

6.4 Ondes électromagnétiques milieux-Exercice 6

Un satellite S se trouve au-dessus de l'ionosphère d'épaisseur H, à la verticale d'un point P de la Terre. On note D la distance SP. On assimile la partie de l'atmosphère autre que l'ionosphère à du vide. On note f_p la fréquence plasma et on rappelle la relation de dispersion d'un plasma : $k^2 = (\omega^2 - \omega_p^2)/c^2$.

a-Le satellite émet simultanément à $t = 0$ deux paquets d'ondes étroits, centrés autour de deux fréquences f_1 et f_2 telles que $f_1 > f_2 \gg f_p$. Ils arrivent en P aux dates t_1 et t_2 respectivement. Exprimer en fonction de H, c, f_1 , f_2 et f_p le décalage temporel $\Delta t = t_2 - t_1$ entre la réception des deux signaux en P.

b-Etablir l'expression du temps t mis par un paquet d'ondes de fréquence $f \gg f_p$ pour parvenir du satellite au point P en fonction de D, H, c, f et f_p .

c-En déduire, à l'aide des résultats précédents, que $D = ct - d$ en exprimant d en fonction de Δt , c, f, f_1 et f_2 .

d-Le terme d est appelé correction ionosphérique, il est obtenu par mesure de Δt en temps réel et il est de l'ordre du cm. Commenter cette valeur pour différentes applications du G.P.S.

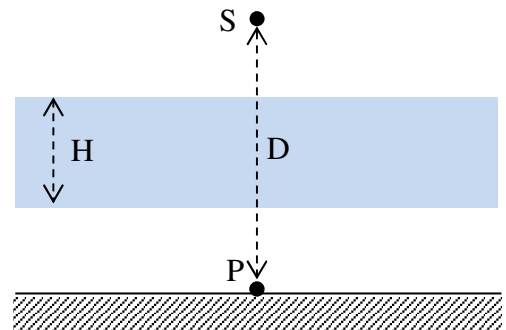
a-Relation de dispersion : $\omega^2 = k^2 c^2 + \omega_p^2$

On dérive par rapport à k : $2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2kc^2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk} = \frac{kc^2}{\omega}$

Vitesse de groupe : $v_g = c \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{\omega^2}} = c \sqrt{1 - \frac{f_p^2}{f^2}}$

Chaque paquet d'ondes parcourt la distance D-H dans l'air à la vitesse c et la distance H dans l'ionosphère à la vitesse v_g .

$$t_1 = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{v_g(f_1)} \quad \text{et} \quad t_2 = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{v_g(f_2)}$$



$$\text{Donc : } \Delta t = H \left[\frac{1}{v_g(f_2)} - \frac{1}{v_g(f_1)} \right] = \frac{H}{c} \left[\left(1 - \frac{f_p^2}{f_2^2}\right)^{-1/2} - \left(1 - \frac{f_p^2}{f_1^2}\right)^{-1/2} \right] \quad \text{or : } f_1 > f_2 \gg f_p$$

$$\Delta t \approx \frac{H}{c} \left[\left(1 + \frac{f_p^2}{2f_2^2}\right) - \left(1 + \frac{f_p^2}{2f_1^2}\right) \right]$$

$$\text{Finalement : } \Delta t \approx \frac{Hf_p^2}{2c} \left[\frac{1}{f_2^2} - \frac{1}{f_1^2} \right]$$

$$\text{b-On a : } t = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{v_g(f)} = \frac{D-H}{c} + \frac{H}{c} \left(1 - \frac{f_p^2}{f^2}\right)^{-1/2} \approx \frac{D-H}{c} + \frac{H}{c} \left(1 + \frac{f_p^2}{2f^2}\right)$$

$$\text{Donc : } t \approx \frac{D}{c} + \frac{Hf_p^2}{2cf^2}$$

$$\text{c-D'où : } D \approx ct - \frac{Hf_p^2}{2f^2} \quad \text{On en déduit : } d = \frac{Hf_p^2}{2f^2}$$

$$\text{D'après la question a : } \frac{Hf_p^2}{2} = c\Delta t \frac{f_1^2 f_2^2}{f_1^2 - f_2^2}$$

$$\text{Donc : } d = c\Delta t \frac{f_1^2 f_2^2}{f^2 (f_1^2 - f_2^2)}$$

d-Correction non nécessaire pour la localisation d'une automobile, par exemple.

Correction nécessaire pour une étude scientifique précise, sismologie par exemple.