

M₆ Forces centrales.

PCSI₂ 2025 – 2026

ATTENTION ! Ce qui suit n'est absolument pas au programme. C'est juste un petit extra pour celles et ceux qui voulaient savoir comment on retrouve la troisième de Kepler dans le cas elliptique.

I Compléments

1. Formules de BINET

De façon à simplifier les calculs qui suivent, nous allons donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de M en fonction de C et de $u = \frac{1}{r}$.

En coordonnées polaires, $\vec{v} = \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta$, or $C = r^2\dot{\theta} \iff \dot{\theta} = Cu^2$ et on peut écrire

$$r\dot{\theta} = rCu^2 = Cu \quad \text{et} \quad \dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{d\frac{1}{u}}{d\theta} Cu^2 = -\frac{1}{u^2} \frac{du}{d\theta} Cu^2 = -C \frac{du}{d\theta} \quad \text{d'où}$$

$$\vec{v} = -C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \Rightarrow v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad : \text{Formule de BINET pour la vitesse.}$$

De même, pour l'accélération

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{v}}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = Cu^2 \frac{d}{d\theta} \left[-C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_r + Cu \vec{e}_\theta \right] = Cu^2 \left[-C \frac{d^2u}{d\theta^2} \vec{e}_r - C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_\theta + C \frac{du}{d\theta} \vec{e}_\theta - Cu \vec{e}_r \right] \quad \text{d'où}$$

$$\vec{a} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r \quad : \text{Formule de BINET pour l'accélération.}$$

On retrouve une accélération centrale puisque la force est centrale.

2. Équation de la trajectoire

Par application du PFD sur la particule dans $\mathcal{R}_g$ galiléen :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F} \iff m \vec{a} = -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r = -ku^2 \vec{e}_r$$

en posant $u = \frac{1}{r}$, or d'après la formule de BINET $\vec{a} = -C^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] \vec{e}_r$ et

$$-mC^2 u^2 \left[\frac{d^2u}{d\theta^2} + u \right] = -ku^2 \Rightarrow \frac{d^2u}{d\theta^2} + 1 \times u = +\frac{k}{mC^2} \quad \text{si } u \neq 0 \iff r \neq \infty, \text{ d'où}$$

$$u = \frac{k}{mC^2} + A \cos(\theta + \varphi) = \frac{1 + e \cos(\theta + \varphi)}{p} \quad \text{en posant } p = \frac{mC^2}{k} \text{ et } e = pA.$$

et en choisissant ensuite l'axe d'origine des angles θ de telle sorte que $\varphi = 0$, on obtient : $u = \frac{1}{r} = \frac{1 + e \cos \theta}{p}$ puis finalement,



$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad : \text{équation paramétrique d'une conique de paramètre } p \text{ et d'excentricité } e.$$

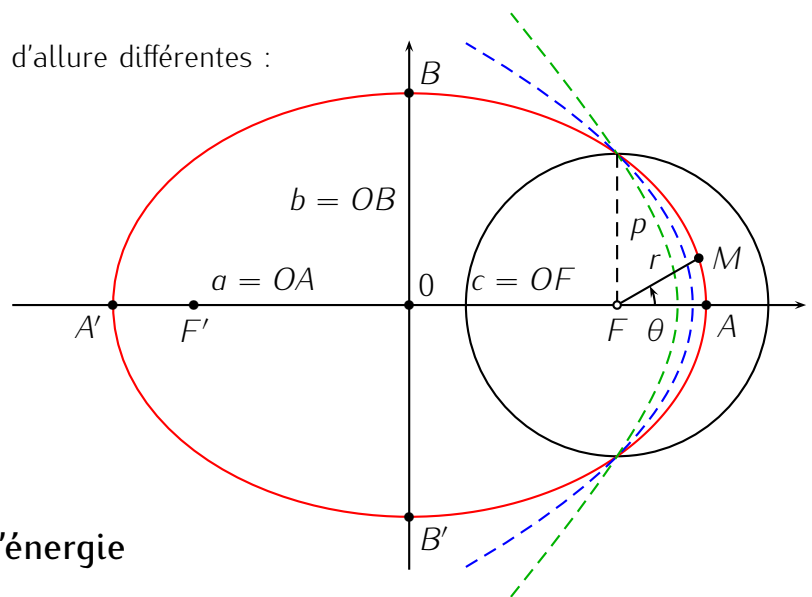
Remarques :

- on peut retrouver ce résultat par conservation de l'énergie mécanique ou d'autres méthodes.
- en prenant une autre origine pour θ , on obtient $r = \frac{p}{1 - e \cos \theta}$.

3. Forme de la trajectoire

Selon la valeur de e , on obtient des courbes d'allure différentes :

- si $e = 0$, on a un cercle de rayon p ,
- si $e < 1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une ellipse de demi grand axe $OA = OA' = a$, de demi petit axe $OB = OB' = b$. Surface de l'ellipse $S = \pi ab$.
- si $e = 1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une parabole, - - -
- si $e > 1$, la courbe $\mathcal{C}$ est une hyperbole, - - -



4. Relation entre l'excentricité et l'énergie

$$E_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{k}{r} = \frac{1}{2}mv^2 - ku$$

en posant $u = \frac{1}{r}$, on a alors, d'après la formule de BINET,

$$v^2 = C^2 \left[u^2 + \left(\frac{du}{d\theta} \right)^2 \right] \quad \text{avec} \quad u = \frac{1 + e \cos \theta}{p} = \frac{1}{p} + \frac{e \cos \theta}{p} \Rightarrow \frac{du}{d\theta} = -\frac{e}{p} \sin \theta \quad \text{d'où}$$

$$v^2 = C^2 \left[\frac{1}{p^2} + \frac{2e}{p^2} \cos \theta + \frac{e^2}{p^2} \cos^2 \theta + \frac{e^2}{p^2} \sin^2 \theta \right] \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{mC^2}{p^2} (1 + 2e \cos \theta + e^2) - \frac{k}{p} - \frac{ke}{p} \cos \theta$$

$$\text{mais } p = \frac{mC^2}{k} \Rightarrow mC^2 = kp \Rightarrow E_m = \frac{1}{2} \frac{k}{p} (1 + 2e \cos \theta + e^2 - 2 - 2e \cos \theta) \quad \text{et enfin,}$$

$$E_m = \frac{k}{2p} (e^2 - 1) \iff e = \sqrt{1 + \frac{2pE_m}{k}} \geq 0$$

On retrouve :

- si $k < 0$: cas répulsif $p = \frac{mC^2}{k} < 0$ et $E_{p_{\text{eff}}} > 0$ d'où $E_m > E_{p_{\text{eff}}} > 0$ soit $e > 1$: hyperboles.
- si $k > 0$: cas attractif $p = \frac{mC^2}{k} > 0$ et
 - ★ si $E_m < 0$, $0 < e < 1$ ce qui correspond à une ellipse : état lié
 - ★ si $E_m = 0$, $e = 1$ ce qui correspond à une parabole : état de diffusion et
 - ★ si $E_m > 0$, $e > 1$ ce qui correspond à une hyperbole : état de diffusion.

Énergie : $E_m = \frac{k}{2p}(e^2 - 1)$ et $a = \frac{p}{1-e^2}$ donc

$$E_m = -\frac{k}{2a} \quad : E_m \text{ en fonction de } a, \text{ relation utile à retenir.}$$



5. Troisième loi de Kepler

De la deuxième loi de Kepler, on tire :

$$\begin{aligned} T &= \frac{2\pi ab}{C} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} \quad \text{or } b^2 = pa \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3 p}{C^2} \text{ et on avait } p = \frac{mC^2}{k} \\ \Rightarrow T^2 &= \frac{4\pi^2 a^3 m}{k} \text{ avec } k = Gmm_S \text{ d'où } \frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m}{Gmm_S} = \frac{4\pi^2}{Gm_S} \end{aligned}$$

C'est une constante indépendante de la planète P considérée, on retrouve ainsi la

Troisième loi de Kepler : le rapport $\frac{T^2}{a^3}$ est le même pour toutes les planètes du système solaire.

Table des matières

I Compléments

1. Formules de BINET
2. Équation de la trajectoire
3. Forme de la trajectoire
4. Relation entre l'excentricité et l'énergie
5. Troisième loi de Kepler