

Informatique – TP13

Vésale Nicolas - Henrik Thys

Exercice 1: Deux graphes d'une même fonction.

On considère la fonction définie par:

$$f(x) = (x - 1)^7.$$

1. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0.99, 1.01]$.
2. Pourquoi a-t-on aussi: $f(x) = x^7 - 7x^6 + 21x^5 - 35x^4 + 35x^3 - 21x^2 + 7x - 1$?
3. Tracer le graphe de f sur l'intervalle $[0.99, 1.01]$ en utilisant cette autre formule.
4. Pourquoi une telle différence? Justifiez.

Exercice 2: Détermination numérique de l'inversibilité d'une matrice 2×2 .

On considère la matrice:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4.$$

1. Rappeler à quelle condition la matrice A est inversible. En déduire une fonction `inverse(a,b,c,d)` qui prend pour paramètres les coefficients a, b, c et d et qui rend `True` si A est inversible et `False` sinon.
2. La matrice:

$$A = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

est-elle inversible? Répondre mathématiquement puis avec votre fonction. Pourquoi cette différence?

3. Pour essayer d'éviter ce problème, on va reformuler la question. Si le déterminant de A est « suffisamment » grand, on dira que A est inversible et sinon, on répondra qu'on ne peut pas répondre (plus précisément, on dira que A est mal conditionnée).
 - (a) Un premier étudiant propose, comme la mantisse est codée avec 52 chiffres, de considérer comme inversibles les matrices dont le déterminant est supérieur ou égal à 2^{-52} . En déduire une fonction `inverse2(a,b,c,d)` qui prend pour paramètres les coefficients a, b, c et d et qui rend `True` si le déterminant de A est supérieur ou égal à 2^{-52} et `"Mal conditionnée"` sinon. Testez votre fonction avec la matrice A de la question 2 puis avec:

$$B = \begin{pmatrix} 0.1 & 0.3 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}.$$

Pourquoi votre fonction affirme-t-elle que cette matrice est inversible? Pensez-vous que prendre une autre quantité fixée que 2^{-52} pourra donner une réponse juste en général?

- (b) Pour résoudre le problème rencontré à la question précédente, on va procéder en deux temps. On va d'abord calculer l'exposant maximal k des réels a, b, c et d puis on va répondre que la matrice est inversible si son déterminant est supérieur ou égal à 2^{k-52} et qu'elle est mal conditionnée sinon. Écrire une fonction `inverse3(a,b,c,d)` qui implémente cette méthode. Vous pourrez tester votre fonction avec les matrices A et B .