CCINP - Option PC - Modélisation - 2023

Partie III - Etudes des performances acoustiques

Q20 Equation de conservation de la masse : $\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \vec{v_1}) = 0$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \operatorname{div}((\rho_0 + \underbrace{\rho_1)\vec{v_1}}_{\text{ordre 2} \Rightarrow \text{négligeable}}) = 0$$

Il reste : $\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \operatorname{div} \vec{v_1} = 0$ Soit à une dimension : $\boxed{\frac{\partial \rho_1}{\partial t} + \rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial x} = 0}$

Q21 Equation d'Euler linéarisée : $\rho_0 \frac{\partial \vec{v_1}}{\partial t} = -\vec{\operatorname{grad}}\, p_1$

En projection selon Ox : $\boxed{\rho_0 \frac{\partial v_1}{\partial t} = -\frac{\partial p_1}{\partial x}}$

Q22 $\chi_s = \frac{1}{\rho}\frac{\partial \rho}{\partial P} \Rightarrow \boxed{\rho_1 = \rho_0 \chi_s p_1}$ après linéarisation

Q23 On dérive par rapport à x l'équation d'Euler linéarisée : $\rho_0 \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial v_1}{\partial t}\right) = -\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2}$

Donc : $\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial v_1}{\partial x}\right)$ car x et t indépendants

$= -\rho_0 \frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial \rho_1}{\partial t}\right)$ d'après la question 20

$= \frac{\partial^2 \rho_1}{\partial t^2}$

Puis d'après la question 22 : $\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial x^2} = \rho_0 \chi_s \frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}}$ on a : $\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_s}}}$

Q24 $\rho_0 c$ en $kg.m^{-3}.m\,s^{-1} = kg\,m^{-2}\,s^{-1}$

$\frac{p_1}{v_1}$ en $N.m^{-2}.(m\,s^{-1})^{-1} = kg\,m\,s^{-2}.m^{-2}.m^{-1}.s = kg.m^{-2}s^{-1}$

Les deux grandeurs ont la même unité

Q25 Pour l'onde plane progressive directe $p(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$ alors : $v_1(x,t) = \frac{1}{Z} f(t - \frac{x}{c})$

Pour l'onde plane progressive rétrograde $p(x,t) = g(t + \frac{x}{c})$ alors : $v_1(x,t) = -\frac{1}{Z} g(t + \frac{x}{c})$

D'où : $\boxed{v_1(x,t) = \frac{1}{Z}\left(f(t - \frac{x}{c}) - g(t + \frac{x}{c})\right)}$

Q26

Onde réfléchie :	$p_r(x,t) = P_r \cos(\omega t + kx - \varphi_r)$	$v_r(x,t) = -\frac{1}{Z} P_r \cos(\omega t + kx - \varphi_r)$
Onde transmise :	$p_t(x,t) = P_t \cos(\omega t - kx - \varphi_t)$	$v_t(x,t) = \frac{1}{Z} P_t \cos(\omega t - kx - \varphi_t)$

Q27 Les relations (7) font intervenir i donc on passe en notation complexe :

Onde incidente : $\underline{p}(x,t) = p_i e^{i(\omega t - kx)}$ $\quad \underline{v}(x,t) = \frac{1}{Z} p_i e^{i(\omega t - kx)}$

Onde réfléchie : $\underline{p_r}(x,t) = \underline{P_r} e^{i(\omega t + kx)}$ $\quad \underline{v_r}(x,t) = -\frac{1}{Z} \underline{P_r} e^{i(\omega t + kx)}$ $\quad (\underline{P_r} = P_r e^{-i\varphi_r})$

Onde transmise : $\underline{p_t}(x,t) = \underline{P_t} e^{i(\omega t - kx)}$ $\quad \underline{v_t}(x,t) = \frac{1}{Z} \underline{P_t} e^{i(\omega t - kx)}$ $\quad (\underline{P_t} = P_t e^{-i\varphi_t})$

a) Continuité de la vitesse en $x=0$: $\underline{v}(0,t) + \underline{v}_r(0,t) = \underline{v}_t(0,t)$

$$\Rightarrow \frac{1}{Z} p_1 e^{i\omega t} - \frac{1}{Z}\underline{p}_r e^{i\omega t} = \frac{1}{Z}\underline{p}_t e^{i\omega t}$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 - \underline{p}_r = \underline{p}_t}$$

b) Principe fondamental de la dynamique à l'élément dS, en projection selon Ox :

$$\mu \cancel{dS} \underbrace{\frac{\partial \underline{v}_t}{\partial t}}(0,t) = \left(\underline{p}(0,t) + \underline{p}_r(0,t)\right)\cancel{dS} - \underline{p}_t(0,t)\cancel{dS}$$

l'accélération de la plaque est aussi celle du fluide à son contact en $x = 0^+$

$$\mu i\omega \frac{1}{Z}\underline{p}_t e^{i\omega t} = p_1 e^{i\omega t} + \underline{p}_r e^{i\omega t} - \underline{p}_t e^{i\omega t}$$

donc : $\boxed{(\mu i\omega + Z)\underline{p}_t = Z(p_1 + \underline{p}_r)}$

c) On a : $(\mu i\omega + Z)(p_1 - \underline{p}_r) = Z(p_1 + \underline{p}_r)$

$$\mu i\omega p_1 = \underline{p}_r(2Z + \mu i\omega) \Rightarrow \boxed{r = \frac{i\mu\omega}{2Z + i\omega\mu}}$$

Puis : $\underline{p}_t = p_1 - r p_1 = p_1\left(1 - \frac{i\omega\mu}{2Z + i\omega\mu}\right) = p_1 \frac{2Z}{2Z + i\omega\mu} \Rightarrow \boxed{t = \frac{2Z}{2Z + i\omega\mu}}$

Q28 Pour calculer les grandeurs énergétiques, on revient en notation réelle :

Onde incidente :

$$\langle p(x,t) v(x,t)\rangle = \langle p_1 \cos(\omega t - kx) \cdot \frac{p_1}{Z}\cos(\omega t - kx)\rangle = \frac{1}{2}\frac{p_1^2}{Z}$$

Onde transmise :

$$\langle p_t(x,t) v_t(x,t)\rangle = \langle p_t \cos(\omega t - kx - \varphi_t) \cdot \frac{p_t}{Z}\cos(\omega t - kx - \varphi_t)\rangle = \frac{1}{2}\frac{p_t^2}{Z} = \frac{1}{2}\frac{|\underline{p}_t|^2}{Z}$$

Donc : $T_{energie} = \frac{\langle p_t(x,t) \cdot v_t(x,t)\rangle}{\langle p(x,t) v(x,t)\rangle} = \frac{|\underline{p}_t|^2}{p_1^2} = |t|^2$

D'où : $\boxed{T_{energie} = \frac{4Z^2}{4Z^2 + \omega^2\mu^2}}$

Puis : $\boxed{T_{energie\,dB} = 10 \log\left(\frac{4Z^2}{4Z^2 + \omega^2\mu^2}\right)}$

Q29
```
frequence = [ ]
I_emetteur = [ ]
I_recepteur = [ ]
donnees = [ ]
```
} [Instructions 1.1] : initialisation des listes

CCINP Option PC. Modelisation - 2023


```
for lu in Fichier :
    ligne = lu.split("\t")
    donnees.append(ligne)
frequence = donnees[0]
I_emetteur = donnees[1]
I_recepteur = donnees[2]
```

[Instructions 1.2] : extraction des 3 sous-listes

```
tab_frequence = np.zeros(len(frequence))
tab_emett = np.zeros(len(frequence))
tab_recep = np.zeros(len(frequence))
for i in range(len(frequence)) :
    tab_frequence[i] = float(frequence[i])
    tab_emett[i] = float(I_emetteur[i])
    tab_recep[i] = float(I_recepteur[i])
```

[Instructions 1.3] : conversion en tableaux numpy

Q 30 `Gain_dB = 10 * np.log10(tab_emett / tab_recep)`

Q 31
3.1 : `plt.plot(tab_frequ, Gain_dB, '+', label='points exp')`

3.2 : `plt.legend()`

3.3 : `plt.xlabel('frequence [Hz]')`

3.4 : `plt.ylabel('Indice d'amortissement acoustique [dB]')`

3.5 : `plt.title('Evolution du gain en fonction de la frequence')`

Scanné avec CamScanner