

## ONDE EM MATIERE-Exercice 2

On étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans un plasma peu dense :

$\vec{E} = \vec{E}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$  et  $\vec{B} = \vec{B}_0 \exp i(\omega t - \vec{k} \cdot \vec{r})$ . On suppose la densité volumique  $\rho$  de charge non nulle.

a-Etablir l'équation du mouvement d'un électron en faisant les approximations nécessaires.

On note  $n_e$  la densité particulaire d'électrons. Montrer que l'on peut définir une conductivité complexe  $\underline{\gamma}$ .

b-A l'aide des équations de Maxwell et de l'équation locale de conservation de la charge, établir une nouvelle expression de  $\underline{\gamma}$  en fonction de  $\omega$  et  $\epsilon_0$ .

c-Montrer que  $\vec{B} = \vec{0}$ . En déduire la position relative des vecteurs  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$  et commenter.

Montrer que la pulsation  $\omega$  ne peut avoir qu'une seule valeur.

a-Loi de la quantité de mouvement à un électron :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E} - e\vec{v} \wedge \vec{B} + \vec{F}_{\text{autres particules} \rightarrow \text{électron}}$

Plasma peu dense :  $\vec{F}_{\text{autres particules} \rightarrow \text{électron}}$  négligeable

Electron non relativiste : force magnétique négligeable

Il reste :  $m \frac{d\vec{v}}{dt} = -e\vec{E}$

En régime sinusoïdal et notation complexe  $i\omega m \vec{v} = -e\vec{E}$  d'où :  $\vec{v} = -\frac{e\vec{E}}{i\omega m}$

Puis  $\vec{j} = -n_e e \vec{v} = \frac{n_e e^2}{i\omega m} \vec{E}$  d'où :  $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{i\omega m}$

b-Equation de conservation de la charge :  $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div} \vec{j} = 0 \Rightarrow i\omega \rho + \underline{\gamma} \text{div} \vec{E} = 0 \Rightarrow i\omega \rho + \underline{\gamma} \frac{\rho}{\epsilon_0} = 0$

D'où :  $\underline{\gamma} = -i\omega \epsilon_0$

c-Equation de Maxwell-Ampère :  $\vec{\text{rot}} \vec{B} = \mu_0 (\vec{j} + \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}) \Rightarrow -i\vec{k} \wedge \vec{B} = \mu_0 (\underline{\gamma} \vec{E} + \epsilon_0 i\omega \vec{E})$

Or  $\underline{\gamma} = -i\omega \epsilon_0$  donc :  $-i\vec{k} \wedge \vec{B} = \vec{0}$  On en déduit que  $\vec{k}$  et  $\vec{B}$  sont parallèles

Or  $\text{div} \vec{B} = 0$  donc  $-i\vec{k} \cdot \vec{B} = 0$  On en déduit que  $\vec{k}$  et  $\vec{B}$  sont perpendiculaires

La seule possibilité est donc d'avoir  $\vec{B} = \vec{0}$

Equation de Maxwell-Faraday :  $\vec{\text{rot}} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = \vec{0}$  donc :  $-i\vec{k} \wedge \vec{E} = \vec{0}$  donc :  $\vec{k}$  et  $\vec{E}$  sont parallèles

L'onde est longitudinale.

On identifie les deux expressions de la conductivité complexe :  $\underline{\gamma} = \frac{n_e e^2}{i\omega m} = -i\omega \epsilon_0$

D'où l'unique pulsation possible :  $\omega = \sqrt{\frac{n_e e^2}{m \epsilon_0}} = \omega_p$