambda_2)X + (2\lambda_2 - \lambda_3) = 0$$

En utilisant l'unicité d'écriture dans  $\mathbb{R}_2[X]$ , on en déduit le système suivant :

$$\begin{cases} 2\lambda_1 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ 2\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases}$$

La résolution est immédiate (le système est en fait étagé...) et on a  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ .

Ainsi, la famille  $(P_1, P_2, P_3)$  est une famille libre de vecteurs de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

Elle est de cardinal 3 qui est aussi la dimension de  $\mathbb{R}_2[X]$  : c'est donc une base de  $\mathbb{R}_2[X]$ .

2. Comme  $X = 0 \times P_1 - P_2 - 2P_3$ , les coordonnées de  $X$  dans cette base sont  $(0, -1, -2)$

### Exercice 2 :

A New York, dans le quartier de Little Italy, parmi les 28 cafés du quartier on trouve deux types de cafés : les cafés tenus par un vrai immigré italien (soit 21 cafés), et les autres, tenus par des immigrés anglais qui se font passer pour des Italiens. Si le café est tenu par un vrai immigré italien, il y a 80% de chance que le café soit bon. Si il est tenu par un Anglais déguisé, il n'a que 30% de chance d'être bon. On suppose qu'un café est soit bon, soit mauvais.

1. Vous vous arrêtez pour boire un café : quelle est la probabilité pour qu'il soit bon ?
2. Le café en question s'appelait "*la piccolina Roma*" et s'est avéré mauvais. Quelle est la probabilité que le tenancier soit un fourbe Anglais déguisé ?

1. Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé modélisant l'expérience.

On pose les événements :

- I : le café est tenu par un italien
- A : le café est tenu par un anglais (c'est en fait  $\bar{I}$ )
- B : le café est bon
- M : la café est mauvais (c'est  $\bar{B}$ )

D'après l'énoncé,  $P(I) = \frac{21}{28} = \frac{3}{4}$ ,  $P_I(B) = \frac{8}{10}$  et  $P_A(B) = \frac{3}{10}$ .

On cherche  $P(B)$ .

Les événements  $I$  et  $A$  forment un système complet d'événements (puisque  $A = \bar{I}$ ), donc d'après la formule des probabilités totales on a

$$\begin{aligned} P(B) &= P(A)P_A(B) + P(I)P_I(B) \\ &= \frac{1}{4} \frac{3}{10} + \frac{3}{4} \frac{8}{10} \\ &= \frac{27}{40} \end{aligned}$$

2. On cherche maintenant  $P_M(A)$ .

On utilise la première formule de Bayes :

$$P_M(A) = \frac{P(A)P_A(M)}{P(M)} = \frac{\frac{1}{4} \frac{7}{10}}{1 - \frac{27}{40}} = \frac{\frac{7}{40}}{\frac{13}{40}} = \frac{7}{13}$$

### Exercice 3 :

Dans  $\mathbb{R}^3$ , on considère les 3 vecteurs suivants :

$$v_1 = (1, 0, -1), \quad v_2 = (0, 1, 2) \text{ et } v_3 = (1, 2, 3).$$

1. La famille  $(v_1, v_2, v_3)$  est-elle libre ?
2. On pose  $F = \text{vect}(v_1, v_2, v_3)$ . Déterminer une base de  $F$  et la dimension de  $F$ .
3. Déterminer un vecteur  $w$  tel que  $(v_1, v_2, w)$  soit une base de  $\mathbb{R}^3$ . En déduire un supplémentaire de  $F$  dans  $\mathbb{R}^3$ .
4. On considère  $G = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + 3y + 2z = 0\}$ . Déterminer une base de  $G$ . Quelle est la dimension de  $G$  ?
5. Déterminer trois réels  $a, b, c$  tels que l'on ait

$$F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : ax + by + cz = 0\}.$$

6. Déterminer une base de  $F \cap G$ .  $F$  et  $G$  sont-ils en sommes directes ?
7. Montrez que  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

1. On peut résoudre un système ou observer que  $v_3 = v_1 + 2v_2$  (on peut le repérer grâce aux zéros dans  $v_1$  et  $v_2$ ).

La famille est donc liée.

2. Comme  $v_3 \in \text{Vect}(v_1, v_2)$ , on a  $F = \text{Vect}(v_1, v_2, v_3) = \text{Vect}(v_1, v_2)$ .  
Les vecteurs  $v_1$  et  $v_2$  sont non colinéaires, donc forment une famille libre, et c'est donc une base de  $F$ , et  $\dim(F) = 2$ .

3. On complète la base  $v_1, v_2$ , par exemple avec  $w = (1, 0, 0)$

On vérifie facilement que  $v_1, v_2, w$  est libre (le système est très rapide, ou alors on dit que  $w$  ne vérifie pas l'équation de  $F$ ) et constitue donc une base de  $\mathbb{R}^3$ .

On en déduit par juxtaposition des bases que  $\text{Vect}(w)$  est un supplémentaire de  $F$ .

4. Avec la méthode habituelle : soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

Alors

$$u \in G \Leftrightarrow x + 3y + 2z = 0 \Leftrightarrow \exists y, z \in \mathbb{R}, u = (-3y - 2z, y, z) = y(-3, 1, 0) + z(-2, 0, 1)$$

Donc  $G = \text{Vect}((-3, 1, 0), (-2, 0, 1))$

Comme ces deux vecteurs sont non colinéaires, ils forment une base de  $G$  et  $\dim(G) = 2$

5. On sait que  $v_1$  et  $v_2$  sont dans  $F$ , donc si on veut une équation de  $F$ ,  $v_1$  et  $v_2$  doivent la vérifier. Cela donne le système suivant :

$$\begin{cases} a - c = 0 \\ b + 2c = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a = c \\ b = -2c \\ c \in \mathbb{R} \end{cases}$$

Avec  $c = 1$  par exemple, on obtient comme équation  $x - 2y + z = 0$ .

Ainsi,  $F \subset \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$ ... mais on n'a pas encore l'égalité!

Or  $F$  est de dimension 2, donc  $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$  est de dimension au moins 2. Comme ce n'est pas  $\mathbb{R}^3$ , c'est forcément de dimension 2. Les deux espaces sont donc de même dimension, avec l'un inclus dans l'autre : ils sont égaux!

(on peut aussi dire que  $x - 2y + z = 0$  est l'équation d'un plan, donc de dimension 2)

Donc  $F = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3; x - 2y + z = 0\}$

6. La question précédente nous donne une équation de  $F$  qu'on va utiliser pour l'intersection. Sans cette équation, la question est nettement plus difficile...

Soit  $u = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ .

$$\begin{aligned} u \in F \cap G &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ x + 3y + 2z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x - 2y + z = 0 \\ 5y + z = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 7y \\ z = -5y \\ y \in \mathbb{R} \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \exists y \in \mathbb{R}, u = (7y, y, -5y) \end{aligned}$$

On a donc  $F \cap G = \text{Vect}((7, 1, -5))$ . Une base est  $(7, 1, -5)$  et la dimension de  $F \cap G$  est donc 1.

Comme  $F \cap G \neq \{0\}$ , la somme n'est pas directe.

7. On sait que  $u_1, v_1, (-3, 1, 0), (-2, 0, 1)$  est une famille génératrice de  $F + G$ . On montre alors que cette famille est liée, puis que  $(u_1, v_1, (-3, 1, 0))$  est libre, de cardinal 3 dans  $\mathbb{R}^3$  qui est lui-même de dimension 3. Cette famille est donc une base de  $\mathbb{R}^3$ , donc génératrice. Ainsi,  $F + G = \mathbb{R}^3$ .

## Exercice 4 :

### Première partie

Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

- Déterminez les valeurs de  $\lambda$  pour lesquelles la matrice  $A - \lambda I_2$  n'est pas inversible.
- Montrez que  $P$  est inversible et calculez  $P^{-1}$ .
  - Vérifiez que la matrice  $D = P^{-1}AP$  est une matrice diagonale dont les coefficients diagonaux sont les valeurs obtenues à la question 1.
- Montrez que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$A^n = PD^nP^{-1}$$

Je vous épargne le calcul et on donne, pour la suite de l'exercice, que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$A^n = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}$$

### Deuxième partie

Une mouche se déplace aléatoirement dans un appartement constitué de 3 pièces contiguës, notées,  $A$ ,  $B$  et  $C$ . A l'instant initial 0, la mouche se trouve dans la pièce  $B$ . On suppose que les déplacements de la mouche suivent le protocole suivant :

- Si à un instant  $n$  donné, la mouche est dans la pièce  $A$  ou dans la pièce  $C$ , alors elle revient dans la pièce  $B$  à l'instant  $n + 1$ .
- Si à un instant  $n$  donné la mouche est dans la pièce  $B$ , elle y reste à l'instant  $n + 1$  avec une probabilité  $\frac{1}{2}$ , ou elle va dans la pièce  $A$  ou la pièce  $C$  de façon équiprobable.

Pour tout entier  $n$ , on définit l'événement  $A_n$  : "la mouche est dans la pièce  $A$  à l'instant  $n$ ".

On définit de la même façon les événements  $B_n$  et  $C_n$ .

Enfin, on note  $a_n$ ,  $b_n$  et  $c_n$  les probabilités respectives de ces événements.

- Exprimez pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , les nombres  $a_{n+1}$ ,  $b_{n+1}$  et  $c_{n+1}$  en fonction des nombres  $a_n$ ,  $b_n$  et/ou  $c_n$ .
- Montrez que la suite  $(b_n)$  est une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont on précisera  $b_0$ ,  $b_1$  et la relation liant  $b_{n+2}$ ,  $b_{n+1}$  et  $b_n$ .

On ne cherchera pas à déterminer cette suite avec le polynôme caractéristique

- Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $U_n = \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix}$

- Vérifiez que  $U_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$  et montrez que  $U_{n+1} = AU_n$  où  $A$  est la matrice de la première partie.
- Montrez que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $U_n = A^n U_0$
- En déduire l'expression de  $b_n$  en fonction de  $n$ .
- Déterminez les expressions de  $a_n$  et  $c_n$ .
- Calculez les limites de chacune de ces suites

### Première partie

$$1. \text{ On a } A - \lambda I_2 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix}$$

On nous demande les valeurs pour lesquelles cette matrice n'est pas inversible : il est inutile de faire un vrai miroir : seul la partie "étagée" nous intéresse :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \\ 1 & -\lambda \end{pmatrix} &\stackrel{L_1 \leftrightarrow L_2}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ \frac{1}{2} - \lambda & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \\ &\stackrel{L_2 \leftarrow L_2 - (\frac{1}{2} - \lambda)L_1}{\Leftrightarrow} \begin{pmatrix} 1 & -\lambda \\ 0 & -\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Cette matrice, triangulaire supérieure, est donc inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont non nuls, c'est à dire si et seulement si  $-\lambda^2 + \frac{1}{2}\lambda + \frac{1}{2} \neq 0$

On voit que 1 est racine évidente. L'autre racine est donc  $-\frac{1}{2}$  puisque le produit doit donner  $-\frac{1}{2}$

Ainsi,  $A - \lambda I_2$  est non inversible si et seulement si  $\lambda \in \left\{-\frac{1}{2}, 1\right\}$

On peut également calculer le déterminant, et on trouve le même polynôme.

- Un miroir rapide ou la formule pour les matrices  $2 \times 2$  donne

$$P^{-1} = \frac{-1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

- C'est un calcul tout simple et on trouve

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

3. a) C'est une récurrence qu'on a déjà faite plusieurs fois (cf les corrigés précédents pour le détail) et qu'il faut bien sûr rédiger sur votre copie. Comme  $D$  est diagonal, on a

$$D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \dots \text{ et je vous ai pré-mâché le travail!}$$

## Deuxième partie

1. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $A_n$ ,  $B_n$  et  $C_n$  forment un système complet d'événement.

Ainsi, d'après la formule des probabilités totales :

$$P(A_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1})$$

D'après le protocole précisé dans l'énoncé,  $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$  (la mouche revient dans  $B$  si elle est dans  $A$ ) et  $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$  (la mouche ne passe pas de la pièce  $C$  à la pièce  $A$  directement).

Enfin,  $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$  puisqu'elle doit aller en  $A$  ou en  $C$  "de façon équiprobable", et qu'il y a déjà une probabilité de  $1/2$  qu'elle reste en  $B$ .

Ainsi il ne reste que  $P(A_{n+1}) = P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1})$ , c'est à dire

$$a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$

On justifie de la même façon les autres relations :

$$b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n, \text{ et } c_{n+1} = \frac{b_n}{4}$$

2. Comme  $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$ , on a  $b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{b_{n+1}}{2} + c_{n+1}$ . En remplaçant avec les formules donnant  $a_{n+1}$  et  $c_{n+1}$ , il vient :

$$b_{n+2} = \frac{b_n}{4} + \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{b_n}{4}$$

et finalement

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}$$

L'énoncé dit que la mouche est, à l'instant 0, dans la salle  $B$ . Donc  $b_0 = 1$ ,  $a_0 = 0$  et  $c_0 = 0$ .

Comme  $b_{n+1} = a_n + \frac{b_n}{2} + c_n$ , on en déduit  $b_1 = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}$ .

3. a) C'est une question cadeau, au cas où vous n'avez pas réussi la précédente, on vous donne ici  $b_0$  et  $b_1$ . On a bien, d'après ce qu'on vient de dire à la question précédente :

$$U_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 1 \\ & \end{pmatrix}$$

On calcule  $AU_n$  et on obtient  $\begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$ .

Or

$$b_{n+2} = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{b_n}{2}$$

, donc  $AU_n = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}$

On a bien la relation demandée.

- b) Par récurrence, montrons que  $U_n = A^n U_0$  :

On a bien  $U_0 = A^0 U_0$  vu que  $A^0 = I_2$ .

Soit  $n \in \mathbb{N}$ . Supposons que  $U_n = A^n U_0$ .

Alors  $U_{n+1} = AU_n = AA^n U_0 = A^{n+1} U_0$

La formule est bien héréditaire.

Conclusion : la formule est initialisée et est héréditaire, donc pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a bien  $U_n = A^n U_0$

c) On obtient donc

$$\begin{aligned}
 \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} &= A^n U_0 = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^n + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \left(\frac{1}{2} - 1\right) \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{2} - 1\right) \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n+1} \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

D'où  $b_n = \frac{1}{3} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right)$

d) On sait déjà que  $a_0 = 0$ . De plus, on a  $a_{n+1} = \frac{b_n}{4}$  donc pour tout  $n \geq 1$ ,

$$a_n = \frac{b_{n-1}}{4} = \frac{1}{12} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$$

Remarquons que la formule obtenue fonctionne aussi pour  $n = 0$ , la puissance  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$  devant  $-2$  pour  $n = 0$ .

De même on trouve  $c_n = \frac{1}{12} \left( 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \right)$

e) Comme  $\left| -\frac{1}{2} \right| < 1$ , on a  $\lim \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \lim \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 0$  d'où  $\lim a_n = \frac{1}{6}$ ,  $\lim b_n = \frac{2}{3}$  et  $\lim c_n = \frac{1}{6}$ .

## Exercice 5 :

Une information est transmise dans une chaîne de personnes. L'information n'a que deux états possibles : "vraie" ou "fausse". Soit  $p \in ]0, 1[$ . A chaque transmission, la probabilité que l'information soit transmise à l'identique d'une personne à l'autre est  $p$ , et avec une probabilité  $1 - p$ , c'est l'état contraire qui est transmis.

Autrement dit :

- ▶ si l'information est vraie pour une personne, il y a une probabilité  $p$  pour qu'il la transmette dans son état "vraie", et une probabilité  $1 - p$  pour qu'il la transmette dans son état "fausse".
- ▶ si l'information est fausse pour une personne, il y a une probabilité  $p$  pour qu'il la transmette encore "fausse", et  $1 - p$  pour qu'il la transmette comme vraie.

On note  $p_n$  la probabilité que l'information après  $n$  transmissions soit "vraie" et on suppose que l'info était dans son état "vraie" à l'instant initial pour la première personne (ainsi  $p_0 = 1$ ).

1. Déterminez une relation de récurrence entre  $p_{n+1}$  et  $p_n$ .
2. En déduire la valeur de  $p_n$  en fonction de  $p$  et de  $n$ .
3. Calculez  $\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n$ . Comment interpréter ce résultat ?

1. Soit  $(\Omega, P)$  un espace probabilisé qui modélise l'expérience.

Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , posons  $I_n$  l'événement : "l'information est vraie après la  $n$ -ième transmission."

D'après l'énoncé, on a  $P_{I_n}(I_{n+1}) = p$ , de même avec  $P_{\bar{I}_n}(\bar{I}_{n+1}) = p$

(l'information ne change pas d'état avec une probabilité  $p$ )

$I_n$  et  $\bar{I}_n$  forment un système complet d'événements : on peut appliquer la formule des probabilités totales, et il vient :

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= P(I_{n+1}) = P(I_n)P_{I_n}(I_{n+1}) + P(\bar{I}_n)P_{\bar{I}_n}(I_{n+1}) \\ &= p_n p + (1 - p_n)(1 - p) \\ &= p p_n + 1 - p + p_n(p - 1) = (2p - 1)p_n + (1 - p) \end{aligned}$$

D'où la relation :  $p_{n+1} = (2p - 1)p_n + (1 - p)$ .

2. Comme  $p \neq 1$ , la suite est arithmético géométrique et on cherche  $\alpha$  tel que  $\alpha = (2p - 1)\alpha + 1 - p$ .  
On trouve  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

Alors  $p_{n+1} - \alpha = (2p - 1)(p_n - \alpha)$  donc la suite  $(p_n - \frac{1}{2})$  est géométrique de raison  $2p - 1$  avec

$$p_0 - \alpha = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

Ainsi pour tout  $n$ ,  $p_n = (2p - 1)^n \left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}$ .

3. Comme  $0 < p < 1$ , alors  $0 < 2p < 2$  et  $-1 < 2p - 1 < 1$ , donc  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (2p - 1)^n = 0$  et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \frac{1}{2}.$$

A long terme, l'information transmise n'a plus aucune fiabilité : une chance sur deux pour que ce soit son contraire qui soit donné ! Ce résultat est valable quel que soit  $p$  (même très proche de 1). Pire : le fait que ce soit du type géométrique fait que l'info est très vite perdue (la suite est décroissante rapidement)... C'est le principe du jeu dit "du téléphone arabe", où une information, pourtant de complexité raisonnable, finit invariablement très déformée à l'arrivée quand on la transmet d'un joueur à l'autre....

## Exercice 6 : bonus

Soit  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \geq 2$

Soit  $F = \{P \in \mathbb{K}_n[X], P(0) = P(1) = 0\}$  et soit  $G = \mathbb{K}_1[X]$

1. Justifiez que  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}_n[X]$  et donnez en une base.
2. Montrez que  $F$  et  $G$  sont supplémentaires dans  $\mathbb{K}_n[X]$ .
3. Et si on quittait la dimension finie ? On suppose maintenant  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ .

On note  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$  l'ensemble des fonctions de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

Soit  $\tilde{F} = \{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}); f(0) = f(1)\}$ .

Montrez  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{F} \oplus G$

1. Si  $n < 2$ ,  $F$  est l'espace nul et l'énoncé n'a pas vraiment de sens ! pardon pour la coquille !  
Supposons  $n \geq 2$  :

Procédons par équivalences pour tout récolter d'un coup :

$$\begin{aligned} P \in F &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ et } P(0) = 0 = P(1) \\ &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ et } X(X - 1) | P \\ &\Leftrightarrow P \in \mathbb{K}_n[X] \text{ et } \exists Q \in \mathbb{K}_{n-2}[X], t.q. P = X(X - 1)Q \\ &\Leftrightarrow a_0, a_1, \dots, a_{n-2} \in \mathbb{K}, t.q. P = X(X - 1) \sum_{k=0}^{n-2} a_k X^k \\ &\Leftrightarrow P \in \text{Vect}((X(X - 1)X^k), k \in \llbracket 0; n - 2 \rrbracket) \end{aligned}$$

Ainsi  $F$  est un sous espace vectoriel de  $\mathbb{K}_n[X]$ , engendré par les polynômes  $X(X-1)X^k$ , pour  $k \in \llbracket 0; n-2 \rrbracket$ . Ces polynômes étant tous de degré distinct, ils constituent une famille libre, et c'est donc une base de  $F$ . Ainsi  $\dim(F) = n - 2 + 1 = n - 1$

2. Une base de  $G$  est  $(1, X)$  et donc  $\dim(G) = 2$ . De plus, si  $P \in F \cap G$ , on obtient immédiatement  $P = 0$  (un polynôme de degré inférieur ou égale à 1 ne peut avoir deux racines, sauf s'il est le polynôme nul). Donc  $F \cap G = \{0_{\mathbb{K}_n[X]}\}$  et  $\dim(F) + \dim(G) = n - 1 + 2 = n + 1 = \dim(\mathbb{K}_n[X])$ .  
Donc  $\mathbb{K}_n[X] = F \oplus G$ .

3. Encore une mini coquille : il faut ici supposer  $\mathbb{K} = \mathbb{R}$  pour que l'intersection entre  $G$  et  $\tilde{F}$  ait un sens.... Mea culpa! On peut vérifier facilement que  $\tilde{F}$  est un sous espace vectoriel, mais on ne peut donner de base de  $\tilde{F}$ .

On montre de la même façon qu'en  $b$ ) que  $\tilde{F} \cap G = \{0_{\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})}\}$ , donc que la somme est directe.

Il faut maintenant montrer qu'on a  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{F} + G$ , mais l'argument de dimension ne fonctionne pas.

Il faut donc passer par une analyse synthèse pour trouver, pour tout  $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ ,  $\tilde{f} \in \tilde{F}$  et  $P \in \mathbb{R}_1[X]$  tels que  $f = \tilde{f} + P$

En posant  $\tilde{f}(x) = f(x) - (f(1) - f(0))x - f(0)$  et  $P(x) = (f(1) - f(0))x + f(0)$ , on a bien  $P(x) \in \mathbb{R}_1[X]$ ,  $\tilde{f}(0) = f(0) - f(0) = 0$ ,  $\tilde{f}(1) = f(1) - f(1) + f(0) - f(0) = 0$ , donc  $\tilde{f} \in \tilde{F}$ .

Autrement dit  $f \in \tilde{F} + G$  et  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \subset \tilde{F} + G$ .

La seconde inclusion est immédiate et on obtient bien  $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R}) = \tilde{F} \oplus G$