Exercices

Exercice 1. Soit E un espace euclidien et $N : x \mapsto \|x\|$.

1. L'application N est-elle différentiable en 0 ?
2. Montrer que N est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $E \setminus \{0\}$ et déterminer la différentielle de N.
   Indication : considérer $g = N^2$.
3. Déterminer $\nabla N(x)$.

Exercice 2. On considère l'application

$$f : \begin{array}{ccl} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,y) & \longmapsto & \begin{cases} 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \\ \frac{x\sin(y) - y\sin(x)}{x^2+y^2} & \text{sinon.} \end{cases} \end{array}$$

Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : $\sin(y) = y + o\left((y^2)\right) = y + y^2\alpha(y)$.

Exercice 3. On considère $\mathbb{C}$ muni de sa structure de $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
Montrer que $f : \left| \begin{array}{ccc} \mathbb{C}^* & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ z & \longmapsto & 1/z \end{array} \right.$ est différentiable sur $\mathbb{C}^*$ et donner sa différentielle.

Exercice 4. Montrer que l'application

$$f : \begin{array}{ccc} \mathrm{GL}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \longmapsto & M^{-1} \end{array}$$

est différentiable et donner sa différentielle.

Exercice 5. Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,x);\ \text{avec } x \in \mathbb{R}\}$ par :

$$f(x,y) = \frac{\sin(y) - \sin(x)}{y - x}.$$

Montrer que f se prolonge sur $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}^2$.
Indication : On pourra utiliser la fonction $t \mapsto \frac{\sin t}{t}$ prolongée par continuité sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6. Soit U un ouvert non vide de $\mathbb{R}^2$ et $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$.

1. Montrer que la fonction g définie par $g : (r,\theta) \mapsto f(r\cos\theta, r\sin\theta)$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur son ouvert V de définition et exprimer ses dérivées partielles en fonction de celles de f.
2. On considère l'équation

$$(E_0) : \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

   (a) Montrer que toute solution de (E_0) sur $\mathbb{R}^2$ est constante.
   (b) Pour $U = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$, montrer que $f \in \mathcal{C}^1(U, \mathbb{R})$ est solution de (E_0) sur U si et seulement s'il existe une fonction $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et 2π-périodique telle que pour tout $(x,y) \in U, f(x,y) = \varphi(\theta)$ avec θ tel que $(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}(\cos\theta, \sin\theta)$.
3. Résoudre l'équation sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$:

$$(E) : \qquad x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + y^2.$$

Exercices CCINP

Exercice 7 (CCINP 33). On pose : $\forall\,(x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\},\ f\,(x,y) = \dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ et $f\,(0,0) = 0$.

1. Démontrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. Démontrer que f admet des dérivées partielles en tout point de $\mathbb{R}^2$.
3. f est-elle de classe C^1 sur $\mathbb{R}^2$? Justifier.

Exercice 8 (CCINP 52). Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.
On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^4}{x^2+y^2-xy} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ \alpha & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

1. Prouver que :
$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2,\ x^2+y^2-xy \geqslant \frac{1}{2}(x^2+y^2).$$
2. (a) Justifier que le domaine de définition de f est bien $\mathbb{R}^2$.
   (b) Déterminer α pour que f soit continue sur $\mathbb{R}^2$.
3. Dans cette question, on suppose que $\alpha = 0$.
   (a) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ et les calculer.
   (b) Justifier l'existence de $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ et donner leur valeur.
   (c) f est-elle de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 9 (CCINP 57).

1. Soit f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$.
   (a) Donner, en utilisant des quantificateurs, la définition de la continuité de f en $(0,0)$.
   (b) Donner la définition de «f différentiable en $(0,0)$».
2. On considère l'application définie sur $\mathbb{R}^2$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

   (a) Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.